



Revista *Joven Matemático*, Edición 2. Publicada de forma electrónica el día 31 de Marzo de 2011. Próxima edición: 30 de Septiembre de 2011.

La revista cuenta con el patrocinio del Núcleo Milenio “Teoría Matemática de Sistemas Magnéticos Cuánticos y Clásicos”.

Contacto:

joven.matematico@gmail.com

Suscripción:

Personas e instituciones interesadas en recibir copias electrónicas de ediciones futuras pueden suscribirse enviando un correo a la dirección de contacto, indicando el nombre, ciudad, país, y afiliación en el caso de estudiantes y profesores.

Información para autores:

Los editores invitan a alumnos y profesores a enviar artículos para su publicación en esta revista, previa revisión por parte del equipo editorial. Los temas que pueden incluir los artículos son muy

variados, siendo los únicos requisitos el incluir contenidos de índole matemática, y el que estén escritos en lengua española. Estos pueden ser sobre historia de las matemáticas, matemática aplicada, física matemática, enseñanza de las matemáticas, y cualquiera de los campos de las matemáticas puras. El nivel de los artículos debe ser apto para estudiantes avanzados de carreras universitarias afines a matemática, aunque también son bienvenidos artículos de tipo introductorio a temas más especializados.

Para ser considerados para publicación en el próximo número, los artículos deben ser enviados al correo de contacto antes del 15 de Agosto de 2011. Artículos recibidos después de esta fecha serán considerados para publicación en ediciones posteriores. Los artículos deben ser enviados en formato $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, con el correspondiente archivo PDF adjunto.

Equipo editorial:

Rafael Benguria

Departamento de Física, P. Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile

rbenguri@puc.cl

Sebastián García Sáenz

Departamento de Física, P. Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile

sgarciasaenz@gmail.com

Ricardo Repenning

Facultad de Ingeniería, P. Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile

ricardo.repenning@gmail.com

Felipe Soto Arévalo

Facultad de Ingeniería, P. Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile

felipe.soto.arevalo@gmail.com

Francisco Vial

École Polytechnique, París, Francia

fvialp@gmail.com



Contenidos

El trascendental número de Euler	2
Transformadas de Laplace de funciones de Bessel: funciones de orden cero	8
Acerca del interior de un polígono	19
Problemas de obstáculos y curvas convexas	26
Métodos a conmutadores en teoría espectral y teoría del scattering	36
Problemas y Soluciones	43
Noticias	52



El trascendental número de Euler

Magdalena Eterovic

P. Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile

1. Introducción

Probablemente muchos hemos escuchado sobre el famoso número e . Es un número irracional y su valor es aproximadamente $e \approx 2.71828182845$. Junto con el 0, el 1, la constante π y la unidad imaginaria i , e es uno de los números más importantes en matemáticas. En esta monografía responderemos las siguientes preguntas: ¿De dónde viene el número e ? ¿Cuál es su definición y cómo se puede calcular su valor? ¿Cómo sabemos que es un número irracional? ¿Qué relación tiene con los números complejos?

2. Antecedentes históricos

Leonhard Euler (1707-1783), matemático suizo, fue quien le dio el nombre al número e . Tal vez la definición más conocida del número e es que es la base de los logaritmos naturales. Pero, ¿qué quiere decir que e sea la base de los logaritmos naturales?. Primero, veamos brevemente el origen de los logaritmos.

Los logaritmos fueron inventados por el matemático escocés John Napier (1550-1617). Napier quería facilitar el cálculo de las funciones trigonométricas, por la vía de reemplazar las operaciones de multiplicación y división por sumas y restas. Para esto, Napier se basó en el trabajo del matemático alemán Michael Stifel (1487-1567), quien había llegado a determinar las relaciones $q^m q^n = q^{m+n}$, y $q^m / q^n = q^{m-n}$ para los números enteros.

Napier razonó que si podemos escribir cualquier número como una potencia de algún número fijo dado (una base), entonces la multiplicación y división de números serían equivalentes a la suma y resta de sus exponentes. Para evitar introducir fracciones, Napier eligió el valor 10^7 para el radio del círculo (es decir, una unidad dividida en 10^7 subunidades); y como base para sus potencias, eligió $1 - 10^{-7} = 0.9999999$ (es decir, el siguiente número más pequeño que la unidad, que resulta de restarle una subunidad a la unidad). Entonces un número N puede escribirse como

$$N = 10^7 (1 - 10^{-7})^L,$$

en que el exponente L es el logaritmo naperiano de N . Napier acuñó la palabra logaritmo a partir de las palabras griegas *logos*, que significa “razón,” y *arithmos*, que significa “número.” Es interesante observar que

$$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Es decir, aunque Napier no se lo propuso, él prácticamente obtuvo un sistema de logaritmos en base $\frac{1}{e}$. A propósito, no sabemos quién fue la primera persona que notó el comportamiento de la expresión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ a medida que n tiende a infinito, de modo que la fecha de nacimiento del número e permanece en la oscuridad.

Los logaritmos de Napier y, posteriormente, los del matemático inglés Henry Briggs (1561-1631), los logaritmos en base 10 o “comunes,” se difundieron rápidamente en la comunidad científica europea (incluso fueron introducidos en China 1653), y muy pronto dieron origen a la regla de cálculo. La regla de cálculo apareció por primera vez en 1620 y fue usada por científicos e ingenieros durante los próximos 350 años, hasta que en 1970 apareció la calculadora.



Que e sea la base de los logaritmos naturales significa que el logaritmo natural de un número x es la potencia a la que habría que elevar e para obtener x . El logaritmo natural de x es r si y sólo si $e^r = x$. Estos logaritmos en base e se llaman “naturales” porque aparecen frecuentemente en matemáticas; por ejemplo, cuando diferenciamos una función logarítmica,

$$\frac{d}{dx} \log_b(x) = \frac{\log_b(e)}{x} = \frac{1}{\ln(b)x},$$

como veremos más abajo. En todo caso, el calificativo de “natural” le fue dado por Mergoli y Mercator antes de que Isaac Newton (1643-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716) desarrollaran el cálculo.

3. Definición del número e

Hay varias formas de definir conceptualmente el valor del número e , y todas son, naturalmente, equivalentes entre ellas. Para partir por una de estas, analicemos el siguiente problema: derivar la función $y = a^x$ con respecto a x . Lo primero que debemos hacer es recordar el concepto de derivada: geoméricamente hablando, la derivada de la función $f(x)$ es otra función, $f'(x)$, que corresponde a la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$; en general, esta pendiente varía para cada valor de x . Análíticamente, esta definición puede escribirse como

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1)$$

Armados con esta herramienta, una forma de definir el valor de e es la siguiente. Como dijimos en la introducción, e es la base de los logaritmos naturales, es decir, e está relacionado con los logaritmos. Si e está relacionado con los logaritmos, entonces e también está relacionado con las funciones de la forma a^x , inversas de los logaritmos. Así, si queremos derivar $y = a^x$ usando la definición anterior, obtenemos

$$(a^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h}.$$

Si se saca factor común resulta

$$a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Aquí nos enfrentamos con el verdadero problema, ¿cómo calculamos este límite? Desde el punto de vista práctico, lo mejor que nos podría pasar es que este límite fuese igual a 1, es decir, que la derivada de a^x fuese igual a a^x . Pero esto no es necesariamente cierto para cualquier valor de a . Entonces, definamos e como aquel número real que cumple esta condición:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1. \quad (2)$$

Otra forma de entender esto es que la derivada de e^x es e^x . Con este límite hemos logrado obtener una definición para el número e . Sin embargo, en la práctica, no es fácil calcularlo. ¿Qué podemos hacer? Primero, veamos si existe un número e que satisfaga el límite anterior. Para ello, calculamos el valor del límite sustituyendo e por distintos números enteros y, en cada caso, evaluando la expresión para valores cada vez más pequeños de h . La siguiente tabla sugiere que e efectivamente existe, y debe ser mayor que 2 y menor que 3.

h	$\frac{2^h - 1}{h}$	$\frac{3^h - 1}{h}$
1	1	2
0.5	0.828	1.464
0.2	0.743	1.228
0.1	0.717	1.161
0.05	0.705	1.129



Aún estamos muy lejos de tener el valor exacto de e . Veamos cómo podemos aprovechar el hecho de que la derivada de e^x es e^x para esto. Definamos la función $\ln(x)$ como la función logarítmica con base e (ya veremos que no solo tiene sentido hacer esta definición, sino que también es muy útil). A continuación, demostraremos que la derivada del $\ln(x)$ es $\frac{1}{x}$. Consideremos la función

$$y = \log_a x.$$

Esto significa que $a^y = x$. Además sabemos que podemos expresar a como $z^{\log_z(a)}$ para cualquier valor de z . Por lo tanto, $z^{(\log_z a)y} = x$. Entonces, reemplazando z por e nos queda

$$e^{y(\ln(a))} = x.$$

Ahora derivamos parcialmente esta igualdad con respecto a x . En el lado derecho obtenemos 1, mientras que en el lado izquierdo aplicando la regla de la cadena queda $e^{y(\ln(a))} \ln(a) y' = 1$. Este es el e que definimos en (2), porque estamos usando el hecho de que la derivada de e^x es e^x . Si ahora despejamos y obtenemos

$$y' = \frac{1}{e^{y(\ln(a))} \ln(a)} = \frac{1}{a^y \ln(a)} = \frac{1}{x \ln(a)}.$$

Es decir, la derivada de la función $y = \log_a x$ es $y' = \frac{1}{x \ln(a)}$. Finalmente, si sustituimos a por e , entonces $y = \ln(x)$ y la expresión anterior queda

$$y' = \frac{1}{x \ln(e)} = \frac{1}{x}. \quad (3)$$

Así, hemos demostrado que la derivada del $\ln(x)$ es $1/x$. ¿Y para qué nos sirve esto? Haber calculado la derivada del logaritmo natural de esta forma, nos ayudará a calcular el valor de e , como veremos a continuación. Si usamos la definición de derivada, dada en (1), para calcular la derivada del logaritmo natural en el punto $x = 1$, e igualamos esta expresión con el valor que acabamos de obtener en (3), obtenemos la siguiente igualdad:

$$1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h}.$$

Ahora, por propiedad de los logaritmos, esto es igual a

$$1 = \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left((1+h)^{1/h} \right),$$

y como las funciones logarítmicas son continuas, entonces

$$1 = \ln \left(\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h} \right).$$

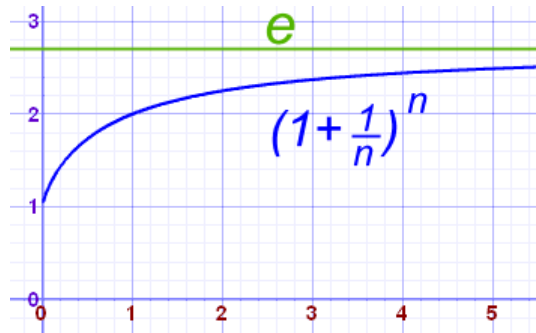
Reemplazando $n = 1/h$, esta expresión queda

$$1 = \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right).$$

Finalmente, aplicando la función inversa del logaritmo (que es la exponencial, es decir, e^x) a ambos lados, concluimos que

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n. \quad (4)$$

Hemos encontrado una forma de calcular el valor de e . La siguiente figura muestra cómo cambia el valor de este límite a medida que aumenta el valor de n .



4. La irracionalidad del número e

En la sección anterior vimos distintas definiciones y formas de calcular e . Cuando tratamos de obtener el valor de e , nos damos cuenta que ninguna de las definiciones se puede expresar directamente como un valor conocido, y que en las aproximaciones que hemos hecho, no hay un patrón en las cifras decimales. Esto nos da razón para pensar que e es irracional. A continuación demostraremos este hecho.

Además de las definiciones (2) y (4) para e , también se puede demostrar que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (5)$$

A partir de esta nueva definición de e , podemos demostrar su irracionalidad por contradicción (*reductio ad absurdum*), de la siguiente forma. Supongamos que e es un número racional; entonces, e se puede escribir como el cociente de dos números naturales:

$$\exists a \wedge b \in \mathbb{N} \mid e = \frac{a}{b}.$$

A partir de los números naturales a y b anteriores, definamos un número x de la siguiente forma:

$$x = b! \left(e - \sum_{n=0}^b \frac{1}{n!} \right) = a(b-1)! - \sum_{n=0}^b \frac{b!}{n!}.$$

Es fácil ver que x es un número entero, porque $a(b-1)!$ es un producto de enteros (que da por resultado un entero) y, como es $b \geq n$, $\frac{b!}{n!}$ es siempre entero, y por lo tanto $\sum_{n=0}^b \frac{b!}{n!}$ es una suma de números enteros, que también es un número entero. Así, x es la resta de dos números enteros, y por lo tanto es entero.

Ahora, trataremos de acotar el valor de x . En primer lugar, sabiendo de (5) que $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, podemos sustituir este valor en la definición de x :

$$x = b! \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^b \frac{1}{n!} \right) = b! \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Vemos así que x es claramente mayor que 0. Por otra parte, nótese que en esta última expresión n tiene valores estrictamente mayores que b . En estas condiciones, se da que

$$\frac{b!}{n!} = \frac{1}{(b+1)(b+2)\dots(n-b)} \leq \frac{1}{(b+1)^{n-b}},$$



y por lo tanto,

$$x = \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^k}.$$

Esta última sumatoria es la suma de una serie geométrica infinita de razón $1/(b+1)$, cuyo valor es

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^k} = \frac{1}{b+1} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{b+1}} \right) = \frac{1}{b}.$$

Como por hipótesis b es un número natural, $1/b$ es menor o igual que 1, y como x es menor que la suma de la serie geométrica infinita, entonces x es estrictamente menor que 1. En consecuencia, tenemos que x es un número entero que es a la vez mayor que 0 y menor que 1. Esta es una contradicción que invalida nuestra suposición de que e es un número racional.

5. El teorema de De Moivre

Una de las más importantes aplicaciones de e es su directa relación con los números complejos. El teorema de De Moivre nos permite expresar cualquier número complejo como el resultado de una exponencial. Cuando uno tiene un número complejo z cualquiera, lo primero es expresar este número de la forma $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, siendo r el módulo de z y θ el ángulo que z forma con el eje x medido en sentido antihorario y en radianes. Esta forma de escribir los números complejos se llama a veces $r \operatorname{cis} \theta$. El teorema de De Moivre dice lo siguiente:

$$z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n e^{in\theta}.$$

A continuación demostraremos este teorema. Primero, definamos al número complejo unitario (módulo = 1) como una función de θ :

$$y = (\cos \theta + i \sin \theta),$$

y derivemos la función con respecto a θ ,

$$\frac{dy}{d\theta} = i \cos \theta - \sin \theta = i(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Notemos que en esta última expresión aparece y en el paréntesis. Es decir,

$$\frac{dy}{d\theta} = iy.$$

Esto que tenemos es una ecuación diferencial para y . Resolviendo obtenemos

$$y = e^{i\theta}.$$

Ahora bien, si nosotros consideramos que el número complejo tiene módulo r , esto lo escribiríamos así en términos de y : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = ry$. Entonces, por lo que acabamos de mostrar,

$$ry = re^{i\theta}.$$

Si elevamos ambos lados a la potencia n , entonces

$$r^n y^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n (e^{i\theta})^n = r^n e^{ni\theta}.$$

Hemos demostrado así el teorema de De Moivre. Para terminar con el teorema, revisemos una característica. Al hablar de θ dijimos que era un ángulo medido en radianes. Enfoquémonos en el caso particular en que $\theta = \pi$. Usemos el teorema para este caso en que el número complejo además tiene módulo unitario:

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + 0 = -1.$$



Esta identidad es bastante famosa. En particular, fue catalogada por el físico norteamericano Richard Feynman (1918-1988) como la identidad más espectacular en matemáticas. En general, escribimos la identidad como

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

De esta forma, aparecen en una sola igualdad los números e , π , el neutro multiplicativo 1, el neutro aditivo 0, y además el componente imaginario i .

Bibliografía

Jan Gullberg, "Mathematics: From the Birth of Numbers," W.W. Norton and Company, 1997.

Eli Maor, "e: The Story of a Number," Princeton Paperbacks, 1998.

<http://www.mathsisfun.com/numbers/e-eulers-number.html>
(Fecha en que se utilizó esta página: 21/07/08.)

James Stewart, "Cálculo: Trascendentes Tempranas" (4a ed.), Thomson Learning, 2002.



Transformadas de Laplace de Funciones de Bessel: Funciones de Orden Cero

Mark S. Ashbaugh¹, y Sebastián García Sáenz²

¹ Department of Mathematics, University of Missouri, Columbia, MO, ashbaughm@missouri.edu.

² Departamento de Física, P. Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile, sgarciasaenz@gmail.com.

Resumen

Este artículo constituye una aproximación pedagógica a la transformada de Laplace de la función de Bessel Y_0 , obtenida mediante un desarrollo adicional del método que usan los libros de texto para obtener la transformada de J_0 de tal modo que se superan los problemas aparentes de la generalización del método para Y_0 . En el camino notamos los modos más directos de obtener las transformadas de Laplace de las funciones de Bessel, y adicionalmente a los desarrollos para Y_0 notamos una identidad binomial interesante que involucra los números armónicos.

1. Introducción

En este artículo derivamos la transformada de Laplace de la función de Bessel Y_0 , siguiendo el desarrollo de la transformada de la función de Bessel J_0 que se encuentra en muchos libros de texto. Una gran cantidad de libros elementales sobre ecuaciones diferenciales, o sobre métodos matemáticos de la física, contienen breves derivaciones de la transformada de Laplace de J_0 ya sea como un ejemplo o como un ejercicio, usualmente en el capítulo sobre la transformada de Laplace, y en el que el cálculo es hecho tomando transformada a la ecuación de Bessel de orden 0 en la forma $ty'' + y' + ty = 0$. Véase, por ejemplo, [7] (ver Prob. 35, p. 322), [9] (ver Ejemplo 4, pp. 216-217), [12] (ver Ejemplo 5, p. 483), [15] (ver Ejemplo 6-4, pp. 305-306), [17] (ver Ejemplos 16 y 17, pp. 205-206), [21] (ver Ejemplo 3, pp. 403-404), [22] (ver Prob. 14, pp. 314-315), o una cantidad de otros textos ([2], [3], [4], [5], ...). Un resultado clave usado en esta derivación es que, si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ representa la transformada de Laplace de $f(t)$, entonces la transformada de Laplace de $tf(t)$ está dada por $-F'(s)$, esto es, la transformada de Laplace convierte multiplicación por t en $-d/ds$. Así, dada la forma de la ecuación de Bessel de orden 0, con coeficientes lineales en t , la aplicación de la transformada de Laplace la convierte en una ecuación diferencial de *primer orden* en la función transformada $Y(s)$. A menudo estas derivaciones también contienen un breve argumento para identificar la constante de integración multiplicativa que surge de resolver esta ecuación homogénea de primer orden, la cual se necesita para identificar la forma precisa de la transformada de Laplace de $J_0(t)$. En particular, uno encuentra que la solución toma la forma $Y(s) = C(s^2 + 1)^{-1/2}$, y uno identifica $C = 1$ comparando la serie obtenida al expandir $Y(s)$ en potencias de $1/s$ con la serie resultante de aplicar transformada de Laplace término a término a la serie de potencias de $J_0(t)$ (bastaría aquí comparar solamente los términos dominantes, aunque la mayoría de los autores consideran la serie completa, ya que este cálculo requiere poco trabajo adicional). Este cálculo usualmente se sugiere de manera formal, sin justificar el procedimiento de transformar término a término (que no es más que el intercambio de los órdenes de suma e integración, pues la transformada de Laplace consiste en multiplicar por e^{-st} e integrar desde $t = 0$ a ∞ , i.e., $\mathcal{L}\{f(t)\} =: \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$). La expansión de $Y(s) = C(s^2 + 1)^{-1/2}$ en potencias de $1/s$ es una aplicación simple de la expansión binomial (para la cual es necesario asumir que $s > 1$; aquí y en adelante asumiremos $s > 1$ al expandir en $1/s$).

Estos cálculos, aunque instructivos en muchos sentidos y apropiados para presentar en libros elementales, tienen sin embargo ciertos defectos. Uno de ellos es obviamente la falta de justificación de la integración término a término (transformación de Laplace), pero como esto se remedia fácilmente mediante teoremas estándar de



cálculo avanzado o teoría de integración, no nos detendremos más tiempo en esto. Otras objeciones, algo más serias, incluyen (1) el hecho de que resolver la ecuación diferencial además de aplicar transformada de Laplace a la expansión en serie constituye una tarea engorrosa, pues cada uno de estos procedimientos por sí mismo permite obtener casi todo lo que uno busca, y (2) la transformación de la ecuación diferencial deja al estudiante serio (y al profesor) con la duda acerca de qué ha pasado con la “segunda solución” de la ecuación con la que empezamos, esto es, la ecuación de Bessel de orden 0, que es una ecuación de segundo orden. De hecho, si uno quisiera asegurar todo directamente, incluyendo la constante C , entonces el “mejor” método sería transformar la expansión en serie desde el principio, obteniendo $\mathcal{L}\{J_0\}$ explícitamente, sin necesidad de tocar la ecuación de primer orden que esta satisface. Uno entonces podría emplear la expansión binomial para “sumar” la serie y llegar a la expresión en forma cerrada de $\mathcal{L}\{J_0\}$. Algunas razones que podrían ayudarnos a explicar la presente organización del argumento incluyen (i) que el método de transformar la ecuación es más simple y completo, de modo que su exposición calza mejor en el contexto de una discusión de la transformada de Laplace (ilustrando también el teorema de que $\mathcal{L}\{tf\} = -F'(s)$); (ii) el método de la ecuación diferencial permite obtener la transformada de Laplace de $J_0(t)$ en forma cerrada, no solamente la expansión en serie, y por lo tanto permite a los autores evitar hacer uso en un principio de la expansión binomial de $(s^2 + 1)^{-1/2} = 1/s(1 + 1/s^2)^{-1/2}$; y (iii) relegando el uso de las series solamente para la identificación de la constante C hace quizás más justificable en nuestra opinión el uso de argumentos formales en este punto, sin preocuparnos de que el argumento sea cabalmente riguroso. (Un camino para evitar esta crítica es usar el resultado $\lim_{s \rightarrow \infty} [s\mathcal{L}\{f(t)\}] = f(0)$, que se puede encontrar, por ejemplo, en [23] (ver Teorema 1, p. 275). Pero muy pocos autores que tratan $\mathcal{L}\{J_0(t)\}$ usan esto, siendo los únicos de nuestro conocimiento [8], [14], [16], [17], y [20].)

En particular, notamos que si el objetivo es obtener la transformada de Laplace de $J_0(t)$ explícitamente de la forma más fácil y directa posible, entonces con seguridad uno debería simplemente tomar la expansión en serie, aplicar transformada término a término, y luego identificar la serie resultante como la expansión de $(s^2 + 1)^{-1/2}$ mediante el teorema del binomio. Nada de este procedimiento es ajeno al estudiante de un curso de ecuaciones diferenciales, excepto tal vez la teoría de convergencia que justifica la transformación término a término, lo cual al menos se puede mostrar como plausible al notar que la serie tiene un radio de convergencia infinito mientras que la función que representa es acotada para t grande (y de hecho es acotada por K/\sqrt{t} para cierta elección de la constante K).

Quizás algo más para pensar, o para confundir, son las cosas que omiten muchos autores cuando aplican el método de transformar la ecuación diferencial. La mayoría introduce condiciones iniciales para J_0 o llaman la atención hacia J_0 desde el principio. Pero si uno piensa por qué este procedimiento no captura nada de la “segunda solución” de la ecuación de Bessel, la primera impresión es probablemente que, aunque no se mencione, la solución que buscamos posee una transformada de Laplace, mientras que la función Y_0 no. Pero esto no es así, pues un poco de reflexión (usando los principios de la teoría de Frobenius para resolver ecuaciones con puntos singulares regulares, o simplemente haciendo referencia a la expansión de $Y_0(t)$ desarrollada ya en los libros (ver, por ejemplo, [7], p. 295)) nos convence de que esto no es cierto. $Y_0(t)$, cuya expansión comienza como una constante por $\ln t$ para t pequeño, sí posee una transformada de Laplace (su singularidad en $t = 0$ es muy débil, de modo que la integral de la transformación es convergente hacia $t = 0$; notar que $\ln t$, o cualquier potencia no negativa de t por $\ln t$ es un integrando convergente en el intervalo $0 < t < 1$). Así pues, el problema no es que $Y_0(t)$ no tenga transformada de Laplace. En cambio, lo que uno encuentra cuando se examina lo que está pasando con Y_0 , Y_0' , e Y_0'' , es que Y_0' es demasiado singular en $t = 0$ como para admitir una transformada de Laplace, y similarmente con Y_0'' o incluso con el término tY_0'' que aparece en la ecuación diferencial de Bessel. Así, para $y = Y_0$, los términos ty'' e y' en la ecuación $ty'' + y' + ty = 0$ causan problemas. Sin embargo, un poco más de reflexión nos muestra que el término ty se comporta bien obviamente, y por lo tanto la combinación de los otros dos términos en la ecuación debe comportarse bien también. Y cuando uno observa que esos términos se pueden agrupar en un solo término como $(ty)'$, y que $(ty)'$ posee transformada de Laplace, entonces se ve que uno está avanzando. De hecho, aunque aún quede trabajo por delante, esta aproximación sí funciona, y nos lleva por algunos caminos nuevos, dando un nuevo aire al método de ecuaciones diferenciales que en la mano de los autores de los libros de texto podría haber sonado como



una aplicación interesante, pero tal vez menor o demasiado especializada. En particular, esta aproximación que desarrollamos aquí nos permite iluminar tanto la capacidad como el rango de aplicación del método, y permite entender algo del juego que existe entre el método de la transformada de Laplace y la búsqueda de soluciones singulares de ecuaciones diferenciales. Específicamente, uno ve un poco mejor cómo las condiciones iniciales entran en este juego, cómo es la relación entre la preservación de las condiciones iniciales y el orden de la ecuación transformada, y cómo el método de la transformada de Laplace se puede emplear en un nivel relativamente elemental como un modo efectivo de lidiar incluso con soluciones algo singulares.

Así, tenemos dos objetivos principales en lo que haremos a continuación: En primer lugar, mostramos cómo el método de la transformada de Laplace se puede utilizar, vía transformación de la ecuación diferencial, para desarrollar la transformada de Laplace de *todas* las soluciones de la ecuación de Bessel de orden 0, esto es, tanto de J_0 como de Y_0 . Y en segundo lugar, ilustramos el método directo de transformar una solución en serie, mostrando que también puede hacerse cargo de los dos tipos de soluciones de la ecuación de Bessel de orden 0, haciendo uso de solamente un herramienta adicional. En el camino también nos encontramos con una identidad binomial interesante, que involucra coeficientes binomiales y los números armónicos H_k , la cual es fácil de probar usando la transformada de Laplace de Y_0 desde dos puntos de vista distintos. Una de las principales razones para escribir este artículo es que sentimos que, después de leer las presentaciones estándar, la mayoría de la gente queda con la impresión de que la transformada de Laplace de $Y_0(t)$ no se puede encontrar transformando la ecuación diferencial, y dar a conocer a los lectores de que esto *no* es así. Con algunos pequeños ajustes, tomando en cuenta el comportamiento dominante de $Y_0(t)$, veremos que $\mathcal{L}\{Y_0(t)\}$ se puede encontrar desde la ecuación diferencial de manera muy similar a como se encuentra $\mathcal{L}\{J_0(t)\}$.

2. Aplicando transformada de Laplace a la ecuación diferencial

Como hicimos notar en la introducción, si uno quiere llevar a cabo la idea de usar la transformada de Laplace para obtener tanto Y_0 como J_0 , vía transformación de la ecuación de Bessel de orden 0, uno debe entender qué tan singulares pueden ser los términos de la ecuación, e intentar agruparlos de modo de evitar tener que lidiar con una función que es demasiado singular en el origen como para admitir una transformada de Laplace. Ya hemos visto que los términos en y' e y'' no suponen problemas si se consideran en la combinación $(ty)'$, pero si uno comienza a calcular la transformada de este término, uno empezaría por

$$\mathcal{L}\{(ty)'\} = s\mathcal{L}\{ty'\} - (ty')(0) \quad (2.1)$$

$$= -s \frac{d}{ds} \mathcal{L}\{y'\} - (ty')(0), \quad (2.2)$$

y aquí uno se encuentra con un nuevo problema, pues y' no posee transformada de Laplace (aquí y en adelante $(ty')(0)$ y expresiones similares se usarán para denotar el valor límite de tal expresión cuando $t \rightarrow 0^+$, según sea necesario). Pero ahora nuestro problema es con el orden de las operaciones, y aquí vemos que es mejor tener factores de t (o de t^2 , etc., según se necesite) en el “interior,” y cualquier diferenciación necesaria en el “exterior.” Así vemos que una mejor manera de agrupar nuestros términos, permitiendo rodear el problema que encontramos arriba, es como $(ty)'' - y'$, o mejor, como $((ty)' - y)'$. Ahora, si procedemos como antes encontramos

$$\mathcal{L}\{((ty)' - y)'\} = s\mathcal{L}\{(ty)' - y\} - ((ty)' - y)(0) \quad (2.3)$$

$$= s\mathcal{L}\{(ty)' - y\} - (ty')(0) \quad (2.4)$$

$$= s[\mathcal{L}\{(ty)'\} - Y(s)] - a, \quad (2.5)$$



donde introdujimos la constante a para denotar $(ty)'(0)$. A diferencia de antes, aquí podemos proseguir con

$$\mathcal{L}\{(ty)' - y\}' = s[s\mathcal{L}\{ty\} - (ty)(0) - Y(s)] - a \quad (2.6)$$

$$= s \left[s \left(-\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{y\} \right) - Y(s) \right] - a \quad (2.7)$$

$$= -s^2 Y'(s) - sY(s) - a, \quad (2.8)$$

Podemos combinar este resultado con la ecuación diferencial original, escrita en la forma $((ty)' - y)' + ty = 0$, para ver que nuestra ecuación diferencial transformada queda como

$$-s^2 Y'(s) - sY(s) - a - Y'(s) = 0, \quad (2.9)$$

o mejor,

$$(s^2 + 1)Y'(s) + sY(s) = -a. \quad (2.10)$$

Esta es la misma ecuación diferencial de primer orden que resulta si uno se enfoca en J_0 , excepto que en ese caso la constante a (el término inhomogéneo en la ecuación) desaparece. De hecho, esta ecuación representa la ecuación diferencial general que satisface la transformada de Laplace de cualquier función de Bessel de orden 0 si uno toma a como una constante arbitraria (la elección $a = 2/\pi$ es la necesaria para obtener Y_0 , como puede verse al mirar las convenciones empleadas para definir Y_0 ; véase, por ejemplo, (3.2)-(3.4) más abajo). Así, manteniendo a arbitrario permite mantener la solución asociada a la transformada de Y_0 , mientras que la otra solución (más regular) se mantiene a través del hecho de que nuestra ecuación es de primer orden, de modo que aparecerá otra constante arbitraria al encontrar la solución general.

La ecuación (2.10) es fácil de resolver usando el método estándar para ecuaciones lineales de primer orden. En forma estándar se escribe como

$$Y'(s) + \frac{s}{s^2 + 1} Y(s) = -\frac{a}{s^2 + 1}. \quad (2.11)$$

Esta tiene el factor integrante $(s^2 + 1)^{1/2}$, de donde se puede escribir

$$[(s^2 + 1)^{1/2} Y(s)]' = -\frac{a}{(s^2 + 1)^{1/2}}. \quad (2.12)$$

Para la solución general uno obtiene

$$Y(s) = C \frac{1}{(s^2 + 1)^{1/2}} - a \frac{1}{(s^2 + 1)^{1/2}} \int_0^s \frac{d\sigma}{(\sigma^2 + 1)^{1/2}}. \quad (2.13)$$

La integral que aparece aquí se hace de manera sencilla con la substitución $\sigma = \sinh \alpha$. Como entonces $d\sigma = \cosh \alpha d\alpha$ y $(\sigma^2 + 1)^{1/2} = \cosh \alpha$, la integral indefinida es α , o $\sinh^{-1} \sigma$, y la integral definida queda $\sinh^{-1} s$, o $\ln(s + \sqrt{s^2 + 1})$. Así nuestra solución es

$$Y(s) = C \frac{1}{(s^2 + 1)^{1/2}} - a \frac{\ln(s + \sqrt{s^2 + 1})}{\sqrt{s^2 + 1}}. \quad (2.14)$$

Con a general, esta es la transformada de Laplace de la solución general de la ecuación de Bessel de orden 0. Como se mencionó antes, las elecciones $C = 1$ y $a = 0$ entregan $\mathcal{L}\{J_0(t)\}(s)$. Esto será confirmado más abajo cuando obtengamos $\mathcal{L}\{J_0(t)\}(s)$ vía integración término a término (i.e., transformación de Laplace) de la expansión en serie de potencias de $J_0(t)$ (en potencias de t). Similarmente, las elecciones $C = 0$ y $a = 2/\pi$ se confirmará que entregan $\mathcal{L}\{Y_0(t)\}(s)$, y así veremos que

$$\mathcal{L}\{Y_0(t)\}(s) = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{(s^2 + 1)^{1/2}} \int_0^s \frac{d\sigma}{(\sigma^2 + 1)^{1/2}} = -\frac{2}{\pi} \frac{\ln(s + \sqrt{s^2 + 1})}{\sqrt{s^2 + 1}}. \quad (2.15)$$



La expresión para $\mathcal{L}\{Y_0(t)\}$ dada en esta fórmula (especialmente la primera) se presta para encontrar su expansión en el límite de s grande como un producto de dos series (i.e., un producto de Cauchy), y esta, junto a la expansión más directa que derivamos en la siguiente sección, permite concluir una identidad interesante que involucra sumas de coeficientes binomiales y ciertas restas de números armónicos, H_k . Todo esto se desarrolla en detalle en la sección 4.

Notamos para cerrar que la ecuación diferencial de segundo orden que contiene todas las transformadas de Laplace de las funciones de Bessel de orden 0 como soluciones se obtiene fácilmente de la ecuación (2.10), simplemente diferenciando con respecto a s . Esto claramente elimina la constante a , quedando una ecuación de segundo orden homogénea. Así se obtiene

$$(s^2 + 1)Y''(s) + 3sY'(s) + Y(s) = 0. \quad (2.16)$$

En cierta forma esta ecuación debería considerarse como más básica que (2.10), pues es una ecuación de segundo orden que contiene las transformadas de Laplace de J_0 e Y_0 (y combinaciones lineales de ellas) como soluciones, y por lo tanto trata a ambas funciones de manera equivalente. También se podrá ver que esta ecuación es generalizable al caso de funciones de Bessel de orden p , y que esta ecuación general comprende las transformadas de Laplace de $J_p(t)$ e $Y_p(t)$ para un rango adecuado de p 's.

3. La expansión en serie de $Y_0(t)$ y su transformación término a término

Del método estándar de series de Frobenius (véase [7], Sec. 5.4-5.7), y adoptando las convenciones usuales para las definiciones de $J_0(t)$ e $Y_0(t)$ (véase, por ejemplo, [7], pp. 293-295, o [1], p. 360, fórmulas 9.1.10 y 9.1.11), se tiene

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} t^{2k}, \quad (3.1)$$

y

$$Y_0(t) = \frac{2}{\pi} J_0(t) \ln(t/2) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \psi(k+1)}{2^{2k}(k!)^2} t^{2k} \quad (3.2)$$

$$= \frac{2}{\pi} [\ln(t/2) + \gamma] J_0(t) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k H_k}{2^{2k}(k!)^2} t^{2k} \quad (3.3)$$

$$= \frac{2}{\pi} [\ln(t/2) + \gamma] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} t^{2k} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k H_k}{2^{2k}(k!)^2} t^{2k} \quad (3.4)$$

(la función ψ , estrechamente relacionada con la función Γ , se definirá en seguida, al igual que los números armónicos H_k , y su conexión con la función ψ). Aplicando transformada de Laplace término a término a $Y_0(t)$ se obtiene

$$\mathcal{L}\{Y_0(t)\}(s) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} \mathcal{L}\{t^{2k} [\ln(t/2) + \gamma]\} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k H_k}{2^{2k}(k!)^2} \mathcal{L}\{t^{2k}\}. \quad (3.5)$$

Para proseguir necesitamos conocer las transformadas

$$\mathcal{L}\{t^p\} = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad (3.6)$$

y el correspondiente resultado para $t^p \ln t$, el cual se obtiene fácilmente derivando la expresión anterior con respecto a p . Así llegamos a que

$$\mathcal{L}\{t^p \ln t\} = -\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}} \ln s + \frac{\Gamma'(p+1)}{s^{p+1}} = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}} [-\ln s + \psi(p+1)], \quad (3.7)$$



donde la *función digamma* ψ se relaciona con la función Γ a través de $\psi(p) = \Gamma'(p)/\Gamma(p)$, esto es, es la derivada logarítmica de Γ . Notamos además que, para argumentos enteros positivos, el valor de la función ψ está dado por $\psi(k+1) = \psi(1) + H_k$, donde H_k denota el k -ésimo número armónico, dado por $H_k = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i}$ (con la convención de que $H_0 = 0$). Esta identidad es fácil de demostrar de manera iterativa tomando derivada logarítmica de la relación funcional de la función Γ , $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Dado que $\psi(1) = \Gamma'(1) = -\gamma$ es conocido, donde γ es la constante de Euler ($\gamma \approx 0.5772156649$), obtenemos la relación explícita

$$\psi(k+1) = -\gamma + H_k, \text{ para todo } k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

Esto nos permite escribir, continuando desde (3.5),

$$Y_0(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} \frac{\Gamma(2k+1)}{s^{2k+1}} [-\ln s + \psi(2k+1) - \ln 2 + \gamma] - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k H_k}{2^{2k}(k!)^2} \frac{\Gamma(2k+1)}{s^{2k+1}} \quad (3.9)$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} \frac{\Gamma(2k+1)}{s^{2k+1}} [-\ln(2s) + H_{2k}] - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k H_k}{2^{2k}(k!)^2} \frac{\Gamma(2k+1)}{s^{2k+1}} \quad (3.10)$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} \frac{\Gamma(2k+1)}{s^{2k+1}} [-\ln(2s) + H_{2k} - H_k]. \quad (3.11)$$

(Notar que la convención $H_0 = 0$ permite extender el rango de la segunda suma para incluir $k = 0$.)

Para terminar nuestra identificación de los términos dominantes de las expansiones para s grande de $\mathcal{L}\{J_0(t)\}$ y $\mathcal{L}\{Y_0(t)\}$, y de ahí obtener sus expresiones en forma cerrada a partir de (2.14), notamos que los comportamientos dominantes de estas funciones son, respectivamente,

$$\frac{1}{s} + O\left(\frac{1}{s^3}\right) \quad (3.12)$$

y

$$\frac{2}{\pi} \left[-\frac{\ln(2s)}{s} + O\left(\frac{\ln s}{s^3}\right) \right]. \quad (3.13)$$

Estas expresiones y los términos dominantes de

$$-\frac{\ln(s + \sqrt{s^2 + 1})}{\sqrt{s^2 + 1}} = -\frac{\ln(2s)}{s} + O\left(\frac{\ln s}{s^3}\right) \quad (3.14)$$

son suficientes para concluir que

$$\mathcal{L}\{Y_0(t)\} = -\frac{2}{\pi} \frac{\ln(s + \sqrt{s^2 + 1})}{\sqrt{s^2 + 1}}, \quad (3.15)$$

sin una contribución de $\mathcal{L}\{J_0(t)\}$. También vemos fácilmente que

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}. \quad (3.16)$$

Puesto de manera un poco diferente, vemos que la función $Y(s)$ de (2.13) y (2.14) se puede identificar como

$$Y(s) = C\mathcal{L}\{J_0(t)\} + \frac{\pi}{2} a\mathcal{L}\{Y_0(t)\}. \quad (3.17)$$

De esta forma, como se mencionó antes, la elección $C = 1$, $a = 0$ entrega $\mathcal{L}\{J_0(t)\}$, mientras que $C = 0$, $a = 2/\pi$ entrega $\mathcal{L}\{Y_0(t)\}$.



4. Un segundo cálculo de la expansión de $\mathcal{L}\{Y_0(t)\}$ para s grande y una identidad binomial interesante

En esta sección procedemos a calcular la expansión de $\mathcal{L}\{Y_0(t)\}$ en el límite de s grande a partir de las expresiones “en forma cerrada” de (2.13) y (2.14), esto es, a partir de las representaciones dadas en (2.15), que escribimos en la forma

$$-\frac{\pi}{2}\mathcal{L}\{Y_0(t)\} = \frac{1}{(s^2+1)^{1/2}} \int_0^s \frac{d\sigma}{(\sigma^2+1)^{1/2}} = \frac{\ln(s+\sqrt{s^2+1})}{\sqrt{s^2+1}}. \quad (4.1)$$

El método natural para usar en este procedimiento es encontrar las expansiones de $(s^2+1)^{-1/2}$ y $\ln(s+\sqrt{s^2+1})$ para s grande en potencias de $1/s$ (de ser posible) y luego multiplicar ambas expansiones. Sin embargo, este proceso se complica un poco por el hecho de que el término dominante de $\ln(s+\sqrt{s^2+1})$ es $\ln(2s)$ (y por lo tanto uno no puede tener expansiones sólo de potencias de $1/s$, sino que también debe incluir un término en $\ln(2s)$) y también por el hecho de que expandir $\ln(s+\sqrt{s^2+1})$ directamente requeriría expandir una composición de series, algo que preferiríamos evitar. Podemos rodear estos dos problemas reorganizando un poco la integral que nos da $\ln(s+\sqrt{s^2+1})$. Así, elegimos trabajar con la expresión para $-\frac{\pi}{2}\mathcal{L}\{Y_0(t)\}$ como integral, y no con su forma cerrada. Lo que hacemos es esencialmente remover el comportamiento de $\ln(2s)$ de la integral explícitamente, para lo cual convertimos la integral hacia el intervalo $[s, \infty)$ (cuidando de que sea convergente). No es difícil mostrar que otra representación de la función es

$$\ln(s+\sqrt{s^2+1}) = \int_0^s \frac{d\sigma}{(\sigma^2+1)^{1/2}} = \ln(2s) + \int_s^\infty \left[\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+1}} \right] d\sigma. \quad (4.2)$$

Para ver esto, notar que estas dos funciones tienen la misma derivada, y el mismo comportamiento límite cuando $s \rightarrow \infty$ (en el sentido de que el límite de la diferencia es 0). También notamos que la última integral es convergente porque los dos términos del integrando se comportan como $1/\sigma$ para σ grande, y su diferencia cae lo suficientemente rápido como para garantizar la convergencia.

Usando la última expresión en (4.2), uno puede simplemente hacer una expansión binomial del término $(\sigma^2+1)^{-1/2}$ (asumiendo que $1 < s < \sigma$) e integrar término a término para obtener

$$\ln(s+\sqrt{s^2+1}) = \ln(2s) - \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \frac{1}{2k} \frac{1}{s^{2k}} = \ln(2s) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}k} \binom{2k}{k} \frac{1}{s^{2k}}. \quad (4.3)$$

Puesto que

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = (s^2+1)^{-1/2} = \frac{1}{s} \left(1 + \frac{1}{s^2} \right)^{-1/2} \quad (4.4)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \frac{1}{s^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \frac{1}{s^{2k+1}}, \quad (4.5)$$

la expresión completa que buscamos se calcula como

$$-\frac{\pi}{2}\mathcal{L}\{Y_0(t)\} = \frac{\ln(s+\sqrt{s^2+1})}{\sqrt{s^2+1}} \quad (4.6)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \frac{\ln(2s)}{s^{2k+1}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \left[\sum_{m=1}^k \frac{1}{2m} \binom{2m}{m} \binom{2k-2m}{k-m} \right] \frac{1}{s^{2k+1}}. \quad (4.7)$$



Por otro lado, de (3.11) se tiene

$$-\frac{\pi}{2}\mathcal{L}\{Y_0(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k}(k!)^2 s^{2k+1}} [\ln(2s) - (H_{2k} - H_k)] \quad (4.8)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)}{2^{2k} \binom{2k}{k}} \frac{1}{s^{2k+1}} [\ln(2s) - (H_{2k} - H_k)], \quad (4.9)$$

y la comparación de estas expresiones nos convence de que para n entero positivo,

$$\binom{2n}{n} (H_{2n} - H_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}, \quad (4.10)$$

que también se puede escribir como

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n}{k}^2}{2k \binom{2n}{2k}}, \quad (4.11)$$

o también como

$$\binom{-1/2}{n} (H_{2n} - H_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \binom{-1/2}{k} \binom{-1/2}{n-k}. \quad (4.12)$$

Esta es una identidad binomial interesante, que bien podría ser difícil de establecer por otros medios (¿quizás al lector le gustaría intentarlo?). Que (4.10) y (4.12) son equivalentes se sigue del hecho que

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{(-1)^k (2k)}{2^{2k} \binom{2k}{k}}, \quad (4.13)$$

mientras que (4.11) se sigue de (4.10) al recombinar los factoriales que aparecen en el coeficiente binomial $\binom{2k}{k}$, etc., de manera alternativa.

Además de eso, notamos que

$$H_{2n} - H_n = \sum_{m=n+1}^{2n} \frac{1}{m} = \sum_{m=1}^{2n} \frac{(-1)^{m-1}}{m}, \quad (4.14)$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (H_{2n} - H_n) = \ln 2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m}, \quad (4.15)$$

implican la siguiente representación:

$$\ln 2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n}{k}^2}{2k \binom{2n}{2k}}, \quad (4.16)$$

que es otro hecho que podría ser difícil de establecer de manera directa. Por supuesto esta fórmula no es particularmente útil para computar $\ln 2$, pues la convergencia de esta expresión a $\ln 2$ es precisamente la de las sumas parciales pares de la serie armónica alternante (ver ecuación (4.14)), que es relativamente lenta.

Comentario. Finalmente, mencionamos otra ruta posible para llegar a estas expansiones en serie (ver, en particular, las ecuaciones (4.5) y (4.9); estamos hablando pues de las expresiones más simples para las expansiones en potencias de $1/s$), al menos hasta la cuestión de qué combinación lineal elegir, es usar el método de Frobenius en la ecuación diferencial de segundo orden (2.16). Para esto es importante transformar



el punto singular $s = \infty$ a 0, para lo cual uno hace el cambio de variable $u = 1/s$, obteniendo la ecuación diferencial (con u como variable independiente, e $\tilde{Y}(u)$ como nueva variable dependiente)

$$u^2(1 + u^2)\tilde{Y}'' - u(1 - 2u)\tilde{Y}' + \tilde{Y} = 0. \quad (4.17)$$

El análisis de esta ecuación por el método de Frobenius es directo, aunque algo largo. Baste decir aquí que la ecuación indicial tiene 1 como raíz repetida, de modo que no es sorpresa que $\ln s$ aparezca en la respuesta (de hecho, es necesario que aparezca en al menos una de las dos soluciones independientes). El punto principal aquí es que la teoría de Frobenius nos da una manera de calcular explícitamente los coeficientes para todo k de las expansiones (4.5) y (4.9) de forma clara y sistemática. Existen en realidad dos maneras (distintas en los detalles) de implementar este método: una es diferenciar con respecto a la raíz de la ecuación indicial (que uno mantiene arbitraria al principio del proceso), mientras que la otra es usar la forma general de la solución (como expansión en serie) y derivar ecuaciones de diferencias para los coeficientes, que luego se pueden resolver de manera relativamente directa. Invitamos al lector interesado a trabajar estos métodos en detalle, o a consultar las referencias apropiadas.

5. Comentarios finales

En este artículo nos concentramos en mostrar que el método de la transformada de Laplace para lidiar con la ecuación de Bessel es suficiente, con los cuidados adecuados, para derivar las transformadas de Laplace de $J_0(t)$ e $Y_0(t)$ en forma cerrada. Pareciera ser esta una observación nueva, que al menos ha sido pasada por alto por todo autor que ha escrito un libro de texto en que se discuta la aplicación de la transformada de Laplace a ecuaciones diferenciales y que contenga un tratamiento de $\mathcal{L}\{J_0(t)\}$. En un artículo futuro esperamos atacar el problema más general de tratar la ecuación de Bessel de orden p por medios similares. También esperamos poder dar una discusión detallada de las transformadas de Laplace de todas las funciones J e Y de Bessel, siempre que existan, y similarmente para los productos de potencias de t con $J_p(t)$ e $Y_p(t)$.

Derivar $\mathcal{L}\{Y_0(t)\}$ mediante uno o más de los métodos tratados aquí podría funcionar como un problema o proyecto estimulante para estudiantes de un curso elemental de ecuaciones diferenciales, o para estudiantes de un curso de métodos matemáticos de la física. O también, siguiendo la derivación usual de los libros de texto de $\mathcal{L}\{J_0(t)\}$, los autores podrían comenzar a notar los problemas de lidiar con Y_0 en paralelo a J_0 y cómo estos se pueden resolver. La situación actual, en que la mayoría de los autores parecieran querer evitar esta discusión, nos parece algo obtusa y de poca ayuda para los intereses de la búsqueda del conocimiento, una búsqueda que deseáramos que todo autor quisiera imprimir en sus lectores.

De los libros que estudian la transformada de Laplace de $J_0(t)$, aquellos que contienen los comentarios más interesantes o útiles incluyen Butkov [9], Carrier, Krook, y Pearson [10], y Churchill [11]. Además, los únicos libros que conocemos en que se hagan comentarios acerca de lo que sucede con la “segunda solución” en situaciones como esta, o qué se puede hacer para recuperarla, son [2], [7], y [9] (y todos ellos dicen básicamente que no es posible, i.e., que un procedimiento similar no se puede llevar a cabo para Y_0 , por el hecho de que esta segunda solución es “demasiado singular”).

También Boccara (véase [6], Ejemplo 6, pp. 100-101) tiene una discusión de la ecuación diferencial que satisfacen las funciones de Bessel esféricas de orden 0 (sin mencionar esta conexión) y observa que, aunque es capaz de capturar la transformada de Laplace de múltiplos de $j_0(r)$, el método no permite obtener la transformada de Laplace de $y_0(r)$ (ni de ninguna solución que contenga contribuciones de y_0), debido a que y_0 es demasiado singular en $r = 0$ para tener transformada de Laplace. Puesto que esto concierne a la ecuación diferencial que satisfacen las funciones de Bessel esféricas de orden 0, e y_0 se comporta como r^{-1} para r cerca de 0, esta afirmación es perfectamente correcta, en oposición a lo que ocurre con la ecuación de Bessel de orden 0. (Aquí hemos usado la notación usual para las funciones esféricas de Bessel, con letras minúsculas j 's e y 's (véase, por ejemplo, Abramowitz y Stegun [1], p. 437). También notamos que las raíces indiciales de la ecuación de orden ℓ son ℓ y $-(\ell + 1)$, lo que explica la singularidad de y_0 para r pequeño. Las funciones de



Bessel esféricas de orden 0 son, por supuesto, muy cercanas a las funciones de Bessel de orden $1/2$.)

Para un indicio de algunas de las trampas en que uno puede caer al intentar aplicar el método de la transformada de Laplace de manera indiscriminada a las ecuaciones diferenciales estándar de la física matemática, sugerimos al lector considerar el Prob. 36, p. 322, de [7]. Dejamos como desafío al lector entender por qué este problema no es ni tan simple ni tan directo como su presentación sugiere.

Finalmente, cabe mencionar que la expresión explícita para $\mathcal{L}\{Y_0(t)\}$ se conoce desde hace mucho tiempo, y se puede encontrar en un número de tablas estándar de transformadas de Laplace. En particular, la fórmula (2.15) aparece en [11] (ver p. 187, fórmula (44)), [16] (ver la primera fórmula en la p. 447), y [17] (ver p. 58, fórmula 20). Es bastante sorprendente que no aparezca en [1].

Referencias

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, editors, **Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables**, U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, vol. 55, Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington D.C., 1964.
- [2] L. C. Andrews, **Ordinary Differential Equations with Applications**, Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois, 1982.
- [3] L. C. Andrews, **Elementary Partial Differential Equations**, Academic Press, Orlando, Florida, 1986.
- [4] G. B. Arfken, **Mathematical Methods for Physicists**, 2nd edition, Academic Press, San Diego, 1970.
- [5] G. B. Arfken and H. J. Weber, **Mathematical Methods for Physicists**, 4th edition, Academic Press, San Diego, 1995.
- [6] N. Boccara, **Functional Analysis: An Introduction for Physicists**, Academic Press, Boston, 1990.
- [7] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**, 9th ed., Wiley, 2009.
- [8] L. Brand, **Differential and Difference Equations**, Wiley, New York, 1966.
- [9] E. Butkov, **Mathematical Physics**, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1968.
- [10] G. F. Carrier, M. Krook, and C. E. Pearson, **Functions of a Complex Variable: Theory and Technique**, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [11] R. V. Churchill, **Modern Operational Mathematics in Engineering**, McGraw-Hill, New York, 1944.
- [12] C. H. Edwards and D. E. Penney, **Differential Equations and Boundary Value Problems**, 2nd edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2000.
- [13] A. Erdélyi, editor, **Tables of Integral Transforms, vol. I**, Bateman Manuscript Project, McGraw-Hill, New York, 1954.
- [14] R. L. Finney and D. R. Ostberg, **Elementary Differential Equations with Linear Algebra**, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1976.
- [15] E. A. Kraut, **Fundamentals of Mathematical Physics**, McGraw-Hill, New York, 1967.
- [16] D. L. Kreider, R. G. Kuller, and D. R. Ostberg, **Elementary Differential Equations**, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1968.



- [17] D. L. Kreider, R. G. Kuller, D. R. Ostberg, and F. W. Perkins, **An Introduction to Linear Analysis**, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1966.
- [18] W. Magnus, F. Oberhettinger, and R. P. Soni, **Formulas and Theorems for the Functions of Mathematical Physics**, 3rd enlarged ed., Springer-Verlag, 1966.
- [19] G. E. Roberts and H. Kaufman, **Table of Laplace Transforms**, W. B. Saunders Company, Philadelphia, 1966.
- [20] M. R. Spiegel, **Theory and Problems of Laplace Transforms**, Schaum's Outline Series, Schaum Publishing Co., New York, 1965.
- [21] G. F. Simmons, **Differential Equations, with Applications and Historical Notes**, McGraw-Hill, New York, 1972.
- [22] M. T. Vaughn, **Introduction to Mathematical Physics**, Wiley-VCH, 2007.
- [23] C. R. Wylie, **Advanced Engineering Mathematics**, 4th ed., McGraw-Hill, New York, 1975.



Acerca del interior de un polígono

Mario Ponce

P. Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile

Resumen

En esta nota proponemos una demostración elemental del Teorema de la curva de Jordan para polígonos, justificando así la existencia del interior de un polígono.

Un *polígono cerrado simple* es un camino continuo $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ verificando

i) Cerrado. $\gamma(0) = \gamma(1)$.

ii) Simple. Si $\gamma(x) = \gamma(y)$ entonces $x = y$ o bien $\{x, y\} = \{0, 1\}$.

Esta segunda propiedad debe entenderse como que el camino γ no se corta a sí mismo, salvo al momento de cerrarse. Una curva verificando (i) y (ii) es llamada una *curva de Jordan*. Un polígono cerrado simple es entonces una curva de Jordan que verifica una propiedad adicional

iii) Poligonal. Existe una partición $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$ del intervalo $[0, 1]$ de manera tal que la restricción de γ a cualquier subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ es una función afín.

En otras palabras, γ es una concatenación continua y cerrada de una cantidad finita de segmentos de recta que no se cortan.

A los segmentos $\gamma|_{[x_j, x_{j+1}]}$ se les llama *lados del polígono* y a los puntos $\gamma(x_j)$ se les llama *vértices del polígono*. Por conveniencia asumiremos que la partición x_0, \dots, x_n es minimal en el sentido que en cada vértice existe efectivamente una discontinuidad en la dirección de la función afín (un quiebre). De esta manera el número de vértices (y de lados) es una cantidad bien definida (igual a n). En lo que sigue, denotaremos los vértices por $v_j = \gamma(x_j)$ y escribiremos polígono en lugar de polígono cerrado simple.

En general, los polígonos son los primeros objetos geométricos a los que se ve expuesto un estudiante. Muchos conceptos geométricos se encuentran ya en los polígonos: ángulos, perímetro, área, etc. Se puede ir aún más lejos y plantear resultados generales acerca de los polígono tales como:

Proposición 1.

1. La suma de los ángulos exteriores de un polígono es 360 grados.
2. La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $180(n - 2)$ grados.

Otro resultado más complejo, pero ampliamente aceptado es

Proposición 2. Todo polígono puede subdividirse, por medio de diagonales interiores, en un número finito de triángulos.

La proposición anterior es la clave para la demostración de resultados mucho más sofisticados como *Teorema 3* (de equidescomposición de Bolyai-Gerwie, ver [2]). Dados dos polígonos de igual área, es posible cortar uno de ellos a través de cortes rectos de manera tal que con las piezas así obtenidas se pueda formar (sin sobras ni traslapes) el otro polígono.

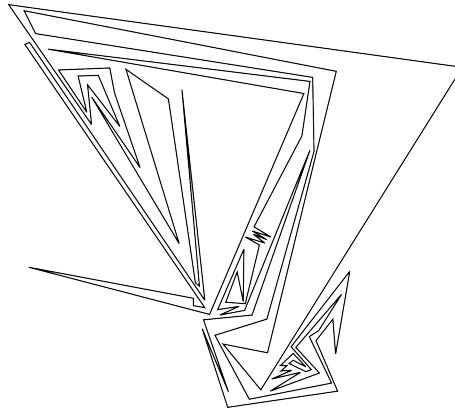


Figura 1: Polígono complicado

Teorema 4 (de Pick, ver [1]). Considere un polígono γ trazado sobre el plano \mathbb{R}^2 , en donde se han marcado los puntos con coordenadas enteras \mathbb{Z}^2 . Si todos los vértices de γ tienen coordenadas enteras, entonces el área de γ viene dada por la fórmula

$$A(\gamma) = I + \frac{B}{2} - 1,$$

en donde I es el número de puntos con coordenadas enteras en el interior de γ y B es el número de puntos con coordenadas enteras en γ (en el borde de γ).

El objetivo de esta nota no es demostrar estos resultados, si no que llamar la atención en que éstos, así como muchos otros, presuponen la existencia de dos objetos fundamentales acerca de los polígonos: el interior de un polígono y una diagonal interior. La existencia de estos objetos es intuitiva, sin embargo, una demostración rigurosa requiere de argumentos no triviales, y merece por lo tanto la dedicación de este trabajo. El interior de un polígono es aquella región delimitada por el polígono. Definida de una manera más precisa, una *región* Ω es un sub-conjunto abierto del plano \mathbb{R}^2 , que es *conexo*, esto es, dado cualquier par de puntos $x, y \in \Omega$ existe un camino continuo η enteramente contenido en Ω , que une x con y . El siguiente es el teorema que nos asegura la existencia de la región interior:

Teorema 5 (de la curva de Jordan, ver [3]). Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan. El complemento $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ es exactamente la unión de dos regiones Ω_I, Ω_E , de manera que Ω_I es acotada y simplemente conexa, mientras que Ω_E es no acotada.

Se dice que una región es *simplemente conexa* cuando no tiene "hoyos". La región Ω_I es llamada la *región interior* delimitada por la curva Γ y Ω_E la *región exterior* a la curva Γ . Como un polígono es en particular una curva de Jordan, este teorema nos permite definir las regiones interior y exterior al polígono. Sin embargo, las demostraciones clásicas del Teorema de la curva de Jordan hacen uso de herramientas complejas de topología del plano. En esta nota presentaremos una demostración elemental para una versión particular del teorema

Teorema 6 (de la curva de Jordan para polígonos). Sea $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ un polígono. El complemento $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ es exactamente la unión de dos regiones Ω_I, Ω_E , de manera que Ω_I es acotada y simplemente conexa, mientras que Ω_E es no acotada.

Antes de pasar a la demostración del teorema, intentemos convencernos de la real necesidad de presentar una prueba para este, aparentemente, evidente hecho. Primero, la figura 1 muestra un polígono complicado, en el que, al menos para el autor, la existencia de una única región interior no es del todo evidente.

Por otra parte, debemos notar que este teorema es una propiedad del plano \mathbb{R}^2 . Efectivamente, si consideramos un polígono como el de la figura 2, dibujado esta vez sobre un cilindro, notamos que aparecen dos regiones, pero que no gozan de las propiedades de sus contrapartes del plano \mathbb{R}^2 . Otro ejemplo muy interesante

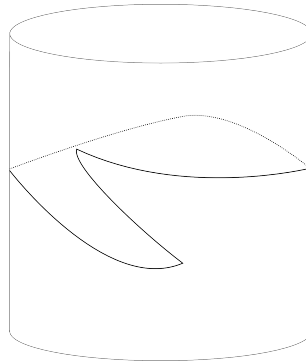


Figura 2: Polígono sobre un cilindro

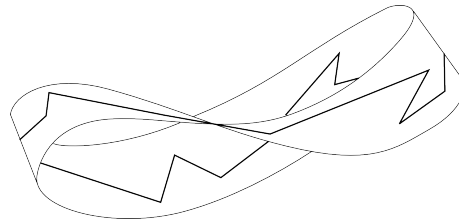


Figura 3: Polígono sobre una banda de Möbius

ocurre con el polígono de la figura 3. En este caso el polígono está dibujado sobre una banda de Möbius, y el complemento del polígono está constituido por exactamente una región.

El segundo concepto que trataremos es la existencia de una diagonal interior al polígono. Dos vértices consecutivos v_j, v_{j+1} definen un segmento $\overline{v_j v_{j+1}}$, llamado *diagonal* del polígono γ . Una tal diagonal es llamada *diagonal interior* cuando, salvo por sus extremos, está enteramente contenida en la región interior Ω_I al polígono. La demostración de varios de los resultados arriba citados hacen uso de argumentos inductivos sobre el número de vértices del polígono. La existencia de una diagonal interior permite cortar el polígono a lo largo de ella y obtener así dos nuevos polígonos con un número menor de vértices, a los cuales se les pueden aplicar hipótesis inductivas. Desarrollemos a continuación una prueba clásica de la Proposición 2.

- Para $n = 3$ el resultado es evidente.
- Supongamos que el resultado se tiene para todo polígono con $n \leq k$ vértices.
- Sea γ un polígono con $n = k + 1$ vértices. Cortando el polígono γ a lo largo de una diagonal interior obtenemos dos polígonos γ_1, γ_2 con n_1, n_2 vértices respectivamente, verificando $n_1 + n_2 = k + 3$. Se deduce que $n_1 \leq k, n_2 \leq k$ y se puede aplicar la hipótesis de inducción a los polígonos γ_1, γ_2 . Las particiones en triángulos de los polígonos γ_1, γ_2 inducen una partición del polígono total γ . \square

Volvamos a la existencia de una diagonal interior

Proposición 7. Todo polígono con al menos 4 vértices posee al menos una diagonal interior.

Demostración. Sean v_{n-1}, v_0, v_1 tres vértices consecutivos y tales que el ángulo interior $\angle v_{n-1} v_0 v_1 < 180$. Si la diagonal $\overline{v_{n-1} v_1}$ es interior, entonces el resultado está probado. Asumamos que éste no es el caso. Deben entonces existir vértices en el interior del triángulo $v_{n-1} v_0 v_1$ (pues el segmento $\overline{v_{n-1} v_1}$ debe ser cortado por lados del polígono, que no pueden salir de dicho triángulo una vez que entran en él). Sea v_j el vértice dentro del triángulo $v_{n-1} v_0 v_1$ y que está más alejado del segmento $\overline{v_{n-1} v_1}$ de entre todos los vértices en el interior del triángulo. No es difícil darse cuenta que la diagonal $\overline{v_0 v_j}$ es una diagonal interior. \square

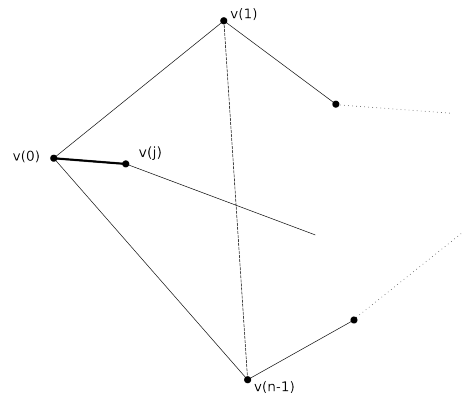


Figura 4: Existencia de una diagonal interior

Demostración del Teorema 6. La idea es demostrar la existencia de las regiones interior y exterior al polígono. Para ello comenzaremos por determinar qué puntos son candidatos a pertenecer a estas regiones y luego demostraremos que efectivamente nuestros candidatos son exactamente aquellos puntos que constituyen estas regiones. Para definir a nuestros candidatos, asumamos por un instante que el resultado es cierto, es decir, que existen las regiones interior y exterior al polígono: >qué propiedades debe verificar un punto interior al polígono? Una respuesta interesante es que el punto debería poder moverse hacia el exterior del polígono. Supongamos que el punto $a \in \mathbb{R}^2$ es un punto interior. Tomemos una semirecta partiendo desde a y que no pasa por ningún vértice del polígono. Movamos ahora el punto a a lo largo de la semirecta en dirección al infinito. A medida que se mueve, el punto va cortando al polígono, y luego de un rato, el punto se encuentra lejos del polígono, y definitivamente en la región exterior. Cada vez que el punto cortaba al polígono, pasaba de una región a la otra. Como el recorrido partió en el interior y acabó en el exterior, la semirecta debió cortar al polígono un número impar de veces. De manera análoga, si hacemos el mismo ejercicio, empezando esta vez desde un punto exterior, la semirecta cortará al polígono un número par de veces.

Esta construcción nos sugiere una manera de definir candidatos naturales para los puntos en las regiones interior y exterior. Pasemos ahora a la definición de ellos. Sea a un punto en $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$. Decimos que una semirecta T que parte en a está en *posición general* si T no pasa por ningún vértice de γ . Como γ tiene un número finito de vértices, casi todas las semirectas que parten en a están en posición general. Definimos el número $C_a(T)$ como la cantidad de veces que la semirecta T corta al polígono γ . Nos interesará la paridad del número $C_a(T)$.

Lema 8. Sean T, U dos semirectas en posición general partiendo desde el punto a . La paridad de los números $C_a(T)$ y $C_a(U)$ es la misma.

Demostración. Las dos semirectas T, U separan al plano en dos regiones R_1, R_2 . Tomemos un vértice $v_0 \in R_1$ y recorramos el polígono partiendo desde v_0 . Al completar una vuelta del recorrido habremos pasado de la región R_1 a la R_2 y de la R_2 a la R_1 varias veces. Estos cambios de región ocurren exactamente en aquellos puntos en donde alguna de las semirectas T, U corta al polígono. Como el recorrido comienza y acaba en la región R_1 , la cantidad de cambios de región debe ser par, luego la suma $C_a(T) + C_a(U)$ es un número par. \square

Este lema nos permite asociarle una *paridad* a los puntos del complemento $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$: decimos que un punto $a \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ es *par* si $C_a(T)$ es un número par, y decimos que es *impar* si $C_a(T)$ es impar, esto para cualquier semirecta T en posición general que parte desde a .

Lema 9. Si un segmento \overline{ab} está enteramente contenido en el complemento $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ entonces todos los puntos del segmento tienen la misma paridad. En particular los extremos a, b tienen la misma paridad.

Demostración. Consideremos la semirecta T que parte en a y que contiene al segmento \overline{ab} . Si esta semirecta está en posición general, entonces puede ser usada para calcular la paridad de a así como de todos los puntos

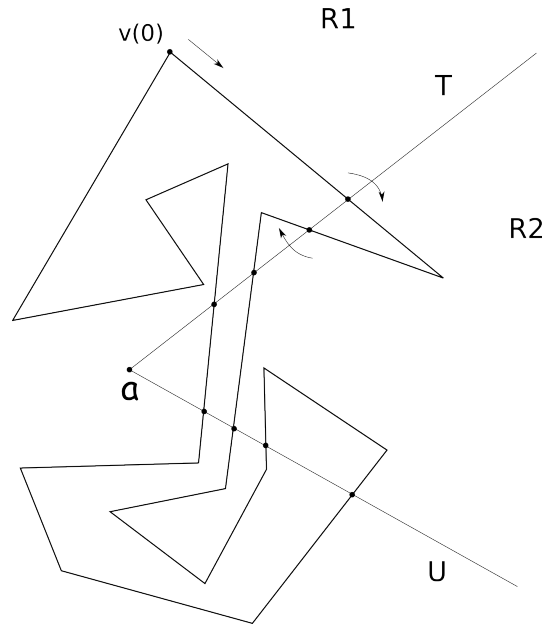


Figura 5: La paridad de un punto está bien definida

del segmento. Como el segmento no corta al polígono, el número de cortes (luego la paridad) es el mismo para todos los puntos del segmento. Si la semirecta T no está en posición general, podemos escoger un punto c muy cercano al punto medio del segmento \overline{ab} y de manera que los segmentos \overline{ac} , \overline{cb} no cortan al polígono y las semirectas que los contienen y parten de a y c respectivamente están en posición general (esto es posible pues γ tiene un número finito de vértices). Aplicando el razonamiento anterior, podemos deducir que las paridades de todos los puntos del segmento \overline{ac} son la misma y las de los puntos en \overline{cb} también. Como el punto c es común a ambos segmentos se deduce que las paridades de a y b son iguales. El mismo razonamiento se puede aplicar para otro punto del segmento \overline{ab} y el punto a . \square

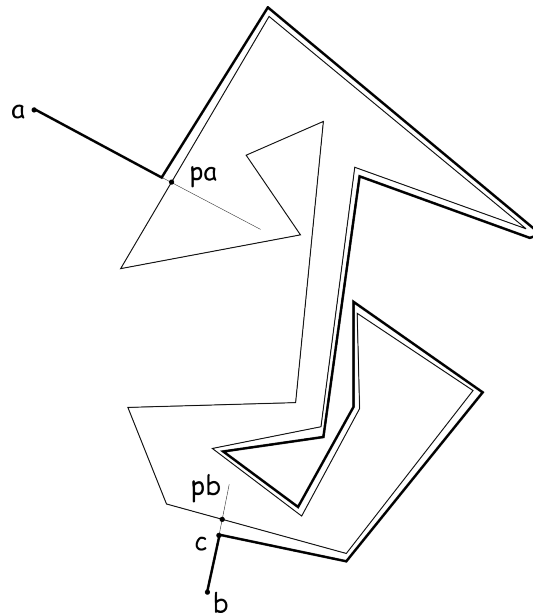
Definimos ahora nuestros candidatos a regiones interior y exterior:

$$\begin{aligned}\Omega_I &= \{a \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma \mid a \text{ es impar} \}, \\ \Omega_E &= \{a \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma \mid a \text{ es par} \}.\end{aligned}$$

Proposición 10.

1. $\Omega_I \cup \Omega_E = \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$.
2. Ω_I y Ω_E son conjuntos abiertos.
3. Ω_I es un conjunto acotado y no vacío. Ω_E es un conjunto no acotado.

Demostración. La parte 1. es evidente de la definición de paridad. La parte 2. se deduce rápidamente con la ayuda del Lema 9. Tomemos un punto $a \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ y una pequeña bola B centrada en a y contenida en $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$. Cualquier punto de B puede ser unido con a por medio de un segmento contenido en B . Aplicando el Lema 9 concluimos que todos los puntos de B tienen la misma paridad que su centro. Para mostrar la parte 3. consideremos una gran bola que contenga a γ en su interior. Es claro que todos los puntos exteriores a la bola son pares y que los puntos impares están confinados al interior de la bola. Para mostrar que Ω_I es no vacío, basta con tomar un punto par a y una semirecta en posición general T que parta desde este punto y corte al polígono. Luego del primer corte de T con γ hay puntos en T que no están en γ y que realizan un corte menos que a ,

Figura 6: Construcción del camino η

luego son puntos impares. \square

Lo único que nos falta por probar para completar la demostración del Teorema de la curva de Jordan para polígonos es que las regiones Ω_I, Ω_E son conexas. Los siguientes lemas nos serán de utilidad

Lema 11. Sea η un camino poligonal que está completamente contenido en $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$. Todos los puntos de η tienen la misma paridad.

Demostración. Por el Lema 9, en cada segmento que forma al camino η , la paridad de los puntos es la misma. Como los segmentos están concatenados, dos segmentos consecutivos tienen la misma paridad, y así, todos los puntos del camino η tienen la misma paridad. \square

Lema 12. Sean $a, b \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$. Existe un camino poligonal η que une a con b y que corta al polígono γ en 0 ó 1 punto.

Demostración. Sean T, U dos semirectas en posición general partiendo desde a y b respectivamente y que cortan al polígono. Sea p_a el primer punto (desde a) en la intersección $T \cap \gamma$ y sea p_b el primer punto (desde b) en la intersección $U \cap \gamma$. El camino η se define de la siguiente manera: parte en a y sigue por T hasta detenerse muy próximo (pero antes) de p_a . Continúa acompañando al polígono de manera poligonal y paralela a éste (tan cerca como sea necesario para no cortar al polígono γ), hasta que se encuentra con la semirecta U en un punto c , de manera que entre b y c aparece a los más un punto (necesariamente p_b) de la intersección entre U y γ . Completamos η uniendo c con b usando el segmento sobre U . Es claro que si c está antes de p_b (sobre U), entonces η no corta a γ . Si no es el caso, η corta en exactamente un punto (p_b) a γ . \square

La demostración del teorema se termina con

Proposición 13. Las regiones Ω_I, Ω_E son conexas. Además, Ω_I es simplemente conexa.

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ con la misma paridad. Sea η el camino poligonal que une a con b dado por el lema anterior. Sea c el punto definido en la demostración del lema anterior. Usando el Lema 11 deducimos que a y c tienen la misma paridad. Si η cortase a γ (en un único punto necesariamente), las paridades de c y b serían diferentes, luego η no corta al polígono. Como Ω_E es una región conexa y no acotada, Ω_I no puede



tener “hoyos”, los que forzosamente serían puntos en Ω_E que estarían desconectados de los puntos cercanos al infinito. \square

Ejercicio. Encuentre la razón por la cual la demostración precedente no es correcta en los casos de un polígono sobre un cilindro y sobre la banda de Möbius.

Referencias

- [1] M. AIGNER & G. ZIEGLER. Proofs from THE BOOK. Springer (2010).
- [2] V. G. BOLTIANSKII. Hilbert’s Third Problem. V. H. Winston & Son (Washington DC 1978).
- [3] J. DIEUDONNÉ. Foundations of Modern Analysis, Pure and Applied Mathematics, vol. X, Academic Press (1960).



Problemas de obstáculos y curvas convexas[†]

Benjamín Loewe

P. Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile

[†] Este artículo presenta la solución al problema propuesto para el Concurso al Talento Matemático Joven 2010 del Colegio de Ingenieros de Chile. En esa ocasión, el autor obtuvo mención honrosa por su solución.

Enunciado del problema

- Considere un círculo y dos puntos A y B exteriores al círculo, ubicados sobre la extensión de un diámetro. Determine un camino que una A con B , que no pase por el interior del círculo y cuya longitud sea la menor entre todos los caminos que unen A con B y que no pasan por el interior del círculo.
- Considere ahora una elipse y dos puntos A y B exteriores a la elipse y ubicados sobre la extensión del semi-eje mayor de la elipse. Determine un camino que una A con B , que no pase por el interior de la elipse y cuya longitud sea la menor entre todos los caminos que unen A con B y que no pasan por el interior de la elipse.
- Proponga y resuelva extensiones de estos problemas.

La solución de este problema, en todas sus variantes, estará basada en el siguiente teorema básico:

Teorema I: *En un espacio euclídeo, la curva más corta entre dos puntos es la línea recta que los une.*

(a) Circunferencia

Consideremos primero el caso de la circunferencia. El problema se ilustra en la siguiente imagen.

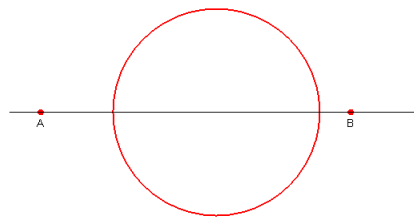


Figura 1: Diagrama del Problema

Para simplificar, elegimos nuestro sistema coordenado de manera tal que el eje X sea la prolongación del radio en la cual se encuentran los puntos A y B , los cuales consideraremos independientes uno del otro. Es decir, podrán ubicarse a diferentes distancias del centro de la circunferencia. Como vemos hay una simetría de reflexión en torno a este eje X por lo tanto, podemos enfocarnos, sin pérdida de generalidad, ya sea en la mitad superior o en la mitad inferior de la circunferencia. Nosotros escogeremos la mitad superior.

Ahora, debido a la simetría antes expuesta, la reflexión de la solución respecto al eje X también es solución. Por lo tanto nuestro problema no tiene solución única.



Ocuparemos la siguiente notación:

1. $\triangle ABC$ denota un triángulo con vértices A , B y C .
2. $\tilde{\triangle} ABC$ denota un triángulo con vértices A , B y C , cuya base es un arco curvo (no recto) comprendido entre los vértices A y C .
3. $\frown AB$ denota un arco que une los puntos A y B .
4. $\overline{\frown AB}$ denota la longitud del arco $\frown AB$.
5. $ABC\dots D$ denota una curva poligonal: rectas que unen los puntos A , B , C , \dots , D en ese orden. Notemos entonces, que un segmento de recta que une dos puntos A y B se escribe AB .
6. $\overline{ABC\dots D}$ es la longitud de la curva poligonal $ABC\dots D$.

Queremos encontrar la curva con menor largo que una los puntos A y B y que no atraviese el interior de la circunferencia. Con este propósito, tracemos primero las rectas tangentes desde A y B a la circunferencia (sean E y F los respectivos puntos de tangencia) y la línea vertical que pasa por el punto de intersección de estas, C , tal cual se ilustra en la siguiente figura:

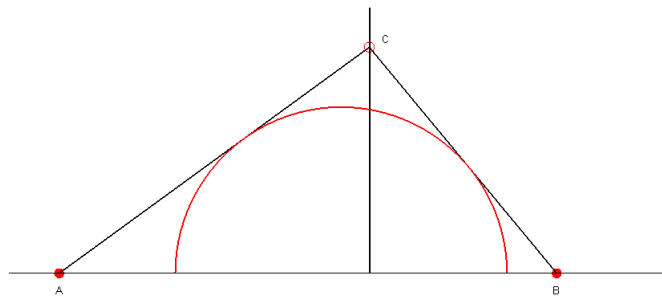


Figura 2: Círculo con las rectas tangentes y vertical

Toda curva que no pase por el interior del círculo debe estar sobre éste. Por el teorema I, la longitud de toda curva que parta de A (o desde B), que esté bajo la recta tangente AE (o FB) y finalice en E (o F), sin cortar la circunferencia en dos, es mayor que el segmento de recta AE (o FB). Luego, todas las curvas candidatas deben estar por sobre estas rectas, al menos en los tramos comprendidas desde el punto de origen hasta el respectivo punto de tangencia con la circunferencia. Ahora, la curva la podemos segmentar en dos tramos: el primero es el que va desde el punto A hasta la recta vertical que pasa por el punto C , y el segundo es el que va desde la recta vertical hasta el punto B . Llamemos D al punto de intersección entre la curva y la recta de marras. Utilizando el teorema I, tenemos entonces que el largo de esta curva está acotada por la longitud de los segmentos de rectas AD y BD . Luego, la curva la reducimos a dichas rectas, tal cual como se ve en la figura 3.

Por ahora, supongamos que el punto D está por sobre el punto C . Llamemos O al punto de intersección de la recta vertical con el eje X . Como vemos, se han formado 4 triángulos rectángulos: $\triangle AOD$, $\triangle AOC$, $\triangle BOD$ y $\triangle BOC$. Considerando lo anterior y utilizando el teorema de Pitágoras, resulta obvio que $\overline{AD} \geq \overline{AC}$ y $\overline{BD} \geq \overline{BC}$.

De aquí se deduce que cualquier curva cuyo punto de intersección con la línea vertical esté por sobre el punto C , tendrá un largo mayor que el trayecto ACB , y por ende, están descartados como posibles soluciones.

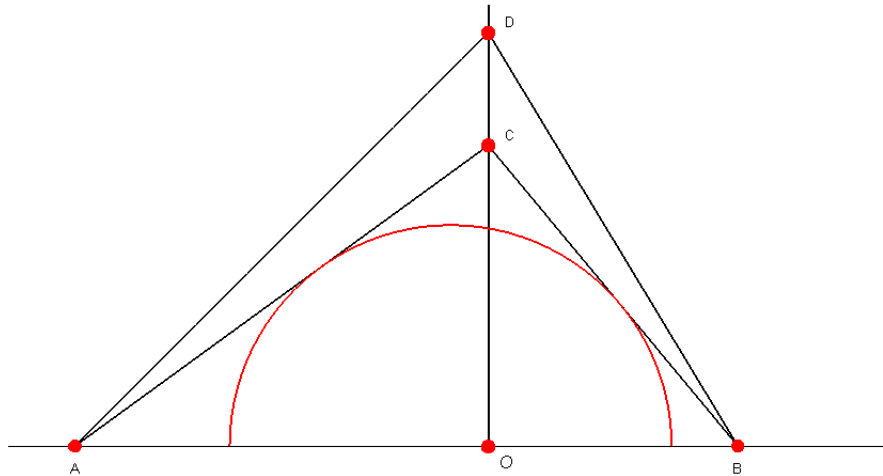


Figura 3: Reducción en rectas

Por lo tanto D debe estar por debajo de C . Esto significaría que la curva debe pasar por la envolvente que forman las rectas tangentes y el arco de circunferencia. Sean E y F los puntos de tangencia de la circunferencia con las rectas AC y BC . Es claro que si D es menor que C , no podemos tomar AD junto a DB como una posible solución, pues estas rectas tendrían, en módulo, pendientes menores que las rectas AC y BC (las rectas tangentes a la circunferencia), respectivamente, y por lo tanto pasarían por el interior de la circunferencia. Luego, la curva minimizante deberá tener los tramos AE y FB . Otra forma de ver esto último es trazar las rectas verticales que pasen por los puntos E y F , considerar los puntos de intersección, E' y F' de las curvas con estas rectas. Usando Pitágoras se deduce que la alternativa más corta para ir de A a la recta vertical que pasa E es la recta tangente AE y análogamente para ir de la recta vertical que pasa por F a B es la recta tangente FB . De este modo cortamos la curva óptima en tres tramos: de A a E , de E a F y de F a B .

Finalmente, demostraremos que la ruta más corta que une a E y F , sin entrar a la circunferencia, es el arco de circunferencia, tal cual aparece en la figura 4. De este modo, como en cada uno de los tramos descritos anteriormente tomamos la opción más corta posible, la unión de estas curvas es la curva óptima que buscábamos.

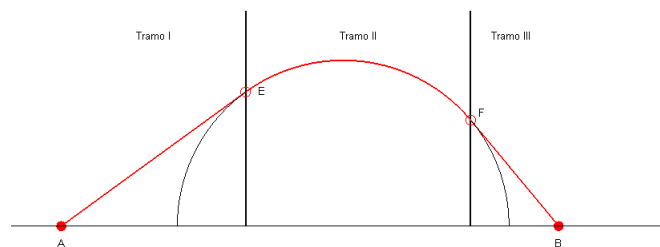


Figura 4: División en tramos

Lo único que nos falta por demostrar entonces, es que en el segundo tramo la mejor opción posible es irse por el arco de la circunferencia. Existen varias formas de demostrar esto, pero todas se basan en lo siguiente: ya vimos que la curva adecuada debe estar dentro de la envolvente (o triángulo con base curva) que forman las líneas tangentes y el arco $\cap EF$. Nuevamente, en vez de considerar curvas cualesquiera, es mejor reducirlas por poligonales, es decir, unión de tramos rectos. Esto pues, gracias al teorema I, el largo de estas curvas polig-



a algún intervalo $[\overline{I}_k, \overline{I}_{k+1}]$, si esto no fuera cierto, querría decir que la longitud de esta poligonal sería una cota superior para el conjunto de las longitudes de estas poligonales así construidas, sin embargo, esta es una sucesión creciente y con un supremo, y por ende su límite es el supremo. Por lo tanto la longitud de la poligonal sería mayor o igual que el supremo, lo cual es una contradicción. Por esto mismo, en lo que concierne al supremo de los conjuntos de poligonales nos podemos restringir a los elementos \overline{I}_k . Por la definición de longitud de arco tenemos entonces que: $\overline{EF} = \sup\{I_k, k \in \mathbb{N}\}$. Más tarde veremos que este supremo efectivamente existe.

Dado que la circunferencia limita un conjunto convexo, todas las poligonales anteriores se encuentran al interior del conjunto, y por ende, debajo del arco de circunferencia. Ahora, en un modo similar, podemos construir una sucesión de poligonales que se encuentre por encima de la circunferencia, que llamaremos S_k . Este procedimiento ya fue mencionado anteriormente y consiste en trazar rectas tangentes en los mismos puntos medios usados para construir los I_k , intersectar estas rectas e ir viajando desde los puntos tangentes al punto de intersección inmediato y después al siguiente punto de intersección. Así, S_1 solo considera las rectas tangentes en E y F y su punto de intersección, mientras que las siguientes, ya incorporan a las recta tangente en G_1 . Gracias a esta construcción, tenemos entonces que S_k pasa por todos los puntos de I_k , pero además agrega los puntos de intersección. Utilizando el teorema I deducimos entonces que $\overline{I}_k < \overline{S}_k$. Además, por lo deducido anteriormente $\overline{S}_k > \overline{S}_{k+1}$ (esto pues, seguimos ocupando las mismas rectas tangentes, pero acortamos trecho entre ellas agregando una nueva recta tangente). Estas poligonales siempre están por sobre el arco, debido a que la circunferencia es una curva convexa, y por lo tanto las líneas tangentes siempre quedan fuera de la curva, excepto en un punto, que es el punto de tangencia. La figura 6 ilustra un poco la construcción de estas sucesiones I_k y S_k .

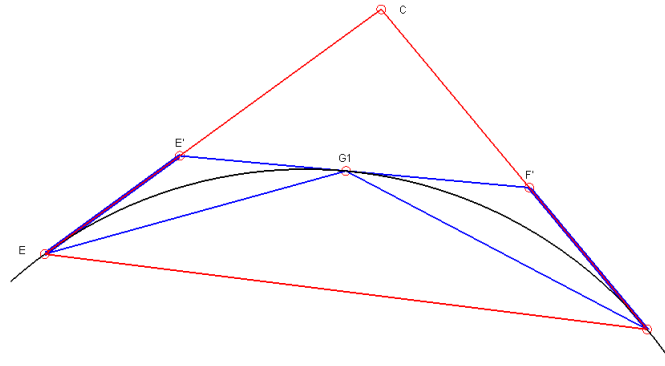


Figura 6: Construcción de sucesiones: En rojo se encuentran S_1 (arriba) e I_1 (abajo), mientras que en azul aparecen S_2 (arriba) e I_2 (abajo)

Una vez que tenemos estas sucesiones, procedemos a demostrar que $\forall(k)$ se cumple $\overline{I}_{k'} < \overline{S}_k, \forall k'$. Esto lo hacemos por contradicción.

Supongamos que existe un k' tal que $\overline{S}_k \leq \overline{I}_{k'}$. Entonces, podemos distinguir 3 casos: $k < k', k = k'$ o $k > k'$.

Si $k < k'$, entonces $\overline{S}_{k'} < \overline{S}_k \leq \overline{I}_{k'}$ y por lo tanto $\overline{S}_{k'} < \overline{I}_{k'}$, lo cual es una contradicción.

Si $k = k'$, tendríamos que $\overline{S}_k \leq \overline{I}_k$, lo que es una contradicción.

Finalmente, si $k > k'$, entonces $\overline{S}_k \leq \overline{I}_{k'} < \overline{I}_k$, y por lo tanto $\overline{S}_k < \overline{I}_k$, que es, nuevamente, contradictorio. Por ende, no existe tal k' . De esto concluimos entonces que todos los \overline{S}_k son mayores que todos los \overline{I}_k , o bien:



$\forall(k, k')$ se cumple $\overline{I_{k'}} < \overline{S_k}$.

Esto último nos muestra que el conjunto de los $\overline{I_k}$ es un conjunto acotado y por lo tanto, por el axioma del supremo, su supremo existe.

Ahora, todos los $\overline{S_k}$ son cotas superiores del conjunto de los $\overline{I_k}$, pero ninguno de estos puede ser su supremo. Dado la poligonal con longitud $\overline{S_k}$, tenemos una poligonal con longitud $\overline{S_{k+1}}$, la cual también es cota superior del conjunto y cumple con $\overline{S_{k+1}} < \overline{S_k}$. Es decir, $\overline{S_k}$ no es la menor cota superior y por ende, no es el supremo. Lo anterior nos dice que todos los $\overline{S_k}$ son mayores que el supremo, o bien $\forall k, \overline{S_k} > \sup\{I_k, k \in \mathbb{N}\} = \overline{EF}$.

Entonces, como ya vimos que la longitud de toda curva atrapada en la envolvente la podíamos acotar por algún $\overline{S_k}$, y todos estos son mayores que \overline{EF} , concluimos entonces que el camino más corto para ir desde E a F , sin cortar la circunferencia en dos, es irse por el arco $\frown EF$.

Notemos que en la demostración anterior, sólo se ocupó la convexidad de la circunferencia. Por lo tanto, esta demostración también es válida para cualquier otra posible curva convexa, incluyendo a la elipse.

Como último comentario respecto a esta forma de definir la longitud de la curva, notemos que es muy similar a lo que son las sumas de Riemann. En estas sumas, no importa la partición del intervalo que uno escoja ni tampoco el punto de la partición que uno escoja, siempre el límite es el mismo y tenemos una suma superior y una inferior. Entonces, en vez de utilizar las poligonales I_k para definir la longitud, podríamos haber ocupado las poligonales S_k , y definir el largo como el ínfimo del conjunto de los S_k . Análogamente, los $\overline{I_k}$ serían una suma inferior y los S_k la suma superior.

(b) Elipse

Cuando consideramos el caso de la elipse, tenemos algo muy similar al caso del círculo, pues seguimos teniendo la simetría respecto al eje X . De hecho, el análisis por tramos hecho para el círculo es igual válido para este caso (así como para cualquier curva convexa), y por lo tanto, no será repetido acá. El problema sigue traducéndose a encontrar la curva que va desde E a F dentro de la envolvente, pero reemplazando el arco de circunferencia por un arco de elipse. Este problema también ya fue considerado con la última demostración para el círculo, sección A.2, por lo que rápidamente vemos que la forma más corta de ir desde E a F , es a través del arco de elipse $\frown EF$.

Entonces, las curvas son muy similares a las del círculo: partimos desde A con la recta tangente a la elipse hasta E , seguimos por la elipse hasta F , y de ahí, continuamos con la recta tangente en F hasta B . Reflejando esta curva, respecto al eje X , obtenemos la otra solución. En la figura 7 se ilustra el tipo de soluciones.

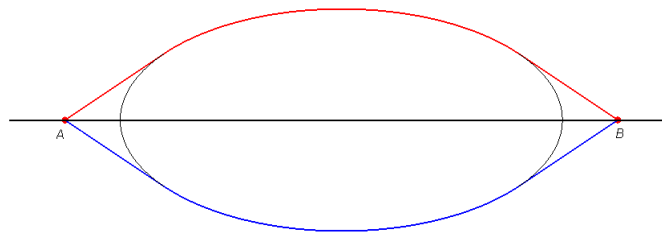


Figura 7: Soluciones al problema de la elipse.

Si bien, el problema ya está resuelto, existen otra forma para tratar el problema de las curvas en la envolvente,



la cual sirve en general para cualquier curva convexa. Es un cálculo explícito utilizando geometría analítica y análisis convexo.

Demostraremos que irse por las rectas tangentes es más largo que irse por el arco comprendido por dichas rectas, para cualquier par de puntos de tangencia.

Consideraremos una curva convexa plana Γ . Pediremos que en el arco comprendido entre los puntos tangentes, esta pueda ser parametrizada como $\Gamma = (x, f(x))$, $x \in [a, b]$, donde x es el valor de la coordenada x y $f(x)$ una función suave y positiva. Dada la convexidad de la curva, y que hemos escogido hacer los cálculos en la region sobre el eje X , debemos tener que $d^2 f(x)/dx^2 < 0$. Esto implica que $df(x)/dx = f'(x)$ es una función decreciente. Esto lo traducimos en que: $f'(a) > f'(b)$. Ahora acotando las curvas con poligonales siempre nos quedamos con envolventes cada vez más pequeñas, por lo tanto, es razonable suponer que el intervalo $[a, b]$ que sustenta al arco es tal que las pendientes de las rectas tangentes es positiva. Es decir, consideraremos: $f'(x) \geq 0$ para $x \in [a, b]$. Ahora, el signo de la derivada se debe a como orientamos el eje X , y sabemos que las distancias involucradas no dependen de esta orientación. De hecho, basta hacer una reflexión respecto al eje Y para que las derivadas cambien de signo. Por lo tanto, el cálculo también se cumplirá para una zona donde las derivadas sean negativas.

Entonces, lo primero que hacemos es escribir las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos extremos del arco a considerar: $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$. Las pendientes de estas rectas serán respectivamente $f'(a)$ y $f'(b)$. Por lo tanto, las rectas son

$$y_1 = f'(a)x + [f(a) - f'(a)a], \quad (1)$$

$$y_2 = f'(b)x_0 + [f(b) - f'(b)b]. \quad (2)$$

Una vez hecho esto, podemos encontrar el punto de intersección de estas rectas, C , imponiendo la igualdad entre y_1 e y_2 . En realidad, lo único que nos importa es la componente horizontal de dicho punto, que llamaremos x_C . Entonces, en este punto se cumple que

$$f'(a)x_C + [f(a) - f'(a)a] = f'(b)x_C + [f(b) - f'(b)b]. \quad (3)$$

Despejando obtenemos trivialmente que

$$x_C = \frac{f(b) - f(a) + f'(a)a - f'(b)b}{f'(a) - f'(b)}. \quad (4)$$

Un análisis de convexidad de la curva $(x, f(x))$ nos mostrará que $a < x_0 < b$. Dado que esta curva es convexa, la recta tangente y_2 en el punto $(b, f(b))$, sólo toca a la curva en dicho punto. Como hemos orientado la curva sobre el eje X , esto implica que esta recta tangente debe estar por sobre toda la curva, incluyendo el punto $(a, f(a))$ por donde pasa la segunda recta tangente y_1 . Supongamos que la componente horizontal x_C de C estuviese a la izquierda de a (es decir $x_C < a < b$). Dado que y_2 está por sobre y_1 para $x = a$, tendríamos entonces que $y_1 < y_2$ sólo para los x menores a x_C . Sin embargo, debemos tener que, en $x = b$, se debe cumplir que $y_2 < y_1$. Esto es una contradicción, lo que implica que $x_C \geq a$. El mismo análisis, pero suponiendo que $x_C > b$, nos llevará al mismo tipo de contradicción, y por lo tanto: $x_C \leq b$.

Ahora, podemos calcular el largo de la poligonal ACB Este está dado por $\overline{ACB} = \overline{AC} + \overline{CB}$. Pero \overline{AC} es la distancia entre los puntos $(a, f(a))$ y $(x_C, y_1(x_C))$, mientras que \overline{CB} es la distancia entre los puntos $(x_C, y_1(x_C))$ y $(b, f(b))$. Entonces

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_C - a)^2 + (f'(a)x_C + f(a) - f'(a)a - f(a))^2} = (x_C - a)\sqrt{1 + [f'(a)]^2}. \quad (5)$$

De la misma forma,

$$\overline{CB} = (b - x_C)\sqrt{1 + [f'(b)]^2}. \quad (6)$$



Entonces

$$\overline{ACB} = (b - x_C)\sqrt{1 + [f'(b)]^2} + (x_C - a)\sqrt{1 + [f'(a)]^2}. \quad (7)$$

Definiendo $g(x) \equiv \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, tenemos que

$$\overline{ACB} = (b - x_C)g(b) + (x_C - a)g(a). \quad (8)$$

Utilizando la forma explícita de x_C , es posible calcular $(x_C - a)$ y $(b - x_C)$; después de sumar las fracciones y simplificar, obtenemos que

$$b - x_C = \frac{f(a) - f(b) + f'(a)(b - a)}{f'(a) - f'(b)}, \quad (9)$$

$$x_C - a = \frac{f(b) - f(a) - f'(b)(b - a)}{f'(a) - f'(b)}. \quad (10)$$

Ahora, concentrémonos en el largo del arco de curva $\frown AB$. En forma general, es sabido que su largo está dado por la siguiente integral:

$$\frown AB = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_a^b g(x) dx. \quad (11)$$

Utilizando el teorema del valor medio para integrales tenemos entonces que

$$\frown AB = (b - a)g(c), \quad (12)$$

donde $c \in [a, b]$ es una constante.

Ahora, notemos que

$$(b - a)g(c) = (b - x_C)g(c) + (x_C - a)g(c). \quad (13)$$

Ocupando (9) y (10), obtenemos

$$(b - a)g(c) = \left[\frac{f(a) - f(b) + f'(a)(b - a)}{f'(a) - f'(b)} \right] g(c) + \left[\frac{f(b) - f(a) - f'(b)(b - a)}{f'(a) - f'(b)} \right] g(c). \quad (14)$$

Eliminando términos,

$$(b - a)g(c) = \left[\frac{f'(a)(b - a)}{f'(a) - f'(b)} \right] g(c) - \left[\frac{f'(b)(b - a)}{f'(a) - f'(b)} \right] g(c). \quad (15)$$

Notemos que $g(x)$ es decreciente para $x \in [a, b]$. Esto pues, si $x < y$ entonces $f'(x) > f'(y)$, pues $f'(x)$ es decreciente, y como $f'(x) > 0$, tenemos que $1 + [f'(x)]^2 > 1 + [f'(y)]^2$. Como la raíz cuadrada es creciente se obtiene: $\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = g(x) > g(y)\sqrt{1 + [f'(y)]^2}$, por lo tanto $g(x)$ es creciente. Por ende,

$$g(a) > g(c) > g(b) > 0. \quad (16)$$

Por otra parte, notemos que

$$\left[\frac{f'(a)(b - a)}{f'(a) - f'(b)} \right] > 0. \quad (17)$$

Luego,

$$\left[\frac{f'(a)(b - a)}{f'(a) - f'(b)} \right] g(c) < \left[\frac{f'(a)(b - a)}{f'(a) - f'(b)} \right] g(a). \quad (18)$$

Mientras que, por otra parte,

$$- \left[\frac{f'(b)(b - a)}{f'(a) - f'(b)} \right] < 0. \quad (19)$$



Por lo tanto,

$$-\left[\frac{f'(b)(b-a)}{f'(a)-f'(b)}\right]g(c) < -\left[\frac{f'(b)(b-a)}{f'(a)-f'(b)}\right]g(b). \quad (20)$$

Recopilando todo lo anterior, deducimos que

$$(b-a)g(c) \leq \left[\frac{f'(a)(b-a)}{f'(a)-f'(b)}\right]g(a) - \left[\frac{f'(b)(b-a)}{f'(a)-f'(b)}\right]g(b). \quad (21)$$

Ahora, imponemos nuevamente el que la curva sea convexa. Esto se puede hacer imponiendo que las rectas tangentes estén siempre por sobre la curva. Esto implica que $f(a) \leq y_2(a)$, o bien

$$f(a) \leq f'(b)(a-b) + f(b). \quad (22)$$

Reacomodando, tenemos que

$$f(b) \geq f'(b)(b-a) + f(a). \quad (23)$$

Ahora, consideremos el término

$$f(b) - f(a) - (f'(a) + f'(b))(b-a) = [f(b) - (b-a)f'(b)] - [f(a) - (a-b)f'(a)]. \quad (24)$$

Ocupando (23) en el lado derecho de esta última expresión, obtenemos que

$$\begin{aligned} [f(b) - (b-a)f'(b)] - [f(a) - (a-b)f'(a)] &\geq [f(a) + f'(b)(b-a) - (b-a)f'(b)] \\ &\quad - [f(a) - (a-b)f'(a)] \\ &= (b-a)f'(a) > 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Es decir, $f(b) - f(a) - (f'(a) + f'(b))(b-a) > 0$, y por lo tanto, recordando que $g(a) - g(b) > 0$, vemos que se cumple que

$$\Delta = (g(a) - g(b))[f(b) - f(a) - (f'(a) + f'(b))(b-a)] > 0. \quad (26)$$

Ocupando esto en la última desigualdad que vincula a $g(c)$, tenemos que

$$(b-a)g(c) \leq \left[\frac{f'(a)(b-a)}{f'(a)-f'(b)}\right]g(a) - \left[\frac{f'(b)(b-a)}{f'(a)-f'(b)}\right]g(b) + \Delta. \quad (27)$$

Utilizando (26), vemos que

$$\begin{aligned} (b-a)g(c) &\leq \frac{1}{f'(a)-f'(b)} \{g(a)[f(b) - f(a) - (f'(a) + f'(b))(b-a) + f'(a)(b-a)] \\ &\quad + g(b)[f(a) - f(b) + (f'(a) + f'(b))(b-a) - f'(b)(b-a)]\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Cancelando términos, tenemos que

$$(b-a)g(c) \leq \left[\frac{f(a) - f(b) + (b-a)f'(a)}{f'(a) - f'(b)}\right]g(b) + \left[\frac{f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)}{f'(a) - f'(b)}\right]g(a). \quad (29)$$

Ocupando esto último y las ecuaciones (9) y (10), observamos que

$$(b-a)g(c) \leq (b-x_C)g(b) + (x_C-a)g(a), \quad (30)$$

y por lo tanto,

$$\overline{AB} \leq \overline{ACB}, \quad (31)$$

que es lo que queríamos demostrar. Es decir, es más corto viajar por el arco que por los lados rectos del triángulo con base curva. Como esto se cumple para cada envolvente pequeña de las cuales se construye una poligonal



(que acotan el largo de la envolvente original), entonces se cumplirá también para cualquier triángulo. Como esto lo demostramos para un triángulo arbitrario, dados los argumentos anteriores para las cotas por curvas poligonales, tenemos entonces que siempre, para cualquier curva convexa, es más corto irse por el arco.

(c) Extensión: Puntos A y B fuera de un eje de simetría del obstáculo convexo

Cuando los puntos A y B colineales no se encuentran en un eje de simetría del objeto obstáculo, no podemos quedarnos arbitrariamente con un sólo semiplano, y con nuestro método ya no obtenemos una solución limpia. Una forma de resolver el problema sería colocar el eje X a lo largo de la línea AB y estudiar el problema por separado en los semiplanos $y \geq 0$ e $y < 0$. Con esto obtenemos dos posibles soluciones: la curva minimizante en el semiplano superior y la curva minimizante en el semiplano inferior. Entre estas dos escogemos la que tenga menor largo. Esa será la solución al problema global.

Es notable entonces que la pérdida del eje de simetría puede implicar unicidad de la solución. Esto lo podemos discutir con un ejemplo: la elipse rotada. Consideramos el mismo problema que en la sección B, pero con la diferencia que la línea AB no coincide con alguno de los semiejes, pero aun contiene al centro de la elipse la cual hemos rotado.

En este caso la unicidad de la solución dependerá de la ubicación de los puntos A y B . Si estos se encuentran a la misma distancia que el centro de la elipse, entonces seguiremos manteniendo dos soluciones distintas, sólo que estas, ya no son un reflejo (una de la otra) respecto al eje X . Esto se debe a que en este caso, sigue existiendo una simetría remanente, que es la simetría de reflexión en torno al centro de la elipse. De esta manera, las soluciones serán ahora reflejos una de la otra, pero respecto al origen.

Si ahora, colocamos los puntos A y B en forma no simétrica respecto al origen, habremos perdido cualquier simetría. Tenemos entonces una solución para cada semiplano y debemos escoger entre una de estas dos, obteniendo entonces unicidad.

Esto recuerda, un poco, la idea matemática y física, de que las simetrías acarrear consigo degeneraciones en la solución de ecuaciones y problemas en general.



Métodos a conmutadores en teoría espectral y teoría del scattering

Rafael Tiedra de Aldecoa^{†1}

[†] Facultad de Matemáticas, P. Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile, rtiedra@mat.puc.cl

1. Teoría cuántica del scattering

Consideramos una partícula elementaria de spin $s \in \mathbb{N}$ moviéndose en un espacio de configuraciones $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, en presencia de un potencial externo V . En cada tiempo $t \in \mathbb{R}$, el conjunto de los estados posibles de la partícula constituye un mismo espacio (Hilbertiano) de funciones $\mathcal{H} := L^2(\Omega; \mathbb{C}^{2s+1})$. La dinámica de la partícula está constreñida por el principio de conservación de la energía, el mismo formalizado por una ecuación diferencial llamada ecuación de Schrödinger [8]:

$$i \frac{\partial \varphi_t}{\partial t} = H \varphi_t \quad (\hbar = 1),$$

donde $\varphi_t \in \mathcal{H}$ es el estado de la partícula al tiempo t y H el operador auto-adjunto $-\Delta + V$ actuando en \mathcal{H} . Por “analogía” al caso clásico, el operador diferencial de Laplace-Beltrami Δ (con condiciones al borde si necesario) está usualmente asociado a (menos) la energía cinética de la partícula, mientras que el operador (matricial) de multiplicación V representa su energía potencial. Luego, el operador H está naturalmente interpretado como el Hamiltoniano del sistema {partícula + potencial externo} y el grupo unitario $\{e^{-itH}\}_{t \in \mathbb{R}}$ como su grupo de evolución temporal. (Recordamos que un operador U en un espacio de Hilbert \mathcal{H} es unitario si verifica $U^*U = U^*U = \text{id}_{\mathcal{H}}$, con U^* el adjunto de U .)

La teoría espectral tiene como objeto de estudio el subconjunto $\sigma(H)$ de \mathbb{R} , llamado espectro de H , siendo el soporte en \mathbb{R} del cálculo funcional asociado al operador H .² El análisis de $\sigma(H)$ permite, entre otros, determinar totalmente (o parcialmente) la descomposición del espacio de Hilbert \mathcal{H} en sus componentes $\mathcal{H}_p(H)$ y $\mathcal{H}_c(H) := \mathcal{H}_{ac}(H) \oplus \mathcal{H}_{sc}(H)$, cada uno teniendo su interpretación física. $\mathcal{H}_p(H)$ es el subespacio (asociado a la parte puntual del espectro de H) generado por el conjunto de los vectores propios de H , mientras que $\mathcal{H}_c(H)$ es el subespacio (asociado a la parte continua del espectro de H) de continuidad respecto a H . Los vectores propios de H están considerados como los estados acotados del sistema, ya que quedan invariantes (aparte de una fase) bajo el grupo de evolución temporal $\{e^{-itH}\}_{t \in \mathbb{R}}$. Los vectores de $\mathcal{H}_c(H)$ están por su parte interpretados como los estados de difusión del sistema porque se escapan, en medida temporal, de cada parte finita del espacio de configuraciones cuando $t \rightarrow +\infty$.

¹Financiado por el Fondo Fondecyt 1090008 y por la Iniciativa Científica Milenio ICM P07-027-F “Mathematical Theory of Quantum and Classical Magnetic Systems”.

²En su formulación la más sencilla, el cálculo funcional asociado a un operador H auto-adjunto en un espacio de Hilbert \mathcal{H} consiste en el hecho que existe una medida real $E^H(\cdot)$ sobre $\sigma(H)$ (la medida espectral de H) a valores en los operadores acotados tal que

$$f(H) = \int_{\sigma(H)} dE^H(\lambda) f(\lambda)$$

para cualquiera función $f : \sigma(H) \rightarrow \mathbb{C}$ continua acotada. Para cada $\varphi \in \mathcal{H}$, la aplicación $B \mapsto \|E^H(B)\varphi\|^2$, con $B \subset \mathbb{R}$ un boreliano y $\|\cdot\|$ la norma de \mathcal{H} , define una medida real μ^φ . Esta medida admite una descomposición única

$$\mu^\varphi = \mu_p^\varphi + \mu_{ac}^\varphi + \mu_{sc}^\varphi,$$

donde μ_p^φ , μ_{ac}^φ y μ_{sc}^φ son respectivamente medidas puntual, absolutamente continua y singularmente continua respecto a la medida de Lebesgue. Por consiguiente, el espacio de Hilbert \mathcal{H} se descompone en la suma directa

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_p(H) \oplus \mathcal{H}_{ac}(H) \oplus \mathcal{H}_{sc}(H),$$

donde $\mathcal{H}_p(H) := \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \mu^\varphi = \mu_p^\varphi\}$, $\mathcal{H}_{ac}(H) := \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \mu^\varphi = \mu_{ac}^\varphi\}$ y $\mathcal{H}_{sc}(H) := \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \mu^\varphi = \mu_{sc}^\varphi\}$. Ver la Sección 7.4 de [9] para más detalles.

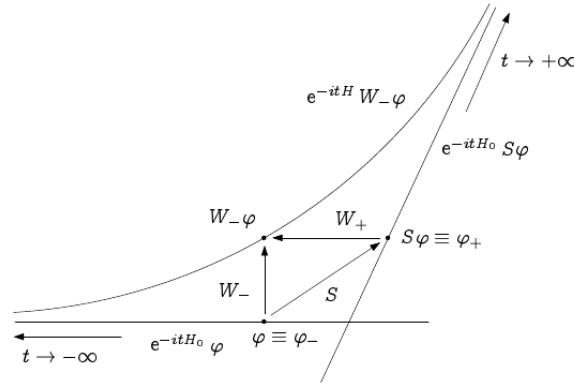


Figura 1: Operadores de ondas W_{\pm} y operador S de scattering

En la práctica, la teoría espectral toma frecuentemente beneficio del esquema perturbativo siguiente: si el potencial V está acotado relativamente al Laplaciano Δ con cota $b < 1$, el sistema caracterizado por el Hamiltoniano H puede ser considerado como una perturbación³ del sistema sin interacción externa descrito por el operador $-\Delta$.

Esta estructura adicional, facultativa en teoría espectral, es de cierta manera el dato inicial de la teoría del scattering. En efecto, esta teoría tiene como objetivo principal la descripción asintótica del grupo de evolución (total) $\{e^{-itH}\}_{t \in \mathbb{R}}$ en términos de un grupo de evolución (libre) $\{e^{-itH_0}\}_{t \in \mathbb{R}}$. Luego, una de las metas de la teoría del scattering es de determinar un operador H_0 (más simple que H) tal que para cada estado de difusión $\psi \in \mathcal{H}_{ac}(H)$ al tiempo $t = 0$ se verifique lo siguiente: existen estados de difusión $\varphi_{\pm} \in \mathcal{H}_{ac}(H_0)$ tales que la diferencia

$$e^{-itH} \psi - e^{-itH_0} \varphi_{\pm}$$

converge a 0 en norma cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Esencialmente, este problema es equivalente a la cuestión de existencia y de completitud⁴ de los operadores de ondas (generalizados)

$$W_{\pm} := s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0} P_{ac}(H_0),$$

donde $P_{ac}(H_0)$ es el proyector ortogonal sobre $\mathcal{H}_{ac}(H_0)$ y “s-lím” hace referencia al límite fuerte en \mathcal{H} . La interpretación usual de los operadores W_{\pm} está esquematizada en la Figura 1.

El método del operador conjugado, técnica aparecida en los años 1960 [6] y continuamente desarrollada desde entonces, permite obtener muchos resultados encontrados en teoría espectral y teoría del scattering. Se funda sobre la introducción de un operador auto-adjunto auxiliar A teniendo ciertas propiedades de compatibilidad (expresadas en términos de la resolvente $(H - z)^{-1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H)$, de H y del grupo unitario $\{e^{-itH}\}_{t \in \mathbb{R}}$) respecto al Hamiltoniano H . Si estas condiciones de regularidad están satisfechas, y si el conmutador $[iH, A]$ es estrictamente positivo cuando localizado sobre un intervalo J del espectro de H , entonces varias informaciones relativas a H pueden ser deducidas localmente en J .

Como el método del operador conjugado se basa solamente sobre el dato de un triplete abstracto $\{H, A, \mathcal{H}\}$ adecuado, su dominio de aplicación es muy amplio. Los ejemplos que siguen forman una lista revelatriz de

³Aquí, la expresión “el operador $T + S$ es una perturbación del operador T ” hace referencia a la invariancia de las propiedades de auto-adjunción en el sentido del Teorema de Rellich-Kato. Es decir, si T es un operador auto-adjunto (esencialmente auto-adjunto) en un espacio de Hilbert \mathcal{H} y S es simétrico y acotado relativamente a T con cota $b < 1$, entonces el operador $T + S$ es auto-adjunto (esencialmente auto-adjunto), $\overline{T + S} = \overline{T} + \overline{S}$ y el dominio de $\overline{T + S}$ es igual al dominio de \overline{T} . Ver la Sección 2.7 de [1] para más detalles.

⁴Uno dice que los operadores de ondas W_{\pm} son completos si sus imágenes $\text{Ran}(W_{\pm})$ en \mathcal{H} verifican la identidad

$$\text{Ran}(W_-) = \text{Ran}(W_+) = \mathcal{H}_{ac}(H).$$



situaciones físicas donde el método del operador conjugado ya ha permitido obtener resultados sutiles: operadores de Schrödinger (simples o a N cuerpos), medios estratificados, operadores de Dirac, teoría cuántica de campos, teoría de los grafos, mecánica estadística, efecto Hall cuántico, scattering en relatividad general, *etc.*

2. Operadores conjugados

2.1. Hipótesis generales

Consideramos un operador auto-adjunto H actuando en un espacio de Hilbert \mathcal{H} con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y norma $\| \cdot \|$. Notamos $\mathcal{D}(H)$ el dominio de H equipado del producto escalar grafo $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}(H)} := \langle \cdot, \cdot \rangle + \langle H \cdot, H \cdot \rangle$. Con esta estructura, $\mathcal{D}(H)$ constituye también un espacio de Hilbert encajado continuamente y densamente en \mathcal{H} . Identificando \mathcal{H} con su adjunto⁵ vía el isomorfismo de Riesz, obtenemos una sucesión de encajes continuos y densos:

$$\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{D}(H)^*.$$

La primera propiedad de regularidad de H requerida en el método del operador conjugado permite de extender esta sucesión como sigue. Sea A un segundo operador auto-adjunto en \mathcal{H} con dominio $\mathcal{D}(A)$ también equipado del producto escalar grafo. Entonces, uno dice que H es de clase $C^1(A)$ si la aplicación (de conjugación)

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{itA}(H - i)^{-1}e^{-itA} \quad (1)$$

a valores en el conjunto $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de los operadores acotados sobre \mathcal{H} , es fuertemente de clase C^1 . De manera equivalente, H es de clase $C^1(A)$ si existe una constante $c \geq 0$ tal que

$$\left| \langle (H + i)^{-1}\varphi, A\varphi \rangle - \langle A\varphi, (H - i)^{-1}\varphi \rangle \right| \leq c \|\varphi\|^2 \quad (2)$$

para todos $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ (la intuición debajo de esta equivalencia es que la derivada en $t = 0$ de (1) da el conmutador $[(H - i)^{-1}, A]$ “=” $(H - i)^{-1}A - A(H - i)^{-1}$). En este caso, si el conjunto $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(H)$ está equipado con la topología de la intersección, todos los encajes de la sucesión

$$\{\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(H)\} \subset \mathcal{D}(H) \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{D}(H)^* \subset \{\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(H)\}^*$$

son continuos y densos. Además, para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H)$, el conmutador $[(H - z)^{-1}, A]$, definido sobre $\mathcal{D}(A)$ como en (2), se extiende por continuidad a un operador acotado sobre \mathcal{H} . De manera similar, el conmutador $[H, A]$, definido sobre $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(H)$ como en (2), se extiende por continuidad a un operador acotado de $\mathcal{D}(H)$ a $\mathcal{D}(H)^*$. Las extensiones de $[(H - z)^{-1}, A]$ y $[H, A]$ (ambas escritas con los mismos símbolos) verifican entonces (en el sentido de los productos escalares, como en (2)), la relación fundamental:

$$[(H - z)^{-1}, A] = -(H - z)^{-1}[H, A](H - z)^{-1}.$$

Aparte del hecho de que H sea de clase $C^1(A)$, el método del operador conjugado requiere de manera crucial la hipótesis siguiente de positividad local del conmutador $[iH, A]$: Sea $E^H(\cdot)$ la medida espectral de H . Si H es de clase $C^1(A)$, entonces el operador $E^H(J)[iH, A]E^H(J)$ está bien definido para cualquier conjunto $J \subset \mathbb{R}$ acotado (porque $[iH, A]$ envía $\mathcal{D}(H)$ en $\mathcal{D}(H)^*$ y $E^H(J)$ envía \mathcal{H} en $\mathcal{D}(H)$). También, existen números $a \in \mathbb{R}$ tales que⁶

$$E^H(J)[iH, A]E^H(J) \geq aE^H(J). \quad (3)$$

⁵El adjunto de un espacio de Banach F , notado F^* , es el espacio vectorial constituido de las funciones continuas y anti-lineales $\varphi : F \rightarrow \mathbb{C}$ equipado de la norma dual

$$\|\varphi\|_{F^*} := \sup\{|\varphi(f)| \mid f \in F, \|f\|_F \leq 1\}.$$

⁶Dados dos operadores acotados C_1 y C_2 en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , uno escribe $C_1 \geq C_2$ si

$$\langle \varphi, C_1\varphi \rangle \geq \langle \varphi, C_2\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}.$$



Si esta desigualdad está verificada para un número $a > 0$, uno dice que A es localmente estrictamente conjugado a H sobre J (por eso el calificativo de operador conjugado para designar A).

Dedicamos en el resto de esta sección a una presentación de varios resultados que pueden ser deducidos, tanto en teoría espectral como en teoría del scattering, de las hipótesis hechas en el párrafo anterior.

2.2. Operadores conjugados y teoría espectral

Si $\lambda \in \sigma(H)$ y $\mu > 0$, el operador acotado $(H - \lambda - i\mu)^{-1}$ no admite un límite en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ cuando $\mu \searrow 0$ (porque $H - \lambda$ no es invertible!). Sin embargo, el límite

$$\lim_{\mu \searrow 0} \langle \varphi, (H - \lambda - i\mu)^{-1} \varphi \rangle \quad (4)$$

puede existir para ciertos vectores $\varphi \in \mathcal{H}$. Si para todo λ en un subconjunto $J \subset \mathbb{R}$ y para todo φ en un subconjunto denso de \mathcal{H} este límite existe y si la convergencia es uniforme en λ sobre cada subconjunto compacto de J , uno dice que un principio de absorción límite para H está verificado en J . La existencia de un tal principio tiene como consecuencia principal el hecho que el espectro de H en J sea pura y absolutamente continuo (cf. [2, Sec. 7.1.1 & 7.1.2]).

En los años 80, el matemático francés Eric Mourre [5] observó que si la desigualdad (3) está verificada para un $a > 0$ y si H es de clase $C^2(A)$ (es decir, dos veces de clase $C^1(A)$), entonces un principio de absorción límite existe. Por eso, hablamos de desigualdad estricta de Mourre cuando la desigualdad (3) está satisfecha para un $a > 0$. Las demostraciones usuales de la existencia del límite (4) a partir de una desigualdad estricta de Mourre se fundan sobre un método iterativo, hecho de desigualdes diferenciales, relativamente técnico. Referimos el lector a [2, Sec. 7.3 & 7.4] para una presentación general del tópico y a [2, p. 267-268] para una exposición del caso particular (fundador) en que $[iH, A] = H$.

Dado un operador H , el problema principal reside entonces en la construcción de un operador adecuado A conjugado a H . Si el operador H difiere mucho del Laplaciano negativo $-\Delta$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$, uno utiliza usualmente el generador del grupo de las dilataciones $A = D$ (cf. Sección 3) que verifica la regla de conmutación

$$[i(-\Delta), D] = -2\Delta.$$

Si el operador H difiere sensiblemente de $-\Delta$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$, la elección de un operador conjugado constituye un problema abierto sujeto, hasta hoy día, a ninguna teoría general.

2.3. Operadores conjugados y teoría del scattering

Varias propiedades de propagación del estado $e^{-itH} \varphi$ pueden ser obtenidas gracias al método del operador conjugado. Explicamos en lo siguiente como una desigualdad de Mourre (local) induce la existencia de operadores (localmente) H -suaves, la cual permite a su turno inferir la existencia (local) de los operadores de ondas.

Empezamos para recordar la relación entre operadores H -suaves y operadores de ondas. Un operador T cerrado con dominio $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(H)$ es localmente H -suave sobre $J \subset \mathbb{R}$ para cada intervalo $[b, c] \subset J$ existe una constante $C \geq 0$ tal que la desigualdad

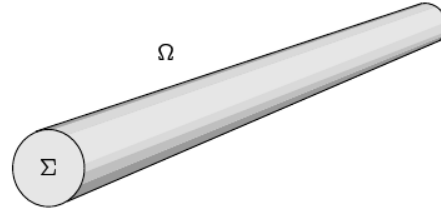
$$\|T \operatorname{Im}(H - \lambda - i\mu)^{-1} T^*\| \leq C \quad (5)$$

sea verificada para todos $\lambda \in [b, c]$ y $\mu \in (0, 1)$ (aquí la parte imaginaria “Im” está definida como para los números complejos). Utilizando la relación

$$\operatorname{Im}(H - \lambda - i\mu)^{-1} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt e^{it\lambda} e^{-itH - \mu|t|},$$

podemos mostrar (ver Sección XIII.7 de [7]) que T es localmente H -suave sobre J si y sólo si existe para cada intervalo $[b, c] \subset J$ una constante $C \geq 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} dt \|T e^{-itH} E^H([b, c]) \varphi\| \leq C \|\varphi\|^2$$

Figura 2: Guía de ondas cuántico $\Omega = \Sigma \times \mathbb{R}$

para todo $\varphi \in \mathcal{H}$. Así, la existencia de un operador T localmente H -suave sobre J provee informaciones relativas a la propagación del estado $e^{-itH} E^H([b, c])\varphi$ (es decir, sobre el estado φ con evolución temporal dada por H y con energía en el intervalo $[b, c]$). De hecho, suponiendo que la diferencia entre los Hamiltonianos libre y total de un proceso de scattering se expresa en términos de operadores localmente suaves, uno puede mostrar teoremas de existencia de los operadores de ondas como el siguiente:

Teorema 2.1. Sean H_1 y H_2 dos operadores auto-adjuntos en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , $E_j(\cdot)$ la medida espectral de H_j y $J \subset \mathbb{R}$. Supongamos que para cada $\varphi_j \in \mathcal{D}(H_j)$ se tiene la igualdad $\langle H_1\varphi_1, \varphi_2 \rangle - \langle \varphi_1, H_2\varphi_2 \rangle = \langle T_1\varphi_1, T_2\varphi_2 \rangle$, con T_j un operador localmente H_j -suave sobre J . Entonces, los operadores de ondas

$$W_{\pm}(H_1, H_2; J) := s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_1} e^{-itH_2} E_2(J)$$

existen y son isometrías parciales de $E_2(J)\mathcal{H}$ sobre $E_1(J)\mathcal{H}$. Además, los operadores $W_{\pm}(H_1, H_2; J)$ satisfacen la identidad

$$W_{\pm}(H_1, H_2; J)^* = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_2} e^{itH_1} E_1(J) \equiv W_{\pm}(H_2, H_1; J)$$

(módulo el intercambio $E_2(J) \leftrightarrow E_1(J)$, el adjunto $*$ pasa a través del límite fuerte).

Supongamos ahora que un principio de absorción límite para H sea obtenido sobre un conjunto abierto $J \subset \mathbb{R}$ a partir de una desigualdad de Mourre. Así pues, el conjunto de vectores tales que el límite (4) existe contiene el dominio $\mathcal{D}(A)$ (cf. [2, Sec. 7.4]). Además, si $[b, c] \subset J$, existe una constante $C \geq 0$ (dependiendo de b y c) tal que

$$\langle \varphi, (H - \lambda - i\mu)^{-1} \varphi \rangle \leq C (\|\varphi\|^2 + \|A\varphi\|)$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(A)$, $\lambda \in [b, c]$ y $\mu > 0$. De esta estimación sigue la existencia de una constante $D \leq 0$ tal que

$$\|(1 + |A|)^{-1} (H - \lambda - i\mu)^{-1} (1 + |A|)^{-1}\| \leq D$$

uniformemente en $\lambda \in [b, c]$ y $\mu > 0$. Comparando esta relación con la definición (5) de operadores H -suaves, deducimos que el operador $(1 + |A|)^{-1}$ es localmente H -suave sobre J . De eso sigue que todo operador T en \mathcal{H} satisfaciendo $(1 + |A|)T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ también es localmente H -suave sobre J . En particular, si la diferencia entre los Hamiltonianos libre y total es igual a un producto de operadores $T_1^* T_2$ con $(1 + |A|)T_j^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces el método del operador conjugado permite mostrar, vía el Teorema 2.1, la existencia de los operadores de ondas.

3. Ejemplo: guía de ondas cuántico

En esta sección, ilustramos parte de la teoría de las secciones anteriores con el caso de un guía de ondas cuántico. El operador auto-adjunto H_0 que representa la dinámica cuántica libre es el Laplaciano con condiciones en la frontera de Dirichlet $-\Delta_{\mathbb{D}}^{\Omega}$ actuando en un espacio de configuraciones igual a (o difeomorfo a) un guía de ondas infinito $\Omega := \Sigma \times \mathbb{R}$.



Como el dominio $\Omega = \Sigma \times \mathbb{R}$ es un producto directo, el espacio de Hilbert $\mathcal{H} := L^2(\Omega)$ es isométrico al producto tensorial hilbertiano $L^2(\Sigma) \otimes L^2(\mathbb{R})$, y el Hamiltoniano H_0 admite la descomposición

$$H_0 = -\Delta_D^\Sigma \otimes 1 + 1 \otimes P^2,$$

donde $-\Delta_D^\Sigma$ es el Laplaciano de Dirichlet en $L^2(\Sigma)$, $P \equiv -i\frac{\partial}{\partial x}$ es el operador de impulso en $L^2(\mathbb{R})$, \otimes el producto tensorial cerrado de operadores y 1 los operadores identidades. Consideramos el operador $A := 1 \otimes D$, donde D es el generador del grupo unitario de dilataciones en \mathbb{R} , es decir,

$$(e^{i\tau D} \psi)(x) := e^{\tau/2} \psi(e^\tau x), \quad \tau \in \mathbb{R}, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}),$$

con $C_c^\infty(\mathbb{R})$ el conjunto de las funciones suaves y con soporte compacto en \mathbb{R} . Como D verifica la relación de conmutación $[iP^2, D] = P^2$ sobre $C_c^\infty(\mathbb{R})$, el operador satisface la regla de conmutación

$$[iH_0, A] = 2 \otimes P^2.$$

Por otro lado, $-\Delta_D^\Sigma$ posee un espectro puramente discreto $\mathcal{T} := \{\nu_\alpha\}_{\alpha \geq 1}$ consistiendo en valores propios $0 < \nu_1 < \nu_2 \leq \nu_3 \leq \dots$ repetidas de acuerdo a la multiplicidad⁷. En particular, la medida espectral $E^{H_0}(\cdot)$ de H_0 admite la descomposición tensorial [9, Ex. 8.21]

$$E^{H_0}(\cdot) = \sum_{\alpha \geq 1} \mathcal{P}_\alpha \otimes E^{P^2 + \nu_\alpha}(\cdot), \quad (6)$$

donde \mathcal{P}_α es la proyección ortogonal 1-dimensional asociada a ν_α y $E^{P^2 + \nu_\alpha}(\cdot)$ la medida espectral de $P^2 + \nu_\alpha$. Luego, tenemos para cada $J \subset \mathbb{R}$ acotado la igualdad

$$E^{H_0}(J)[iH_0, A]E^{H_0}(J) = 2 \sum_{\alpha \in \mathbb{N}(J)} \mathcal{P}_\alpha \otimes P^2 E^{P^2 + \nu_\alpha}(J), \quad (7)$$

con $\mathbb{N}(J) := \{\alpha \geq 1 \mid \sup(J) \geq \nu_\alpha\}$. Si $\sup(J) < \nu_1$, entonces $E^{H_0}(J) = 0$ y la desigualdad

$$E^{H_0}(J)[iH_0, A_0]E^{H_0}(J) \geq aE^{H_0}(J)$$

está trivialmente satisfecha para cualquier $a > 0$. En consecuencia, suponemos que $\sup(J) \geq \nu_1$ y notamos \mathcal{F} la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$. Como el operador $1 \otimes \mathcal{F}$ es unitario, existe un número $a_J > 0$ tal que $E^{H_0}(J)[iH_0, A_0]E^{H_0}(J) \geq a_J E^{H_0}(J)$ si y sólo si

$$(1 \otimes \mathcal{F})E^{H_0}(J)[iH_0, A_0]E^{H_0}(J)(1 \otimes \mathcal{F}^{-1}) \geq a_J(1 \otimes \mathcal{F})E^{H_0}(J)(1 \otimes \mathcal{F}^{-1}). \quad (8)$$

Gracias a las fórmulas (6)-(7), es directo mostrar que la desigualdad (8) está verificada con

$$a_J = \inf_{\alpha \in \mathbb{N}(J)} \inf(J - \nu_\alpha). \quad (9)$$

En particular, si existe un compacto $K \subset (\nu_1, \infty) \setminus \mathcal{T}$ tal que $J \subset K$, entonces $a_J > 0$. En consecuencia, el operador A está localmente estrictamente conjugado a H_0 sobre $\mathbb{R} \setminus \mathcal{T}$. En otros términos, para cada $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{T}$ existen números $\varepsilon > 0$ y $a > 0$ tales que

$$E^{H_0}((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon))[iH_0, A_0]E^{H_0}((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)) \geq aE^{H_0}((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)).$$

Observe que la cota inferior (9) puede ser obtenida directamente gracias a la teoría (más abstracta) del operador conjugado para sistemas con varios canales [3, Eq. (3.8)]. En efecto, si los operadores $\mathcal{P}_\alpha \otimes (P^2 +$

⁷Referimos el lector a [4, Ch. 6] para más informaciones sobre el Laplaciano de Dirichlet sobre un dominio acotado.



ν_α) están interpretados como Hamiltonianos a un canal (el canal correspondiente a la energía transversa ν_α), entonces H_0 puede ser considerado como un Hamiltoniano a varios canales ya que

$$H_0\varphi = \sum_{\alpha \geq 1} \mathcal{P}_\alpha \otimes (P^2 + \nu_\alpha)\varphi$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}(H_0)$. Luego, no es sorprendente que sea difícil obtener propiedades de propagación o una estimación de Mourre para los estados localizados en energía alrededor de los valores $\lambda \in \mathcal{T}$. Por esta razón, los puntos de \mathcal{T} están usualmente llamados “umbrales” (“thresholds” en inglés) del sistema cuántico a varios canales dado por H_0 . De hecho, la obtención de resultados en los thresholds en teoría espectral o del scattering sigue siendo un campo de investigación intenso dentro la comunidad de físicos matemáticos.

Referencias

- [1] W. O. Amrein. *Hilbert space methods in quantum mechanics*. Fundamental Sciences. EPFL Press, Lausanne, 2009.
- [2] W. O. Amrein, A. Boutet de Monvel, and V. Georgescu. *C_0 -groups, commutator methods and spectral theory of N -body Hamiltonians*, volume 135 of *Progress in Math*. Birkhäuser, Basel, 1996.
- [3] A. Boutet de Monvel-Berthier and V. Georgescu. Graded C^* -algebras and many-body perturbation theory. II. The Mourre estimate. *Astérisque*, (210): 6–7, 75–96, 1992. *Méthodes semi-classiques*, Vol. 2 (Nantes, 1991).
- [4] E. B. Davies. *Spectral theory and differential operators*, volume 42 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [5] E. Mourre. Absence of singular continuous spectrum for certain selfadjoint operators. *Comm. Math. Phys.*, 78(3):391–408, 1980/81.
- [6] C. R. Putnam. *Commutation properties of Hilbert space operators and related topics*. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Band 36. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967.
- [7] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.
- [8] E. Schrödinger. An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules. *Phys. Rev.* 28, pages 1049–1070, 1926.
- [9] J. Weidmann. *Linear operators in Hilbert spaces*, volume 68 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1980. Translated from the German by Joseph Szücs.



Los problemas propuestos y las soluciones a los problemas de esta sección deben ser enviados por correo electrónico a joven.matematico@gmail.com antes del día 15 de Septiembre de 2011. Los nombres de los autores de las soluciones recibidas serán publicados en una próxima edición, junto con las mejores soluciones. Generalizaciones y comentarios adicionales son bienvenidos. Se incentiva a alumnos y profesores a enviar soluciones y problemas propuestos, tanto como problemas antiguos presentando una solución nueva. Un asterisco (*) junto al número del problema indica que los editores no disponen de una solución.

Problemas

7. Propuesto por Ricardo Repenning, PUC, Santiago, Chile. En Chile, un juego muy popular es el “amigo secreto”, en el cual los n miembros de un grupo escriben sus respectivos nombres en hojas de papel. Posteriormente se juntan los n papeles con los nombres y al azar cada persona saca un papel. Cada uno debe hacer un regalo a la persona cuyo nombre aparece en el papel extraído. Sin embargo, muchas veces una persona saca su propio nombre, obligando a hacer el sorteo nuevamente.

Considere un juego de amigo secreto con muchas personas. ¿A qué valor converge la probabilidad de que, en el primer sorteo, nadie obtenga su propio nombre?

8. (*) Propuesto por Mark Ashbaugh, University of Missouri, Columbia, MO. Muestre que

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{e^x + 1} dx = -\frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

usando “medios elementales,” i.e., utilizando solamente cambios de variable, o posiblemente integración de contorno. La evaluación del autor utilizó series y la constante de Euler, γ , pero dado que la respuesta no involucra γ él cree que debe haber una forma de obtener este resultado de manera más elemental. En particular, para los propósitos de este problema, el uso directo de series, la función Γ , γ , y lo que sea que involucre la función ζ de Riemann y otras funciones relacionadas (tales como la función η , o la función ζ de Hurwitz) está “fuera de límites.”

9. Propuesto por los editores. Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{2m^2} \right).$$

10. Propuesto por los editores. Sea A una matriz de $n \times n$ entradas reales a_{ij} , positiva definida, y sean $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ sus valores característicos con repetición. Muestre que

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i \leq \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

11. Propuesto por los editores. Sean A, B dos matrices de $n \times n$, positivas definidas. Muestre que

$$|\det(AB)| \leq \frac{1}{4n^{2n}} (\operatorname{Tr}(A)^n + \operatorname{Tr}(B)^n)^2.$$



Soluciones

1. *Solución al problema propuesto número 2.* Sea A_n una matriz de $n \times n$ con entradas

$$(A_n)_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{i^2} + 1 & \text{si } i = j, \\ \frac{1}{ij} & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Calcule $\det(A_n)$, $\lim \det(A_n)$, y muestre que A_n es definida positiva para todo $n \geq 1$.

Solución por Mark S. Ashbaugh, University of Missouri, Columbia, MO.

El valor del determinante $\det(A_n)$ es $1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}$, y luego su límite cuando $n \rightarrow \infty$ es $1 + \pi^2/6 \approx 2.644934067$ (por la solución de Euler al problema de Basilea, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$). Un argumento para probar que A_n es definida positiva para todo $n \geq 1$ será dado más abajo, en el contexto de nuestro cálculo de $\det(A_n)$.

La primera parte de este problema se puede trabajar fácilmente al considerar una matriz cualquiera de $n \times n$ que sea una *perturbación de rango uno* de la identidad. Así, si u y v denotan n -vectores (que consistentemente veremos como n -vectores *columna*, i.e., como matrices de n por 1), uno considera la matriz $B = B_n = I + uv^T$ (donde el superíndice T denota “transpuesta”). Por simplicidad, consideramos este problema en el contexto de los reales, tomando todos los vectores y matrices como reales, y trabajando en el espacio vectorial \mathbb{R}^n . Como se verá, esto no restringe en exceso nuestra habilidad de completar el análisis, y, en cualquier caso, esta restricción puede ser removida fácilmente (más simplemente cambiando “ T ” por “ $*$ ”, por el conjugado hermítico, más arriba, de modo de trabajar en \mathbb{C}^n , y usando el producto interno hermítico estándar para definir ortogonalidad).

Como uv^T aniquila todos los vectores que son ortogonales a v , uv^T tiene a 0 como autovalor de multiplicidad geométrica a lo menos $n - 1$. De hecho, siempre que $uv^T \neq 0$ (que es equivalente a que ni u ni v sean 0, lo cual asumimos de aquí en adelante, y que hace a uv^T genuinamente una matriz de rango uno), la multiplicidad geométrica del autovalor 0 será precisamente $n - 1$. Claramente el rango de uv^T será entonces 1 (pues el espacio imagen consistirá de todos los múltiplos de u), y entonces su kernel debe tener dimensión $n - 1$ (y su kernel es precisamente el autoespacio del autovalor 0, cuya dimensión es la multiplicidad geométrica de 0). (Como comentario aparte, para el caso $n = 1$ uno debe entender lo anterior como vacío de contenido, y si acaso 0 es un autovalor de uv^T como indeterminado. Por supuesto, el caso $n = 1$ es fácilmente tratable directamente y no da ninguna sorpresa.)

Para determinar el “último” autovalor y autoespacio uno usa la propiedad del rango uno para notar que si existe un autoespacio independiente, este debe consistir de todos los múltiplos de u (u siendo el generador del espacio imagen de uv^T). De modo que intentamos u como autovector. Actuando sobre u con uv^T obtenemos $(v^T u)u$, o $\langle v, u \rangle u$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno estándar en \mathbb{R}^n . Así u es un autovector de uv^T con autovalor $\langle v, u \rangle$, y ahora tenemos dos casos que considerar.

(i) Si u y v son ortogonales, entonces u está de hecho en el autoespacio asociado al autovalor 0 identificado más arriba (todos los vectores ortogonales a v , que denotamos por v^\perp a continuación), y por lo tanto aún nos falta información sobre el espectro de uv^T “en un espacio unidimensional,” por decirlo así. Este es el “caso anómalo” que ocurre, y se relaciona en realidad con el hecho de que uv^T tenga una estructura de bloque de Jordan no trivial en su forma canónica de Jordan. En este caso claramente $(uv^T)^2 = 0$, por lo que el polinomio mínimo de uv^T es λ^2 , y no simplemente λ . Puesto de manera diferente, la multiplicidad algebraica de 0 como autovalor de uv^T es n , mientras que su multiplicidad geométrica es $n - 1$. Finalmente, para exhibir uv^T en su forma canónica de Jordan, uno puede tomar una base ordenada con v como el último elemento, con $\langle v, v \rangle u$ como penúltimo elemento, y con el resto de los elementos elegidos de forma de llenar la base para v^\perp comenzando desde $\langle v, v \rangle u$. Expresada con respecto a esta base, uv^T se representa como la matriz de $n \times n$



que tiene 0's en todas sus entradas salvo en la entrada $(n-1, n)$, que es 1 (i.e., hay un 1 en la última entrada de la penúltima fila, con todas las demás siendo 0).

(ii) Si u y v no son ortogonales, entonces, por lo que hemos dicho más arriba, u es un autovector de uv^T con autovalor $\langle v, u \rangle \neq 0$, lo que claramente significa que el último par autovalor-autovector (*autopar* para abreviar) de uv^T se puede tomar como $(\langle v, u \rangle, u)$, y, en particular, nuestro último autovalor es $\langle v, u \rangle$.

Juntando todo esto, vemos que en todos los casos la lista de autovalores de uv^T (con multiplicidades algebraicas) está dada por $\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ veces}}, \langle v, u \rangle$. Aquí la multiplicidad algebraica de 0 como autovalor de uv^T puede ser n (si $\langle v, u \rangle = 0$) o $n-1$ (si $\langle v, u \rangle \neq 0$).

Con este análisis completo, podemos rápidamente concluir nuestra solución. Vemos que los autovalores de $B = I + uv^T$ están dados por (con multiplicidades algebraicas) $\underbrace{1, \dots, 1}_{n-1 \text{ veces}}, 1 + \langle v, u \rangle$, y por lo tanto

$$\det B = \text{producto de todos sus autovalores} = 1 + \langle v, u \rangle.$$

Especializando ahora al caso de A_n , donde $u = v = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n})^T$, vemos que los autovalores de A_n son $\underbrace{1, \dots, 1}_{n-1 \text{ veces}}, 1 + \langle u, u \rangle$, o $\underbrace{1, \dots, 1}_{n-1 \text{ veces}}, 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$.

Por lo tanto,

$$\det(A_n) = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2},$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \det(A_n) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1 + \frac{\pi^2}{6},$$

pues $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$, por la solución de Euler al problema de Basilea.

Finalmente, para mostrar que A_n es definida positiva, volvemos atrás a $B = B_n = I + uv^T$, especializando al caso $u = v$, y mostramos que $B = I + uu^T$ (que es obviamente una matriz simétrica) es definida positiva. Si x denota un vector arbitrario no nulo en \mathbb{R}^n , tenemos

$$\langle x, Bx \rangle = \langle x, x \rangle + x^T uu^T x = \langle x, x \rangle + \langle x, u \rangle \langle u, x \rangle = |x|^2 + |\langle u, x \rangle|^2 > 0,$$

demostrando que B es definida positiva.

Comentarios. De la determinación del conjunto completo de autovalores de la matriz uv^T dado más arriba (con sus multiplicidades algebraicas) es por supuesto obvio que el polinomio característico de uv^T está dado por

$$P_{uv^T}(\lambda) = \det(\lambda I - uv^T) = \lambda^{n-1}(\lambda - \langle v, u \rangle).$$

Uno entonces puede calcular $\det B_n$ vía

$$\det B_n = \det(I + uv^T) = (-1)^n \det((-1)I - uv^T) = (-1)^n P_{uv^T}(-1) = 1 + \langle v, u \rangle,$$

y así esto provee otra manera de concluir el cálculo de $\det B_n$.



Finalmente, uno también puede llegar a esto calculando el polinomio característico de uv^T directamente, basándose en la fórmula para la expansión del polinomio característico de una matriz C en términos de sus menores principales. Esta caracterización dice que, para una matriz C de $n \times n$,

$$P_C(\lambda) = \lambda^n + \sum_{m=1}^n (-1)^m \lambda^{n-m} [\text{suma de todos los menores principales de orden } m \text{ de } C].$$

Para nuestro caso, con $C = uv^T$, la propiedad del rango uno hace evidente que todos los menores de orden m se anulen para $m \geq 2$. Así nuestra fórmula para el polinomio característico de $C = uv^T$ se reduce a

$$P_{uv^T}(\lambda) = \lambda^n - (\text{Tr} C)\lambda^{n-1} = \lambda^n - (\text{Tr } uv^T)\lambda^{n-1} = \lambda^n - \langle v, u \rangle \lambda^{n-1}.$$

Evaluable en $\lambda = -1$ se obtiene

$$\det(-I - uv^T) = P_{uv^T}(-1) = (-1)^n - \langle v, u \rangle (-1)^{n-1},$$

y por lo tanto,

$$\det(I + uv^T) = (-1)^n [(-1)^n - \langle v, u \rangle (-1)^{n-1}] = 1 + \langle v, u \rangle,$$

como antes.

Como se mencionó antes, existen generalizaciones simples para todo lo anterior en el caso de vectores $u, v \in \mathbb{C}^n$. Más exigente, pero todavía abordable, sería la generalización al caso de perturbaciones de rango dos de la identidad, o incluso perturbaciones de rango k , donde k es un entero arbitrario entre 1 y n . Cualquiera de los métodos recién utilizados (la aproximación vía autovalores y autovectores usada en la demostración principal, o aquella desarrollada en el último párrafo bajo “Comentarios”, usando la caracterización de los coeficientes del polinomio característico de una matriz arbitraria en términos de sus menores principales) se podrían utilizar para empezar a analizar estos problemas más generales (al menos para k pequeño). Uno también podría considerar perturbaciones de rango k de matrices más generales.

2. Soluciones al problema propuesto número 3. Muestre que

$$\int_0^1 x \left\{ \frac{1}{x} \right\} dx = 1 - \frac{\pi^2}{12},$$

donde $\{a\} = a - [a]$ denota la parte fraccionaria del real a .

Solución por Mark S. Ashbaugh, University of Missouri, Columbia, MO.

La ocurrencia de la función “parte fraccionaria” sugiere que dividamos la integral en una suma de integrales sobre intervalos $I_k = [1/(k+1), 1/k)$ para $k = 1, 2, 3, \dots$. Nótese que los intervalos I_k son disjuntos y su unión es $[0, 1)$, que es el intervalo sobre el que debemos integrar. Entonces para $x \in I_k$, $1/x$ estará entre los enteros k y $k+1$. Entonces tiene sentido hacer el cambio de variable en I_k vía $x = 1/(k+t)$, de modo que $1/x = k+t$, con la variable t denotando la parte fraccionaria de $1/x$ en I_k . Tenemos $x = 1/(k+t)$, $dx = -dt/(k+t)^2$, y $\{1/x\} = t$, con $x = 1/(k+1)$ siendo $t = 1$, y $x = 1/k$ siendo $t = 0$. Así podemos escribir

$$\int_0^1 x \left\{ \frac{1}{x} \right\} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_k} x \left\{ \frac{1}{x} \right\} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{1}{k+t} t \frac{dt}{(k+t)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{t}{(k+t)^3} dt.$$



Ahora procedemos a integrar por partes cada integral, tomando $u = t$ y $dv = dt/(k+t)^3$. Esto nos permite llegar a que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{2} \frac{t}{(k+t)^2} \Big|_{t=0}^{t=1} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{(k+t)^2} \right] &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{k+t} \Big|_{t=0}^{t=1} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) \right]. \end{aligned}$$

Los últimos dos términos aquí dan una suma telescópica, y hacen una contribución total de $1/2$. Así nuestra expresión se simplifica a

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) = 1 - \frac{\pi^2}{12},$$

donde en la evaluación final de la serie usamos la fórmula $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$, que Euler obtuvo en su solución al problema de Basilea.

Comentario. Otro modo de concluir el resultado es evitar la integración por partes utilizada en la solución anterior, y en cambio simplificar algebraicamente usando

$$\frac{t}{(k+t)^3} = \frac{(k+t) - k}{(k+t)^3} = \frac{1}{(k+t)^2} - \frac{k}{(k+t)^3}.$$

En este punto es fácil llevar a cabo las integrales, y llegamos a que

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \left\{ \frac{1}{x} \right\} dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{t}{(k+t)^3} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \left(\frac{1}{(k+t)^2} - \frac{k}{(k+t)^3} \right) dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{k+t} + \frac{1}{2} \frac{k}{(k+t)^2} \right] \Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{k+t} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \frac{k}{(k+1)^2} - \frac{1}{2} \frac{k}{k^2} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{k+t} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \frac{(k+1) - 1}{(k+1)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{k} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{k+t} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{k} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2} \right], \end{aligned}$$

que es la misma expresión a la que habíamos llegado en nuestra primera solución, y por lo tanto desde aquí podemos concluir como antes.



Solución por Jorge Faúndez, PUC, Santiago, Chile.

De la definición de la parte fraccionaria se tiene que

$$\int_0^1 x \left\{ \frac{1}{x} \right\} dx = \int_0^1 x \frac{1}{x} dx - \int_0^1 x \left[\frac{1}{x} \right] dx = 1 - \int_0^1 x \left[\frac{1}{x} \right] dx.$$

Ahora,

$$\left[\frac{1}{x} \right] = k \iff k \leq \frac{1}{x} < k+1 \iff \frac{1}{k+1} < x \leq \frac{1}{k}.$$

Así, por Teorema de Fubini se sigue que

$$\int_0^1 x \left[\frac{1}{x} \right] dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{1/(k+1)}^{1/k} kx dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right).$$

Probaremos ahora que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Lo anterior se puede hacer de dos formas. La primera es la siguiente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^k 1 \right) \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right),$$

y cambiando el orden de las sumas se llega a que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}.$$

Otra forma de ver el resultado anterior es la siguiente. Definiendo

$$S_n = \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right),$$

se puede probar fácilmente, usando inducción u otro método, que

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \frac{n}{(n+1)^2},$$

de donde se sigue que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Así, se tiene finalmente que

$$\int_0^1 x \left\{ \frac{1}{x} \right\} dx = 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x \left[\frac{1}{x} \right] dx = 1 - \frac{\pi^2}{12}.$$

3. Sea ABC un triángulo con $BC = a$, $CA = b$, y $AB = c$. Sea r_a el radio del excírculo tangente a BC , r_b el radio del excírculo tangente a CA , y r_c el radio del excírculo tangente a AB . Probar que

$$\frac{r_a r_b}{(a+b)^2} + \frac{r_b r_c}{(b+c)^2} + \frac{r_c r_a}{(c+a)^2} \leq \frac{9}{16}.$$



(Enunciado publicado originalmente en la revista *Mathematics Magazine* como problema 1829.)

Solución por Sebastián García Sáenz, PUC, Santiago, Chile.

Los exradios y los lados de un triángulo están relacionados por las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} r_a &= \frac{\Delta}{s-a} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{(s-a)}}, \\ r_b &= \frac{\Delta}{s-b} = \sqrt{\frac{s(s-c)(s-a)}{(s-b)}}, \\ r_c &= \frac{\Delta}{s-c} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{(s-c)}}, \end{aligned}$$

donde Δ denota el área del triángulo, y usamos la fórmula de Herón para expresar Δ en términos del semiperímetro s . Se sigue entonces que

$$\begin{aligned} r_a r_b &= s(s-c) = \frac{1}{4}(a+b+c)(a+b-c) = \frac{1}{4}((a+b)^2 - c^2), \\ r_b r_c &= s(s-a) = \frac{1}{4}(b+c+a)(b+c-a) = \frac{1}{4}((b+c)^2 - a^2), \\ r_c r_a &= s(s-b) = \frac{1}{4}(c+a+b)(c+a-b) = \frac{1}{4}((c+a)^2 - b^2). \end{aligned}$$

Denotando por S_1 a la suma dada, tenemos entonces que

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{4} \left[\frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2} + \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2} + \frac{(c+a)^2 - b^2}{(c+a)^2} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[3 - \left(\frac{c^2}{(a+b)^2} + \frac{a^2}{(b+c)^2} + \frac{b^2}{(c+a)^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

La suma entre paréntesis se puede acotar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} S_2 &\equiv \frac{c^2}{(a+b)^2} + \frac{a^2}{(b+c)^2} + \frac{b^2}{(c+a)^2} \\ &\geq \frac{1}{3} \left(\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} \right)^2 \\ &\geq \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

La primera desigualdad corresponde a la desigualdad de Cauchy-Schwarz, mientras que la segunda corresponde a la desigualdad de Nesbitt (notar que $a, b, c > 0$). Finalmente,

$$S_1 = \frac{1}{4} (3 - S_2) \leq \frac{1}{4} \left(3 - \frac{3}{4} \right) = \frac{9}{16}.$$

Comentario. También es posible encontrar una cota superior para S_2 , de donde se sigue una cota inferior para S_1 . De la desigualdad triangular, se tiene que $a+b > s$, $b+c > s$, y $c+a > s$. Entonces,

$$S_2 < \frac{a^2 + b^2 + c^2}{s^2} = 4 \frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)^2}.$$



Además, la desigualdad triangular también implica que las variables $x = b+c-a$, $y = c+a-b$, $z = a+b-c$ deben ser estrictamente positivas. Así,

$$\begin{aligned} 2(a^2 + b^2 + c^2) &= \frac{1}{2}((x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \\ &< x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \\ &= (x+y+z)^2 \\ &= (a+b+c)^2. \end{aligned}$$

Así se concluye que $S_2 < 2$, y por lo tanto $S_1 > 1/4$. Esta cota inferior es alcanzada sólo si consideramos un triángulo degenerado en el cual uno de sus lados mide cero, y los otros dos tienen igual longitud.

Finalmente podemos escribir las cotas para la suma original:

$$\frac{1}{4} < \frac{r_a r_b}{(a+b)^2} + \frac{r_b r_c}{(b+c)^2} + \frac{r_c r_a}{(c+a)^2} \leq \frac{9}{16}.$$

4. Sean a_1, \dots, a_n no negativos y sea r un entero positivo. Muestre que

$$\left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i^r j^r a_i a_j}{i+j-1} \right)^2 \leq \sum_{m=1}^n m^{r-1} a_m \sum_{1 \leq i, j, k \leq n} \frac{i^r j^r k^r a_i a_j a_k}{i+j+k-2}.$$

(Enunciado publicado originalmente en la revista *American Mathematical Monthly* como problema 11458.)

Solución por Francisco Vial, *École Polytechnique, París, Francia*.

Usaremos una función generatriz para la sucesión a_1, \dots, a_n y la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Sea

$$f(x) := \sum_{i=1}^n i^r a_i x^{i-1}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \sum_{i=1}^n \frac{i^r a_i}{i} = \sum_{m=1}^n m^{r-1} a_m, \\ \int_0^1 f(x)^2 dx &= \int_0^1 \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} i^r j^r a_i a_j x^{i+j-2} \right) dx = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i^r j^r a_i a_j}{i+j-1}, \\ \int_0^1 f(x)^3 dx &= \int_0^1 \left(\sum_{1 \leq i, j, k \leq n} i^r j^r k^r a_i a_j a_k x^{i+j+k-3} \right) dx = \sum_{1 \leq i, j, k \leq n} \frac{i^r j^r k^r a_i a_j a_k}{i+j+k-2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la desigualdad propuesta es equivalente a

$$\left(\int_0^1 f(x)^2 dx \right)^2 \leq \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \left(\int_0^1 f(x)^3 dx \right),$$

que se sigue por la desigualdad de Cauchy-Schwarz con las funciones $f(x)^{1/2}$, $f(x)^{3/2}$ y el producto interno estándar (notar que, como $a_i \geq 0$, $f(x) \geq 0$ en $[0, 1]$, estas funciones son reales y bien definidas).



Comentario. “ r ” puede ser cualquier número real, no necesariamente un entero. De hecho, la misma desigualdad se cumple si usamos cualquier función positiva en $[1, n]$ en vez de $i^r a_i$. Por ejemplo, usando la función exponencial,

$$\left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{e^{i+j}}{i+j-1} \right)^2 \leq \sum_{m=1}^n \frac{e^m}{m} \sum_{1 \leq i, j, k \leq n} \frac{e^{i+j+k}}{i+j+k-2}.$$

5. Sean α, β número reales positivos, y r un número racional. Encontrar condiciones necesarias y suficientes para que existen infinitos $m \in \mathbb{N}$ tales que

$$\frac{\lfloor m\alpha \rfloor}{\lfloor m\beta \rfloor} = r.$$

(Enunciado publicado originalmente en la revista *Mathematics Magazine* como problema 1830.)

Solución por Andrés Fielbaum, Universidad de Chile, Santiago, Chile.

La condición es simplemente $\frac{\alpha}{\beta} = r$. Veamos primero que es una condición necesaria. Sabemos que existe una sucesión estrictamente creciente de enteros $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\frac{\lfloor m_k \alpha \rfloor}{\lfloor m_k \beta \rfloor} = r \quad \forall k$. Definamos ahora la secuencia

$$w_k = \frac{\lfloor m_k \alpha \rfloor}{\lfloor m_k \beta \rfloor}$$

Por lo ya discutido, es claro que w_k es una sucesión constante e igual a r . Pero además tenemos que

$$\frac{m_k \alpha}{m_k \beta + 1} \leq w_k \leq \frac{m_k \alpha + 1}{m_k \beta}.$$

Las sucesiones que acotan a w_k claramente convergen a $\frac{\alpha}{\beta}$, luego por el teorema del sandwich $w_k \rightarrow \frac{\alpha}{\beta}$, y tenemos así que $r = w_k \rightarrow \frac{\alpha}{\beta}$, i.e., $r = \frac{\alpha}{\beta}$.

Veamos ahora que la condición es suficiente. Notemos que $r = \frac{q}{p}$ para ciertos p, q naturales, tenemos entonces $\beta = \frac{p\alpha}{q}$. Dividamos la demostración en dos casos:

Caso 1: α es racional. Escribimos entonces $\alpha = \frac{a}{b}$ para ciertos a, b naturales, y tomemos m de la forma $m = kbq$, para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Entonces $m\alpha = kqa$, $m\beta = kpa$, y luego $\frac{\lfloor m\alpha \rfloor}{\lfloor m\beta \rfloor} = \frac{m\alpha}{m\beta} = \frac{q}{p} = r$. Como k es cualquier natural, tenemos infinitos m que cumplen la condición buscada.

Caso 2: α es irracional. Tomemos $m = nq$, y definamos $x = n\alpha$. Probaremos que si $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \left[k, k + \frac{1}{\max(p, q)} \right)$, entonces $\frac{\lfloor m\alpha \rfloor}{\lfloor m\beta \rfloor} = \frac{\lfloor qx \rfloor}{\lfloor px \rfloor} = r$ (notar que la primera igualdad es directa del hecho que $\frac{\alpha}{\beta} = r$). En efecto,

$$kq \leq xq < \left(k + \frac{1}{\max(p, q)} \right) q \leq kq + 1 \Rightarrow \lfloor xq \rfloor = kq.$$

Análogamente encontraremos que $\lfloor xp \rfloor = kp$ y de ahí se concluye lo antes afirmado.

Para terminar la demostración, basta probar que existen infinitos $n \in \mathbb{N}$ tales que $n\alpha$ entra en un intervalo de la forma $\left[k, k + \frac{1}{\max(p, q)} \right)$. Esto es equivalente a probar que la secuencia $z_n = \{n\alpha\}$ tiene una subsucesión convergente a 0. Un resultado conocido nos indica que, dado que α es irracional, el conjunto $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $[0, 1]$, por lo que tiene tal subsucesión, lo que concluye la demostración.



El Profesor Gunther Uhlmann recibe el Premio Bôcher de la AMS.

Gunther Uhlmann, profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Washington, en Seattle, obtuvo el Premio Bôcher de la American Mathematical Society (AMS) en Enero recién pasado. El premio le fue otorgado “por su trabajo fundamental sobre problemas inversos y, en particular por la solución del problema de Calderón en los artículos: *The Calderón problem with partial data* (escrito en colaboración con Carlos E. Kenig y Johannes Söstrand, *Annals of Math.* **165** (2007), 567–591) y *The Calderón problem with partial data in two dimensions* (escrito en colaboración con Oleg Yu. Imanuvilov, y Masahiro Yamamoto, *J. Amer Math. Soc.* **23** (2010), 655–691)”. El premio también reconoce el destacado trabajo sobre rigidez de frontera con L. Pestov y P. Stefanov y sobre no unicidad (en otras palabras *el problema de invisibilidad*) con A. Greenleaf, Y. Kurylev, y M. Lassas. Gunther Uhlmann nació en Quillota, Región de Valparaíso, Chile, en 1952. Estudió en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile, donde obtuvo su Licenciatura en Matemáticas en 1973. Luego continuó sus estudios en el MIT, donde recibió su doctorado en 1976 bajo la dirección de Victor Guillemin.



Tuvo posiciones postdoctorales en el MIT, Harvard y en el Courant Institute de Nueva York. Desde 1980 fue Profesor Asistente en el MIT, y en 1985 se trasladó a la Universidad de Washington, donde fue nominado como “Walker Family Endowed Professor” en 2006. A partir del 2010 también tiene la “Endowed Excellence in Teaching Chair” en la Universidad de California, Irvine. Gunther Uhlmann obtuvo la “Sloan Research Fellowship” en 1984, y la “John Simon Guggenheim Fellowship” en 2001. También en 2001 fue elegido como Miembro Correspondiente de la Academia Chilena de Ciencias. Gunther Uhlmann es “Fellow” del Institute of Physics desde el 2004. Fue elegido a la American Academy of Arts and Sciences (AAAS) en el 2009 y Fellow de la Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM, en el 2010. Gunther Uhlmann fue Conferencista Invitado en el Congreso Internacional de Matemáticos, ICM, en Berlín, en 1998, y Charlista Plenario en el ICIAM de Zürich, en el 2007. Recientemente, el Profesor Uhlmann fue nominado como uno de los seis Senior Scholars para el período 2010–2011 por el Instituto Clay. También ha recibido el Chancellor’s Award del Instituto MSRI y de la Universidad de California, Berkeley, premio que reconoce a investigadores sobresalientes que al mismo tiempo se destacan por su excelencia en la enseñanza. El Profesor Gunther Uhlmann ha sido invitado a presentar la “6th AMS Einstein Public Lecture in Mathematics”, que tendrá lugar en el campus de la Universidad George Washington, en Washington D.C., el sábado 17 de Marzo de 2012. La “AMS Einstein Public Lecture” se da anualmente en una de las ocho reuniones seccionales de la Sociedad. Estas Charlas empezaron el 2005 como una manera de celebrar el centésimo aniversario del *annus mirabilis* de Albert Einstein, i.e., 1905, año que marcó la publicación de tres artículos fundamentales de Albert Einstein que cambiaron el curso de la Física del Siglo XX.