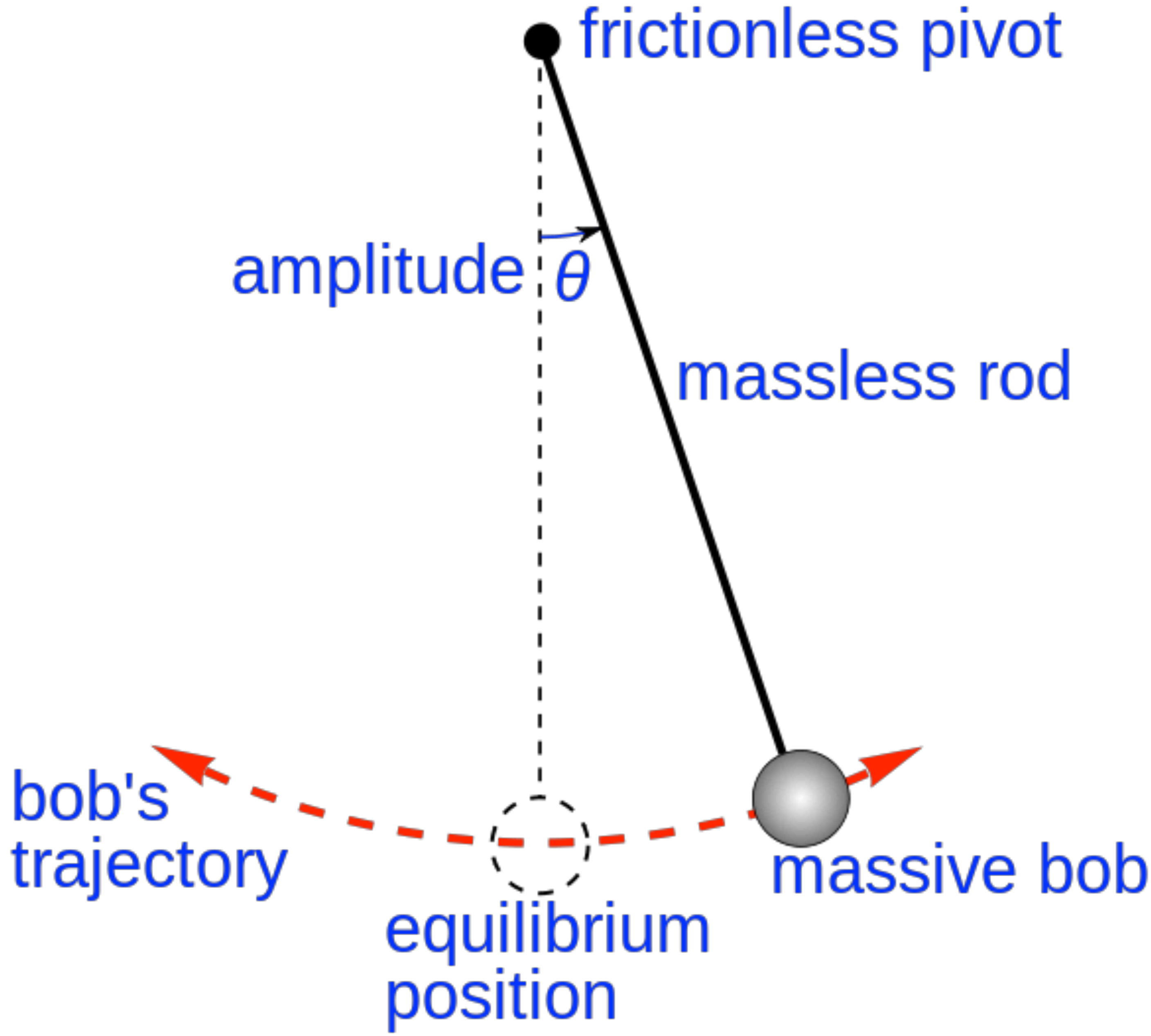
¿Se puede escuchar la forma de un tambor ?

Rafael Benguria,
Instituto de Física, PUC

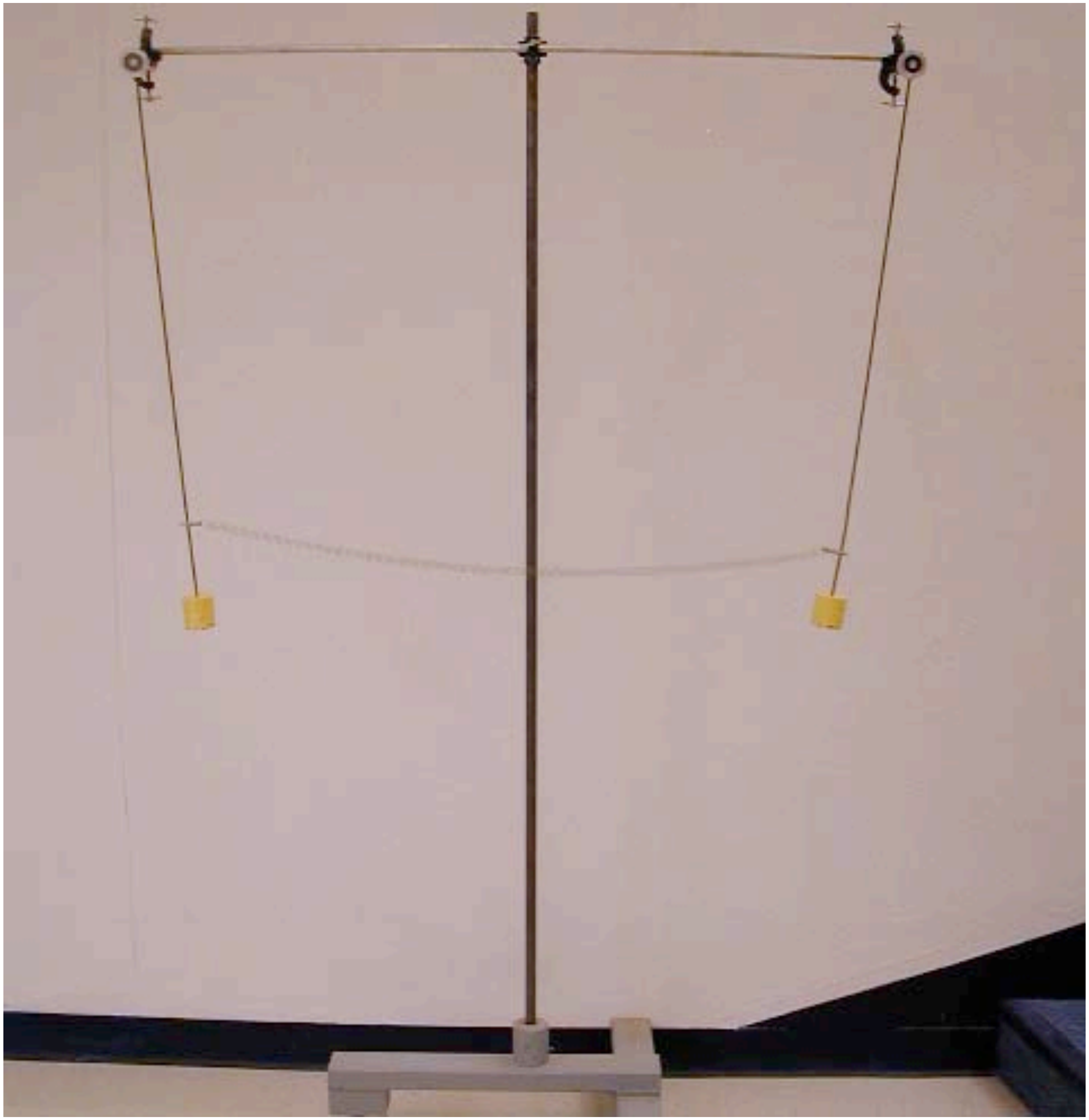
Instituto de Sistemas Complejos
de Valparaíso.
Viernes 8 de Noviembre de 2013

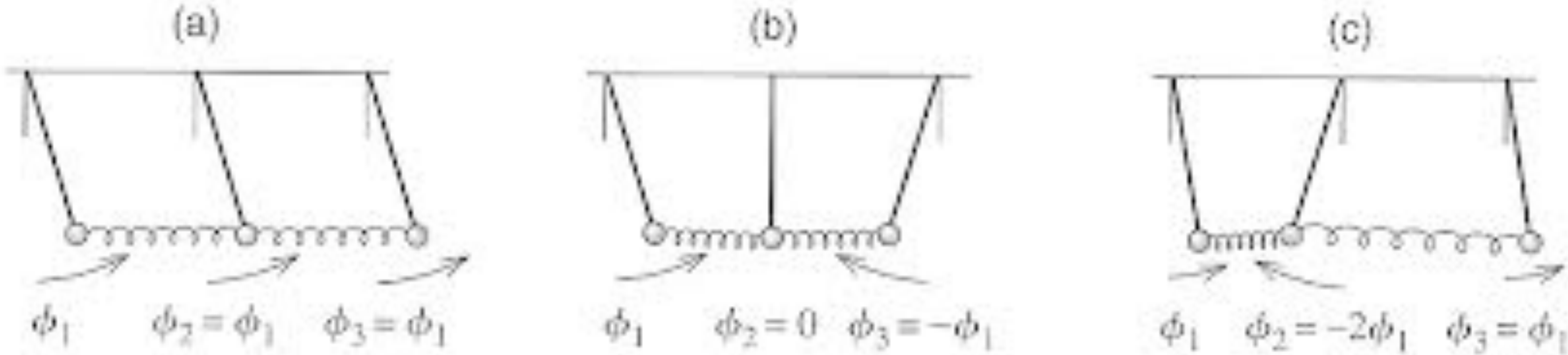

frictionless pivot
amplitude
θ
massless rod
bob's
trajectory
equilibrium
position
massive bob

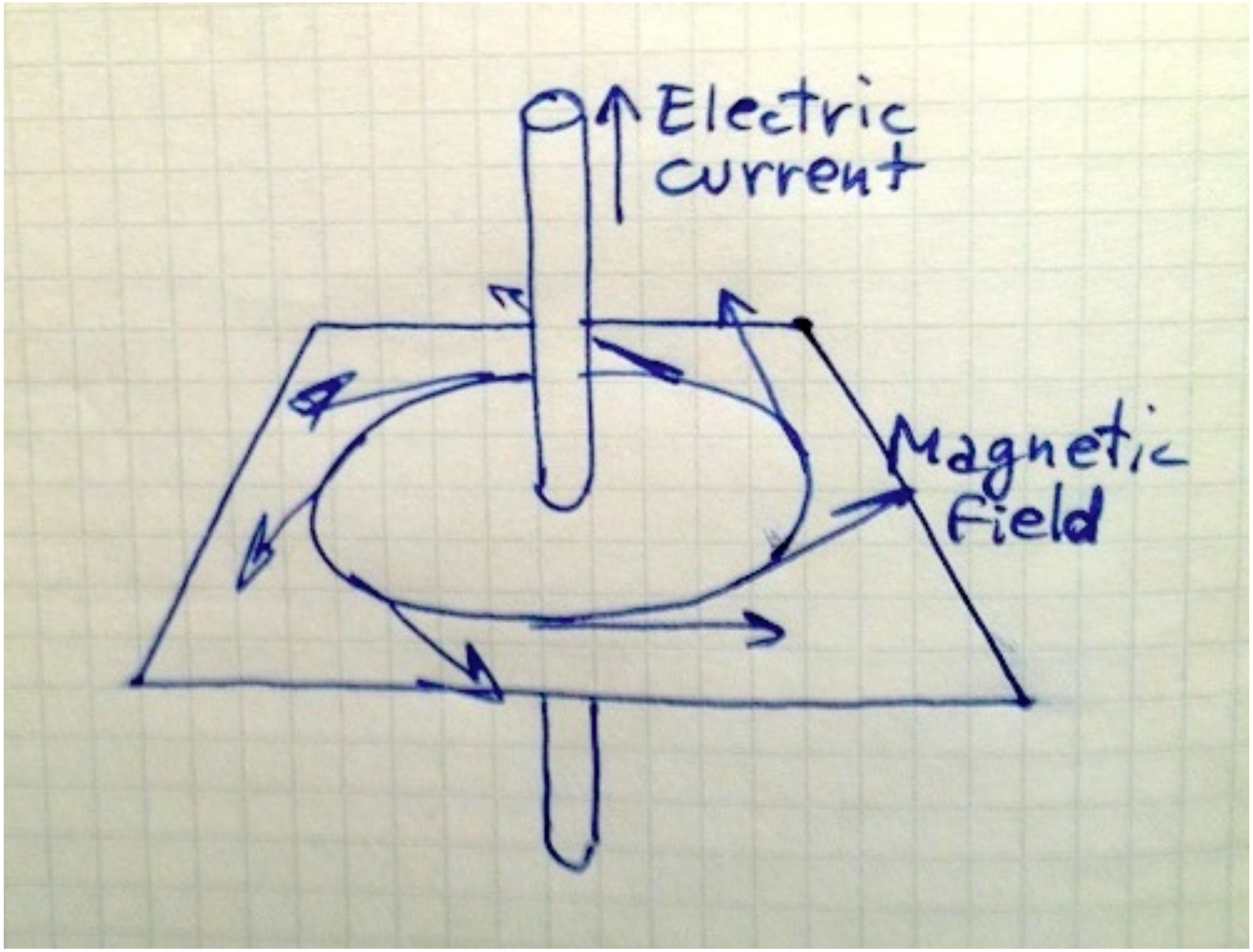
El período del péndulo:

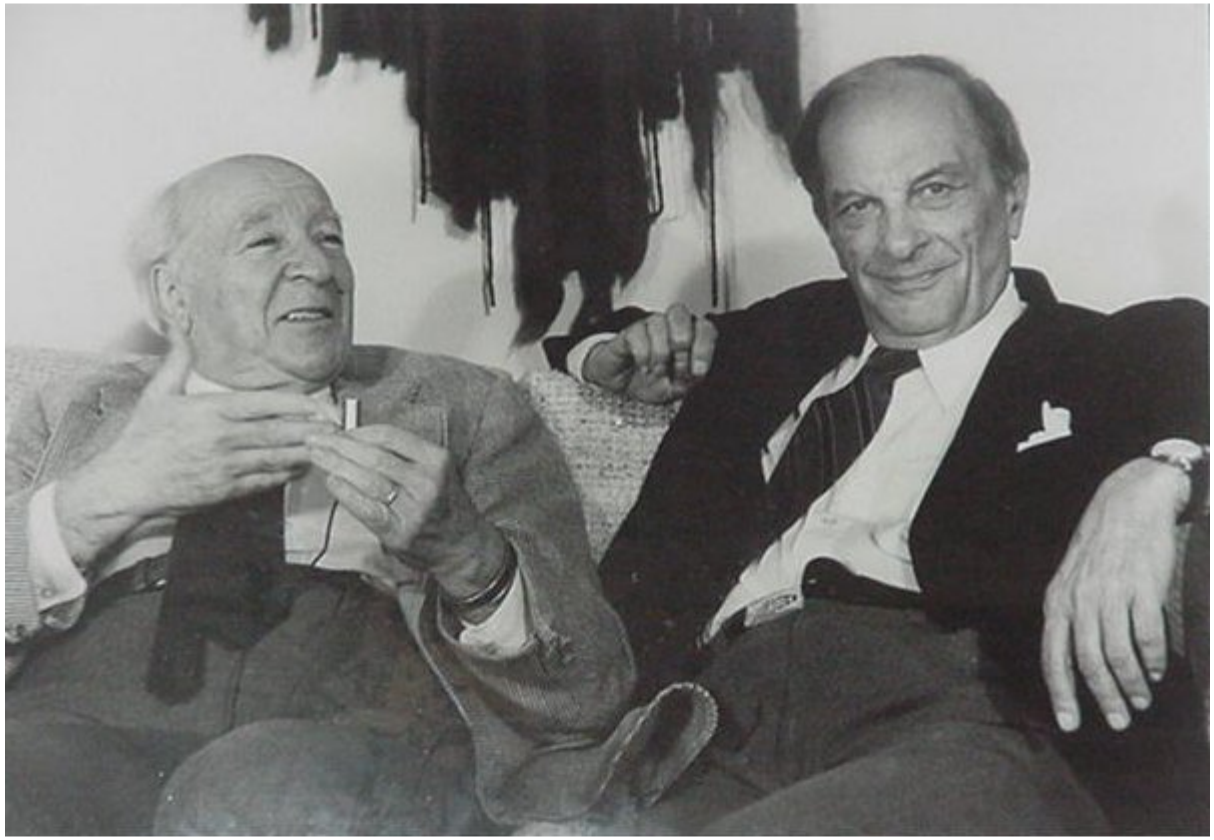
Galileo, Huygens:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$




(a)
(b)
(c)
ϕ_1
$\phi_2 = \phi_1$
$\phi_3 = \phi_1$
ϕ_1
$\phi_2 = 0$
$\phi_3 = -\phi_1$
ϕ_1
$\phi_2 = -2\phi_1$
$\phi_3 = \phi_1$


Electric current
Magnetic field



En recuerdo del profesor, Mark Kac (1914-1984).

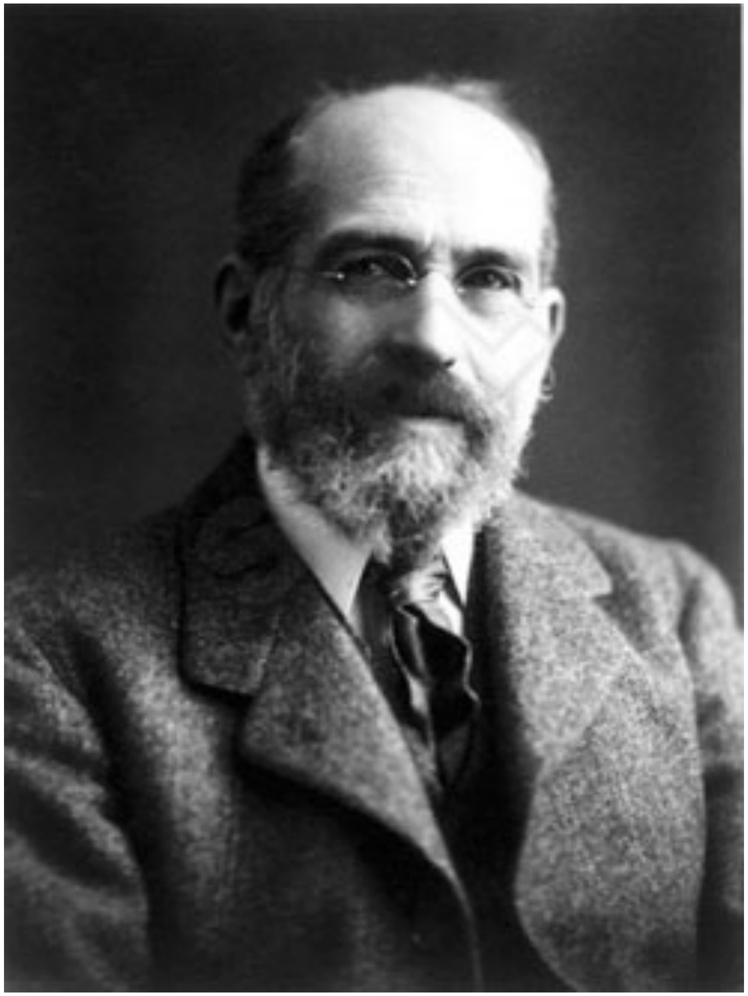
Mark Kac (izquierda) y Stan Ulam (derecha) en la casa de S. Ulam, en Santa Fé (NM, EE.UU.).

We know a great deal more about the vibrations of sound than about those which produce the vibration of light. To find out the different tunes sent by a vibrating system is a problem which may or may not be solvable in certain special cases,…

…..but it would baffle the most skilful mathematician to solve the inverse problem, and find out the shape of a bell by means of the sound which is capable of sending out.

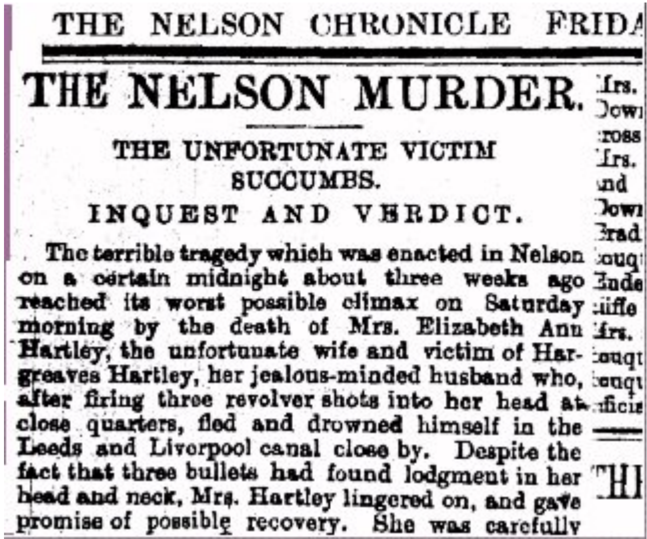
And this is the problem which ultimately spectroscopy hopes to solve in the case of light. In the meantime we must welcome with delight even the smallest step in the desired direction.

Sir Arthur Schuster (1882)



Fotografía tomada en 1903 en
Owens Lab. (hoy Schuster Lab.),
Universidad de Manchester.

Sir Arthur Schuster (1851-1934)



THE NELSON CHRONICLE FRIDA

THE NELSON MURDER.

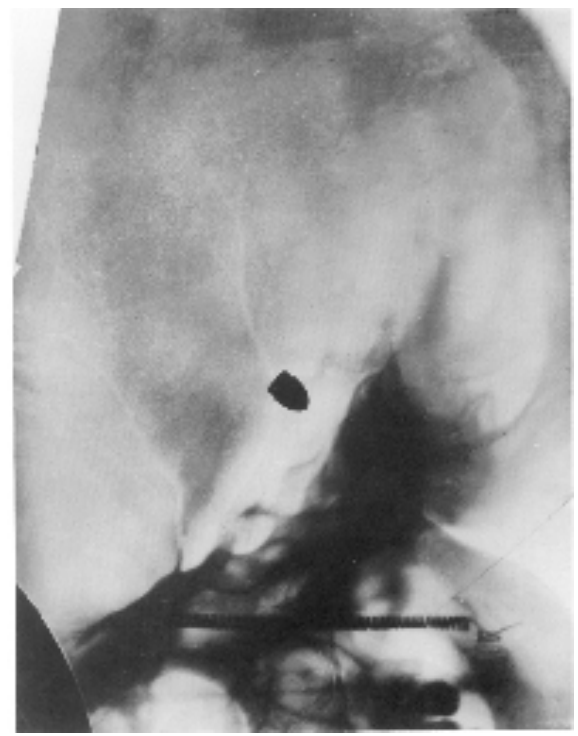
THE UNFORTUNATE VICTIM SUCCUMBS.

INQUEST AND VERDICT.

The terrible tragedy which was enacted in Nelson on a certain midnight about three weeks ago reached its worst possible climax on Saturday morning by the death of Mrs. Elizabeth Ann Hartley, the unfortunate wife and victim of Hargreaves Hartley, her jealous-minded husband who, after firing three revolver shots into her head at close quarters, fled and drowned himself in the Leeds and Liverpool canal close by. Despite the fact that three bullets had found lodgment in her head and neck, Mrs. Hartley lingered on, and gave promise of possible recovery. She was carefully

The incident which led to their first use in the field occurred in Nelson following the shooting of Elizabeth Ann Hartley on 23 April 1896.

Primera fotografía
Médica tomada por
Arthur Schuster
(Abril de 1896, Nelson,
Cerca de Manchester),
A la Sra. E. A. Hartley.



Arthur Schuster trabajo en Espectroscopía, Geomagnetismo, Astronomía, Física Matemática y Economía. Fue el primero en introducir la idea de antimateria.

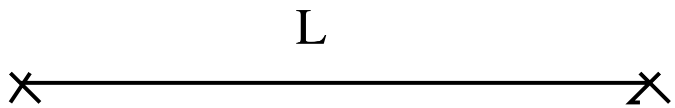
En 1907 renunció a su cátedra en Manchester para dar su puesto a Ernest Rutherford.

Su autobiografía, escrita en 1932 se llama "Biographical Fragments".

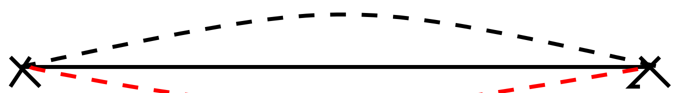
Parte de su vida está escrita en la monografía reciente:
Helge Kragh, "Quantum Generations, A History of Physics in the 20th Century", Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000.

Schuster Lab. (Dept. of Physics), U. Manchester.

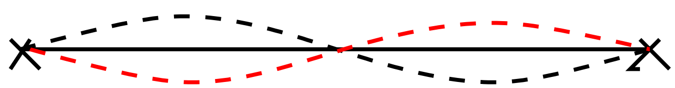
Modos normales de una cuerda vibrante:



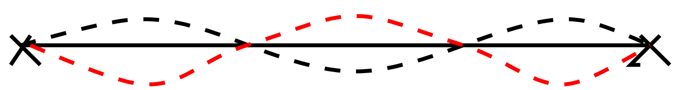
$$\lambda\,\nu = c \qquad \nu = \frac{\omega}{2\pi}$$



$$\lambda_1 = 2L \qquad \nu_1 = \frac{c}{2L}$$



$$\lambda_2 = L \qquad \nu_2 = \frac{c}{L} = 2\,\nu_1$$



$$\lambda_3 = \frac{2}{3}L \qquad \nu_3 = \frac{3}{2}\,\frac{c}{L} = 3\nu_1$$

En general, para las vibraciones transversales de una cuerda de largo L, tenemos infinitos (numerables) modos normales de vibración, y la enésima frecuencia propia está dada por:

$$\nu_n = n\frac{c}{2L} = n\nu_1$$

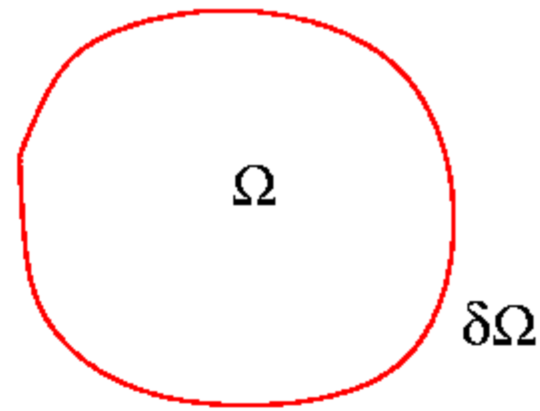
Basta conocer la primera frecuencia de vibración (y por supuesto c)
Para determinar el largo de la cuerda: L.

Por lo tanto, "se puede escuchar" el largo de la cuerda.

Modos normales…

$$-\Delta u_n = \lambda_n u_n \quad \text{en} \quad \Omega$$

$$u_n = 0 \quad \text{en} \quad \delta\Omega$$



Los u_n forman "base", y podemos escribir,

$$Z(t) = Tr(\exp(- t\, \Delta))$$

Pero $\exp(-t \;\Delta\;)$ es el "nucleo" de la ecuacion del calor en el dominio (que es dificil de calcular!). Sin embargo, para t pequeños, se puede aproximar por el nucleo del calor del espacio total. Haciendo esto con cuidado Mark Kac obtuvo:

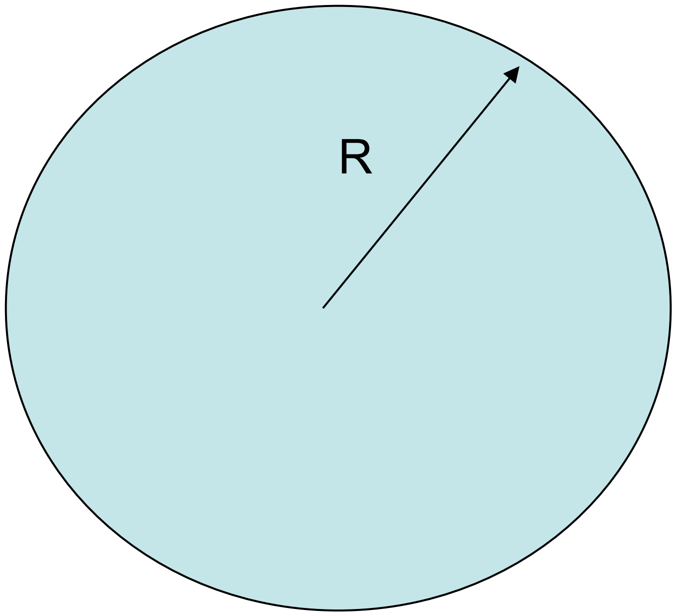
Frecuencias propias de vibración de una membrana rectangular.

$$\lambda_{n,m} = \pi^2[(\frac{n}{a})^2 + (\frac{m}{b})^2].$$

$$n = 1, 2, \ldots \quad m = 1, 2, \ldots$$

$$\nu_{n,m} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\lambda_{n,m}}.$$

Frecuencias propias de vibración
de una membrana circular.



$$\lambda_{k,n} = \frac{j_{n,k}^2}{R^2}.$$

$$k = 1, 2, \ldots \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\nu_{k,n} = \tfrac{c}{2\pi}\sqrt{\lambda_{k,n}}.$$

H. A. Lorentz

D. Hilbert

H. Weyl

Se puede "escuchar" el area:

A fines de Octubre de 1910, H. A. Lorentz fue invitado a la Universidad de Gottingen a dar la Conferencia Wolfskehl.

El titulo de su charla fue: "Alte und neue Fragen der Physik".

Al final de su charla propuso el problema de caracterizar

$N(\lambda)$ = Numero de autovalores menores o iguales a λ,

como función del volumen de la región donde está definido el problema.

En verdad, Lorentz estaba trabajando en los modos normales de una cavidad electromagnetica en tres dimensiones, basado en cálculos de Jeans sobre la radiación del cuerpo negro.

En el lenguaje de las membranas o tambores, y Basados en cálculos para distintas geometrías, Lorentz conjeturó:

$$\boxed{N(\lambda) \approx \frac{|\Omega|}{6\pi^2}\lambda^{3/2}.}$$

H.A. Lorentz

J. Jeans

Existe un informe apocrifo que dice que Hilbert predijo que la conjetura de Lorentz no seria demostrada antes que él (i.e., Hilbert) muriera.

…sin embargo…

En 1911, Hermann Weyl, que estaba presente en la conferencia de Lorentz, la cual atrajo su interés, demostró la Conjetura, i.e.,

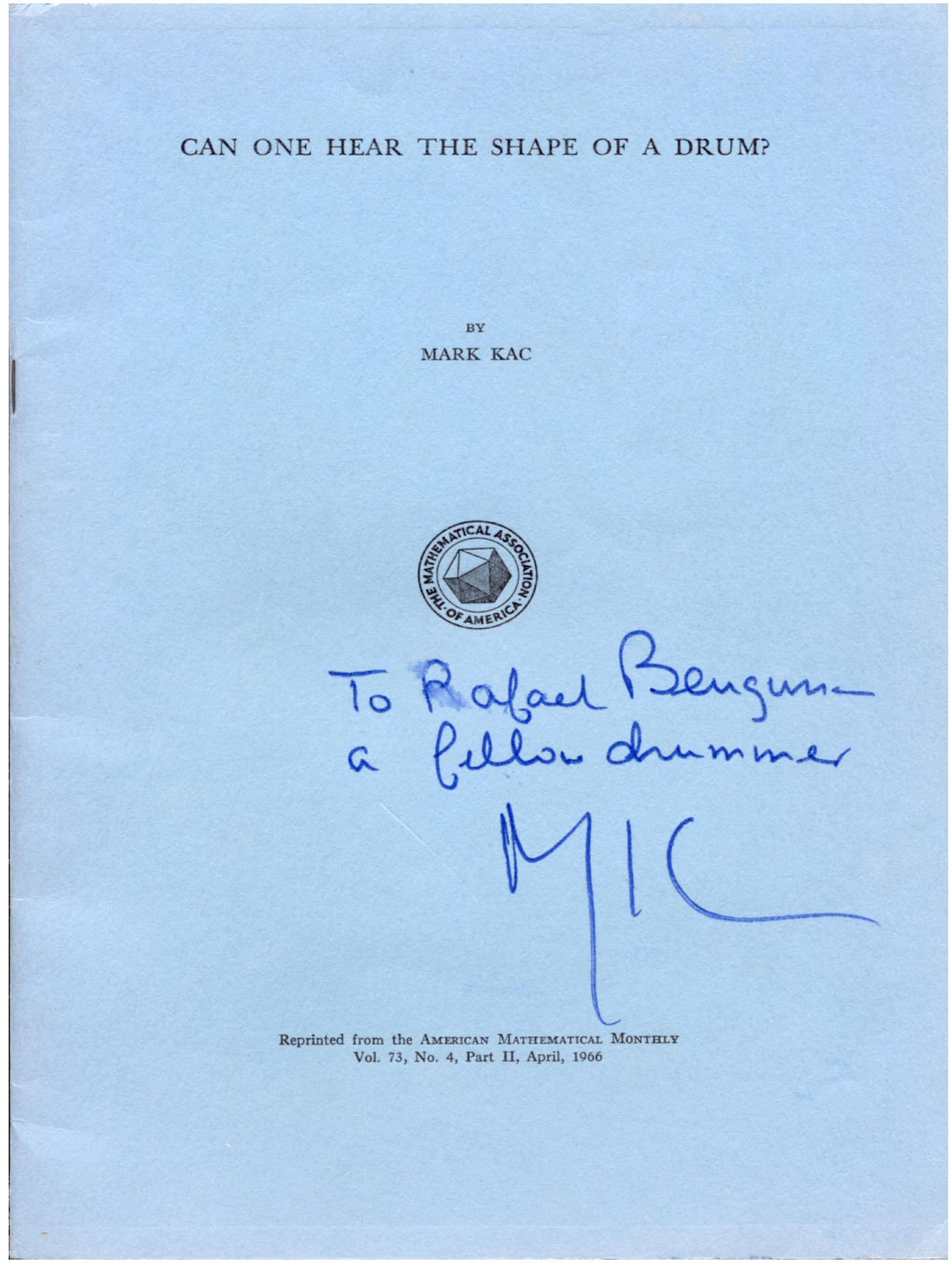
$$\lim_{\lambda \to \infty} N(\lambda)\lambda^{-1} = \frac{|\Omega|}{4\pi}$$

David Hilbert (1900)

Hermann Weyl

En 1966, Mark Kac escribió,
en honor a George Uhlenbeck
el artículo,

"Can one hear the shape of a Drum?", Amer. Math. Monthly, 73, pp. 1-23 (1966),
el cual obtuvo el premio
Chauvenet de la MAA.



En dicho trabajo, demuestra
que se puede "escuchar" el
área, el perímetro y el número
de agujeros de una membrana
cuyo borde es suave.

La "funcion partición":

En lugar de considerar la funcion N(λ), Mark Kac usa la función partición:

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-\lambda_n t\}$$

Obviamente Z(t) va a cero cuando t crece hacia infinito. Por otra parte Z(t) diverge cuando t va a cero. Pero, cómo diverge? El Teorema de H. Weyl (1911) equivale a decir que:

$$Z(t) \approx \frac{1}{4\pi\, t} |\Omega|$$

La función Theta de Riemann y el comportamiento para t chico de la funcion Z(t) para el dominio rectangular:

La funcion Theta de Riemann esta definida como:

$$\Theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x},$$

Usando análisis armónico (series de Fourier) se puede demostrar que: (relación unimodular)

$$\Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\Theta\left(\frac{1}{x}\right).$$

La funcion Theta de Riemann es usada en Mecánica Estadística para calcular la función partición de un gas ideal.

Hoy día, la función Theta de Riemann es muy usada en diversos cálculos de modelos de cuerda en Física de Altas Energías.

Usando la función Theta de Riemann y los autovalores del rectángulo, se puede calcular facilmente que (para el rectángulo):

$$Z(t) = \frac{1}{4}\left[\Theta(\frac{\pi t}{a^2}) - 1\right]\left[\Theta(\frac{\pi t}{b^2}) - 1\right] \approx \frac{1}{4\pi t}ab - \frac{1}{4\sqrt{\pi t}}(a+b) + \frac{1}{4}.$$

$$Z(t) = \frac{1}{4\pi t}A - \frac{1}{8\sqrt{\pi t}}L + \frac{1}{4} + O(t).$$

Fórmula de Mark Kac: (Amer. Math. Monthly, 1966)

$$Z(t) = \frac{1}{4\pi t} A - \frac{1}{8\sqrt{\pi t}} L + \frac{1}{6}(1 - r) + O(t).$$

Se puede escuchar el área, el perímetro y el número de agujeros de "tambores" suaves. También se puede escuchar los ángulos de las esquinas en dominios quebrados (e.g., rectángulos).

El primer término es el término de Herman.Weyl (1911), el segundo de Ake Pleijel (1954) y el tercero de Mark Kac (1966).

Portada de la biografía de Mark Kac,
Por H. McKean, NAS, EE.UU.

Mark Kac (alrededor de 1980).

MARK KAC (1914-1984)

Nació en Krzemieniec, entonces parte del Imperio Ruso (Ukrania).

Estudió en la Univesidad de Lwow (entonces Polonia), donde obtuvo su doctorado con Hugo Steinhaus.

En diciembre de 1938 emigró a EE.UU. donde trabajó en las universidades: Johns Hopkins, Cornell, Rockefeller y Southern California, LA.

Hizó importantes trabajos en: Teoría Probabilista de Números (el Teorema del Límite Central para la distribución de números primos: Teorema de Erdös-Kac), Mecánica Cuántica (la fórmula de Feynman-Kac), Mecánica Estadística (el modelo esférico de Kac).

Es muy conocido por su trabajo:

Can one hear the shape of a drum?

La Universidad John Casimir, en Lwow (entonces Polonia, hoy Ucrania) fué uno de los centros matemáticos mas importantes entre las dos guerras mundiales. Fue fundada en 1661.

Muchos físicos y matemáticos famosos trabajaron o estudiaron en esa universidad. Entre los primeros, Marian Smoluchowski. Entre los segundos, Hugo Steinhaus (alumno de Hilbert), Stefan Banach, Mark Kac, Stanislaw Ulam, Juliusz Schauder, Stanislaw Mazur, y muchos otros.

La plaza de la Ascencion, Lwow.

Lwow= Lviv = Lemberg = Leopolis.

Teatro de la Opera, Lwow

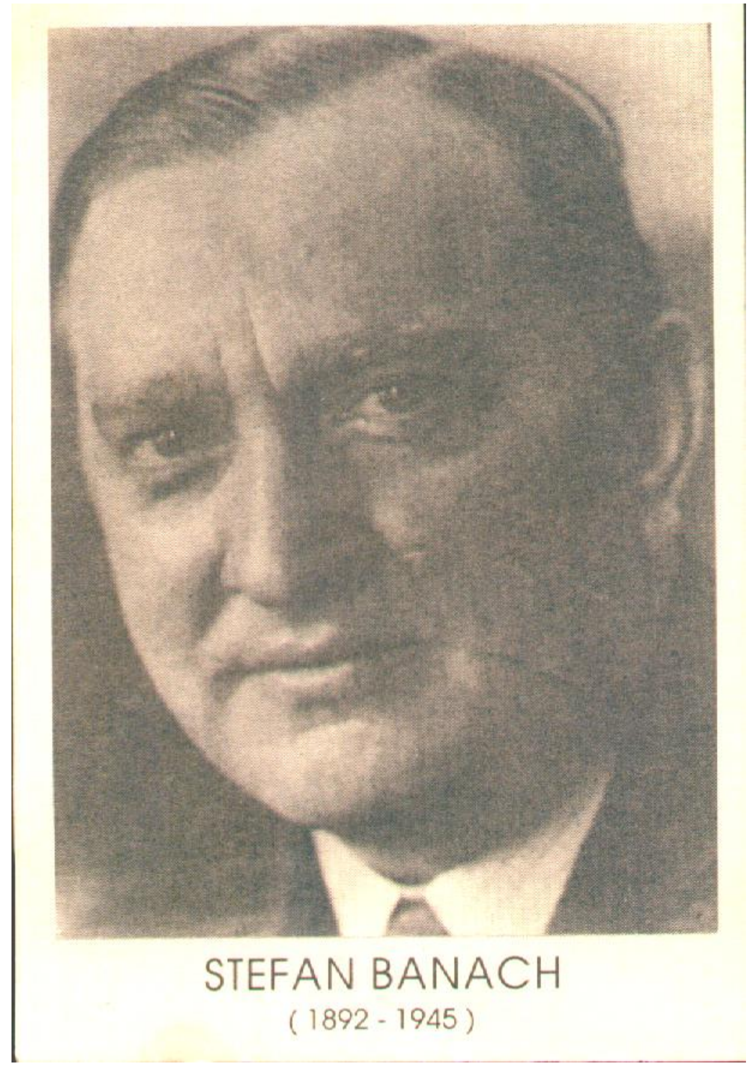
El café escoces (Szkocka Cafe) se encontraba en 9 Akademicki Square. Hoy se llama Desertniy Bar y se encuentra en T. Shevchenko Prospect 27.

Café Escoces, Lwow.

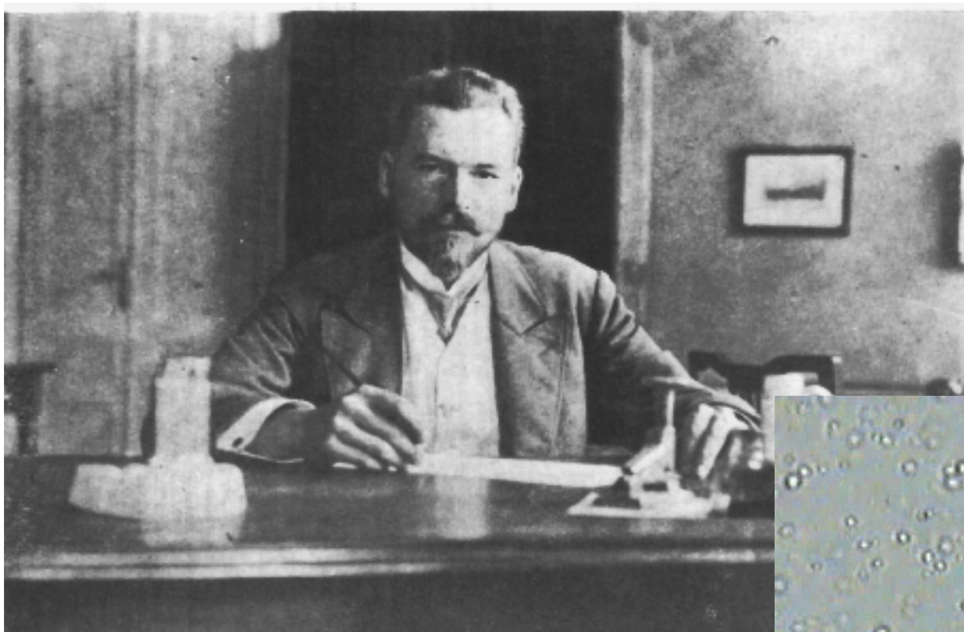

MAPQUEST
0
30 mi
30 km
Krasnik
Krasnystaw
Zamosc
Vladymir Volinskij
Luck
Stalowa Wola
Rudnik
Cervonograd
Dubno
Lezajsk
Lubaczow
Nemirov
Rzeszow
Kremenec
Javorov
Lvov
Zolocev
Lanovcy
Przemysl
Sanok
Sambor
Nicolajev
Chodorov
Ternopol
Berezany
Zidacov
Drogobyc
Medzilaborce
Borislav
Stryj
Burstyn
Terebovla
Bucac
Dolina
Humenne
Ivano Frankovsk
Michalovce
Borscev
© 1997 GeoSystems Global Corp.; © 1997 AND Mapping B.V.

Poland
Belarus
Russia
Ukraine
Czech
Hungary
Moldova
Romania
Bulgaria
Minsk
Warsaw
Bucharest
Sophia
Chisinau
Kiev
Bug R.
Vistula R.
Pripyat' R.
Dniepr R.
Desna R.
Don R.
Dnestr R.
Tisza R.
Prut NR
Dnepr R.
Danube R.
Kovel'
Lut'sk
Rivno
Korosten'
Chornobyl
Zhytomyr
L'vov
Ternopol'
Khmel'nyts'kyy
Ivano-Frankivs'k
Uzhhorod
Chernivtsi
Vinnytsya
Uman'
Shostka
Chernihiv
Konotop
Sumy
Pryluky
Kharkiv
Poltava
Cherkasy
Kremenchuk
Kramators'k
Luhans'k
Kirovohrad
Dnipropetrovs'k
Donets'k
Pervomays'k
Kryvyy Rih
Zaporizhzhya
Nikopol'
Mykolayiv
Melitopol'
Mariupol'
Berdyans'k
Kherson
Odesa
Izmayil
Yevpatoriya
Kerch
Simferopol'
Feodosiya
Sevastopol'
Yalta
Sea of Azov
Black Sea
50°
45°
25°
30°
35°
0 100 200 km
0 50 100 150 mi
N
©1997 MAGELLAN Geographix[SM]
(805) 685-3100 www.maps.com

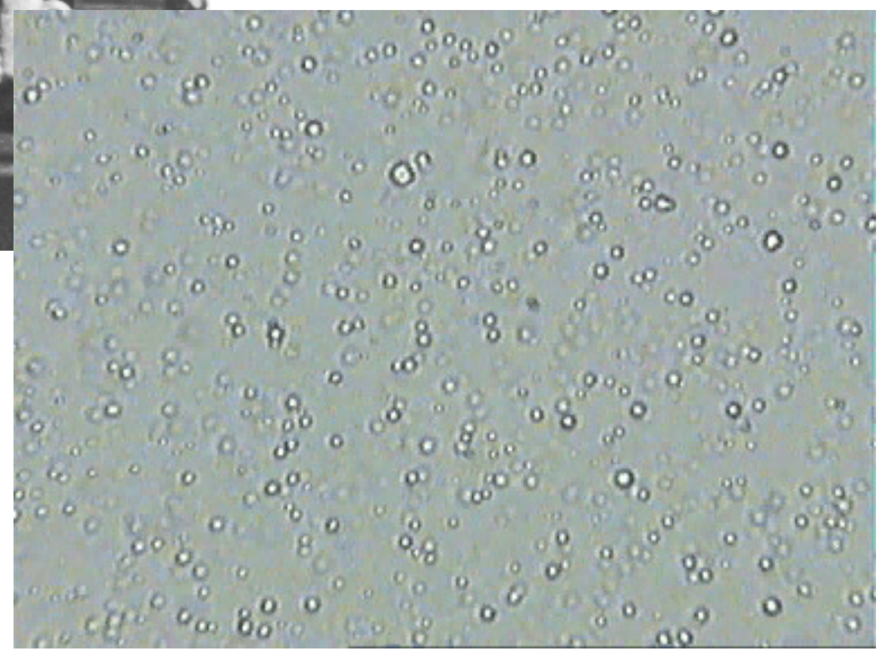
Hugo Steinhaus



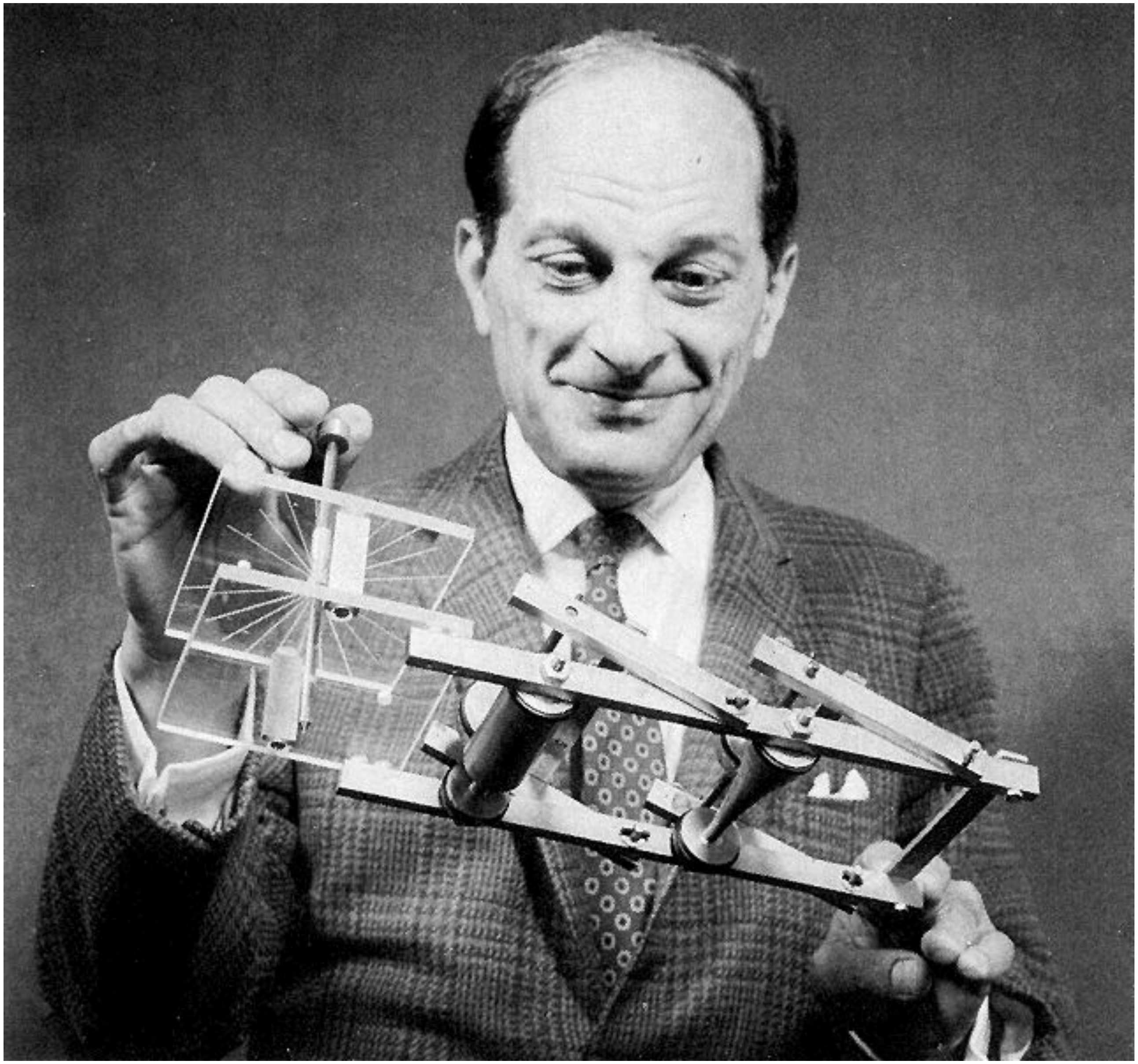
Stefan Banach



Marian Smoluchowski



Movimiento Browniano: Gotas de Grasa suspendidas en la leche.



Stan Ulam

Y ¿ cuál es la respuesta a la pregunta de Mark Kac?

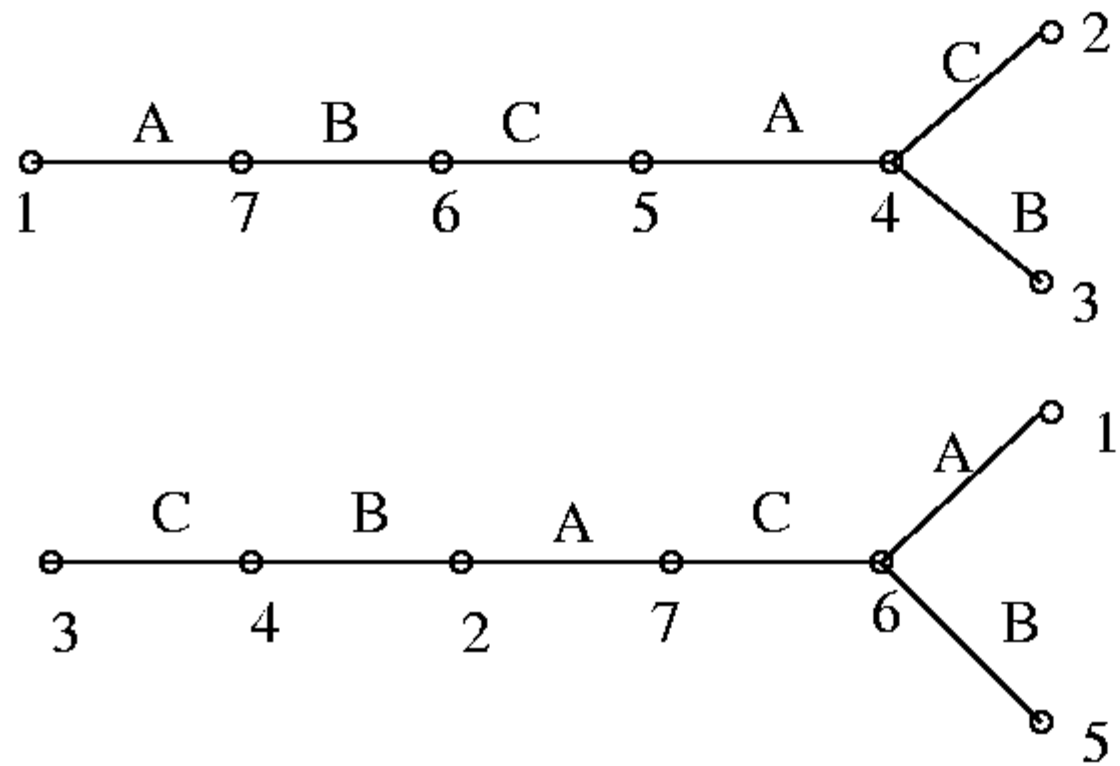
Desde 1966 hasta 1992:

Ya en 1964, John Milnor construyó dos variedades, de dimensión 16, que no eran congruentes y que eran isoespectrales. Por eso Mark Kac en su artículo de 1966, se inclina a apostar que la respuesta a su pregunta es posiblemente negativa.

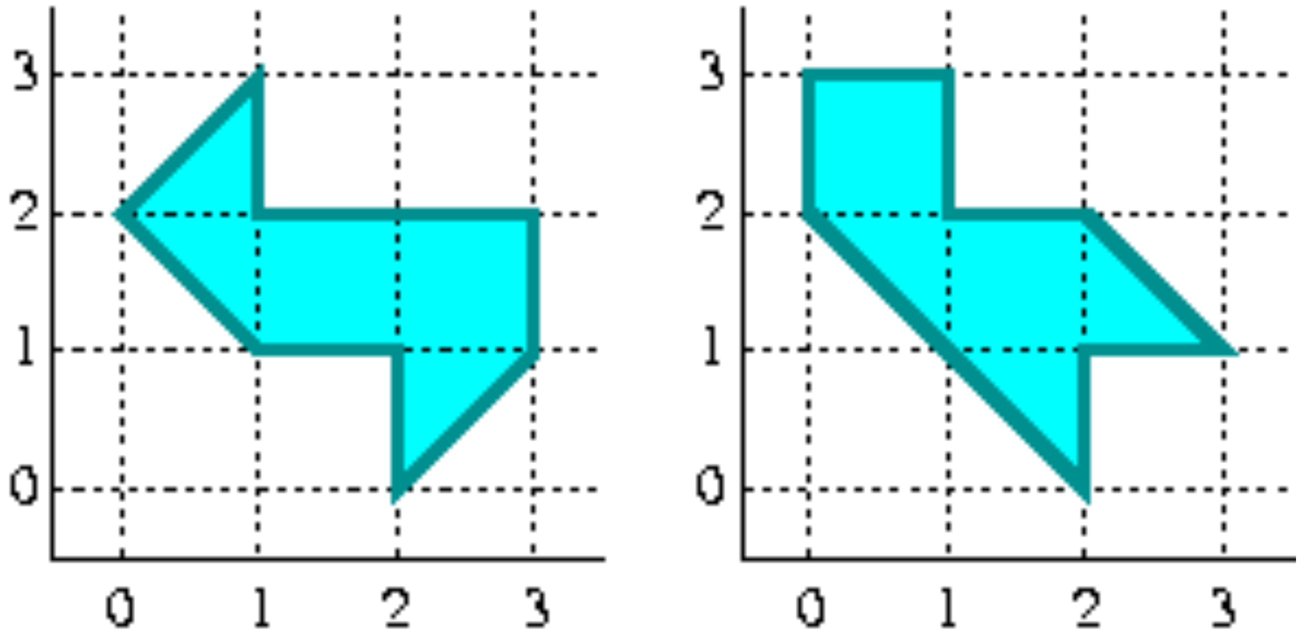
En 1985, el matemático japonés T. Sunada, usando Teoría de Grupos logró dar un caracter algebraico a la pregunta de Mark Kac, trabajo que fue determinante para el desarrollo posterior del problema.

Finalmente, en 1992, Carolyn Gordon, David Webb y Scott Wolpert, construyeron dos "tambores" no congruentes que tienen las mismas frecuencias propias. Su demostración está basada en la construcción de Sunada. Así la respuesta a la pregunta de Mark Kac es "NO".

- Los grafos de T. Sunada:

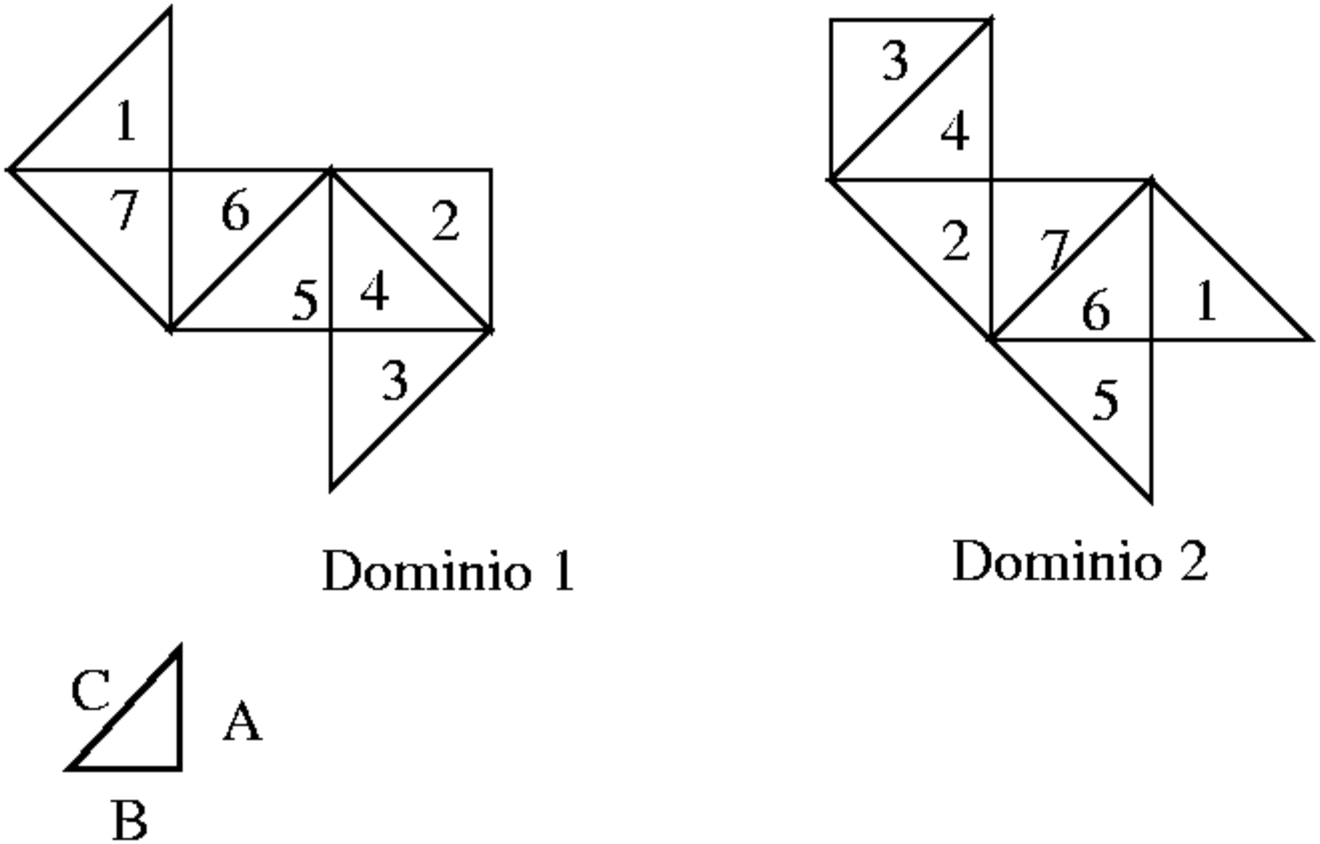


David Webb y Carolyn Gordon (1992).
Washington U. of St. Louis, Missouri, EE.UU.



Los “tambores isoespectrales”de Gordon, Webb y Wolpert. Nótese que, de acuerdo a la fórmula de Mark Kac, el par de dominios tienen igual área, igual perímetro, e igual suma de ángulos en las esquinas. Sin embargo, no son congruentes. GWW demostraron que “suenan” igual a pesar de no ser congruentes. La demostración más simple se hace por el método de “transplantación” (P. Bérard, Afrika Mathematica, 1, 1993).

Método de "transplantación" de P. Bérard:



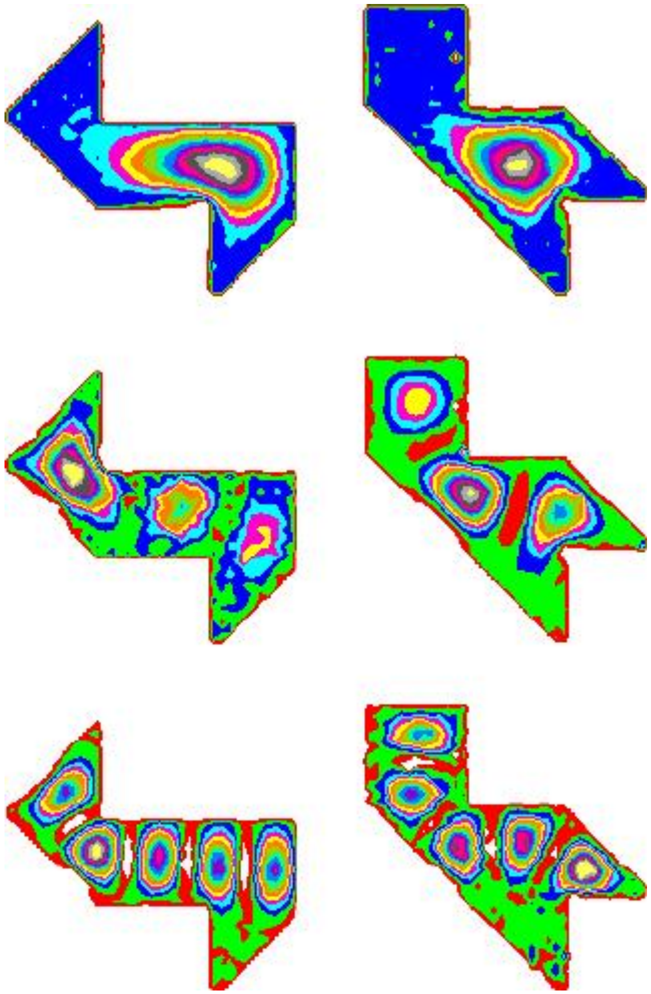
Método de "transplantación" de P. Bérard:

Matriz de Transplante de Berard

$$T = \begin{bmatrix} -a & +a & +a & -a & +b & -b & +b \\ +a & -b & -a & +b & -a & +a & -b \\ +a & -a & -b & +b & -b & +a & -a \\ -a & +b & +b & -a & +a & -b & +a \\ -b & +a & +b & -a & +a & -a & +b \\ +b & -a & -a & +b & -a & +b & -a \\ -b & +b & +a & -a & +b & -a & +a \end{bmatrix}$$

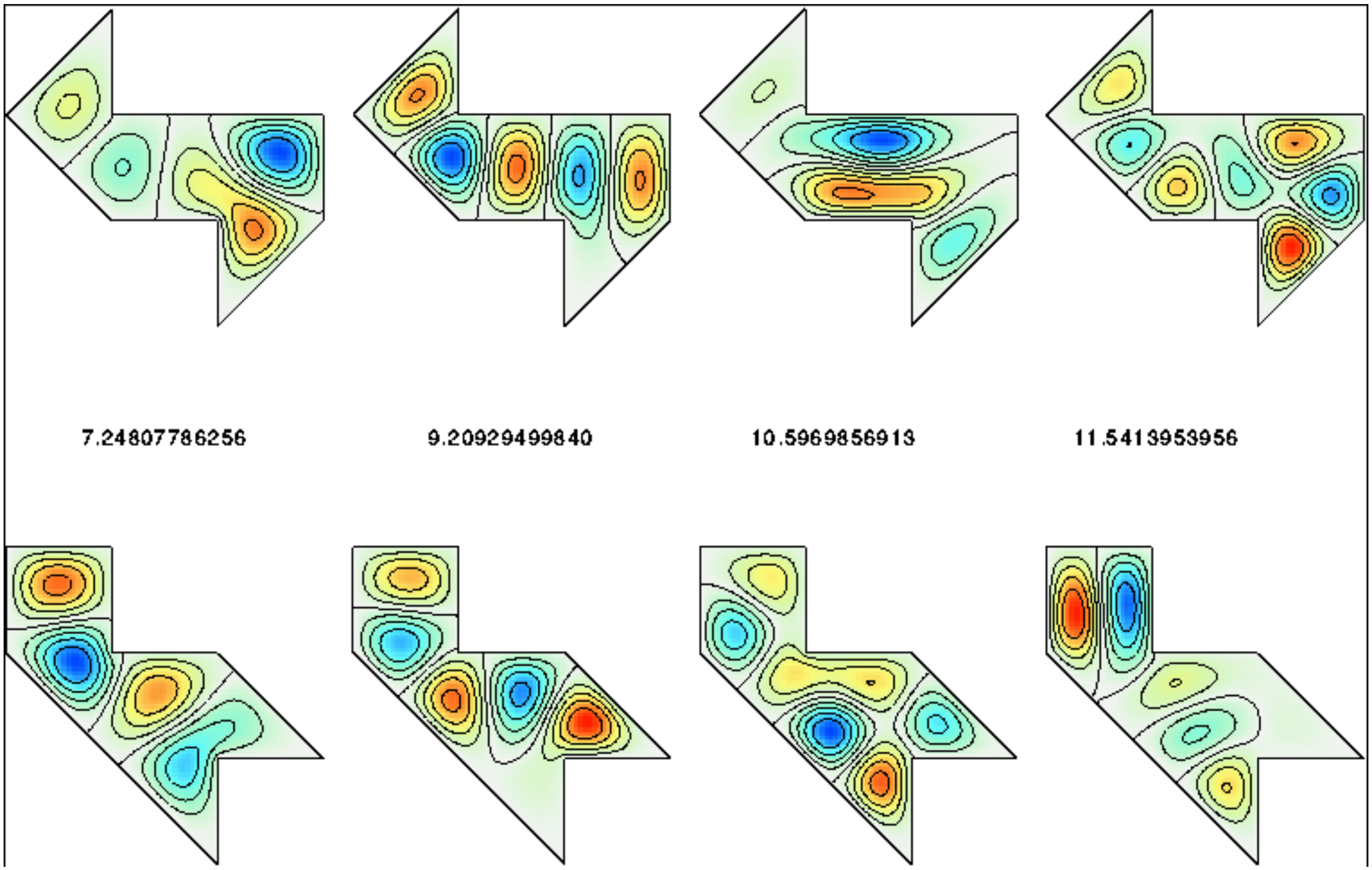
$$4a^2+3b^2=1, \quad 2a^2+4ab+b^2=0, \quad 4a+3b=1.$$

T es una matriz ortogonal

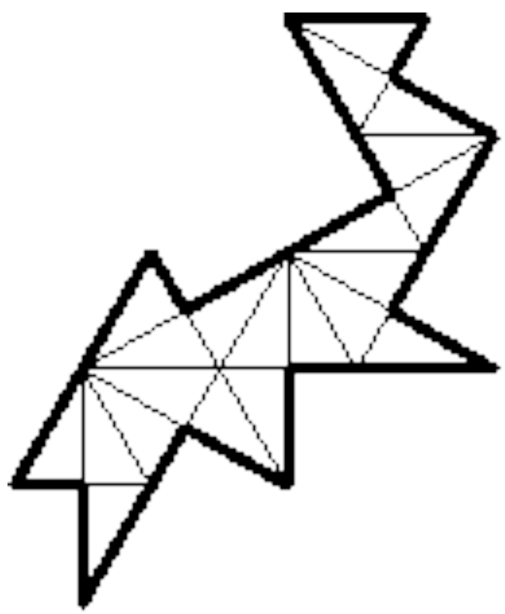


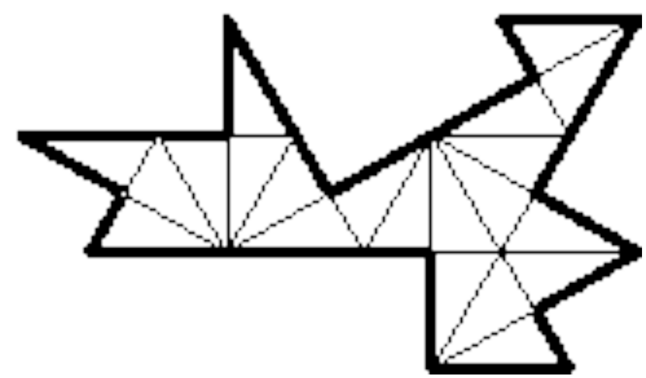
Primeros modos normales de
vibración de los "tambores
Isoespectrales"de Gordon, Webb,
y Wolpert, observados
Experimentalmente en cavidades
electromagnéticas en el
laboratorio de física del plasma
de la Universidad de Northeastern.
Sridhar y Kudroli, PRL, 1995.

Prof. Sri Sridhar
Northeastern U.


7.24807786256
9.20929499840
10.5969856913
11.5413953956

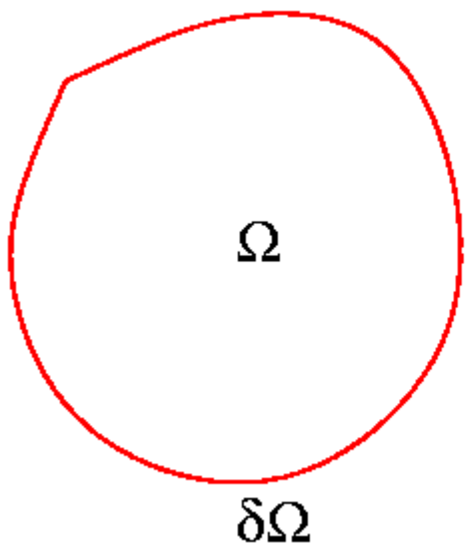
Otro par de Dominios Isoespectrales:





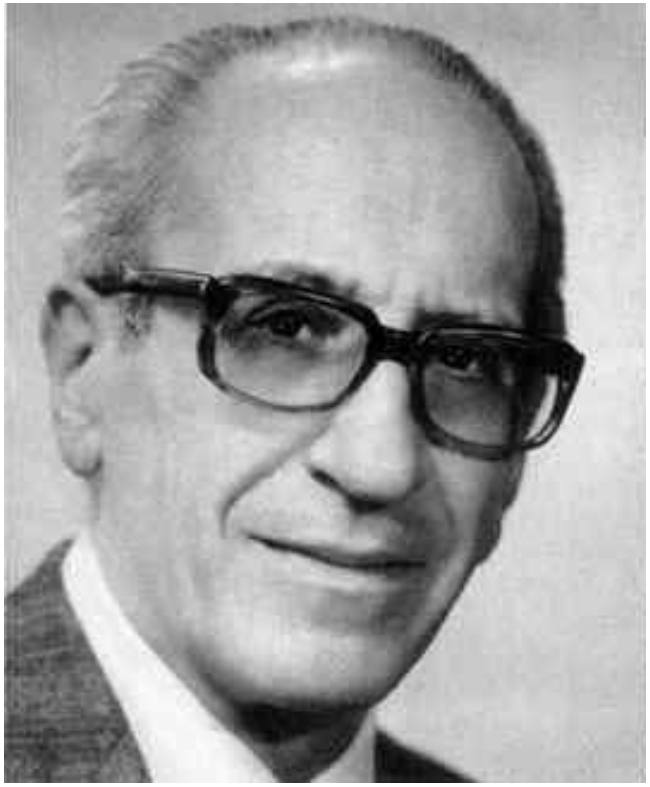
La conjetura de L. Payne, G. Pólya, y H. Weinberger (1955):

(demostrada por Mark S. Ashbaugh, y RB (1991)):



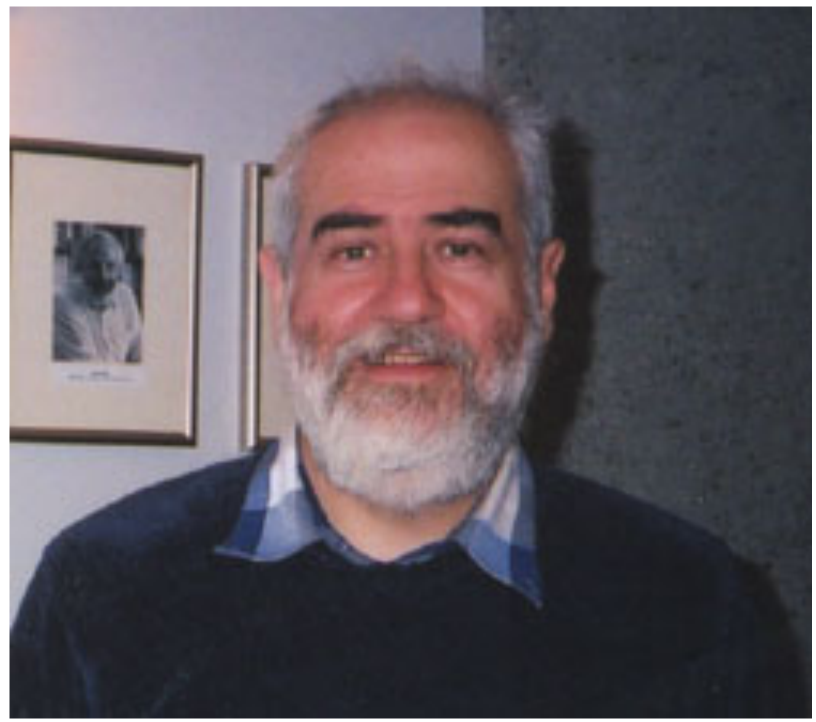
$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \leq 2.539\ldots$$

= solo para el circulo

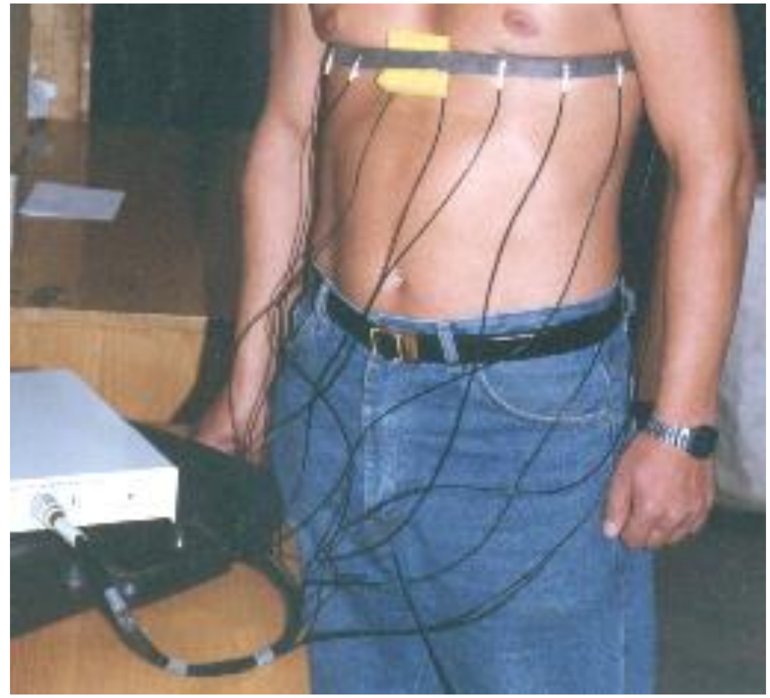


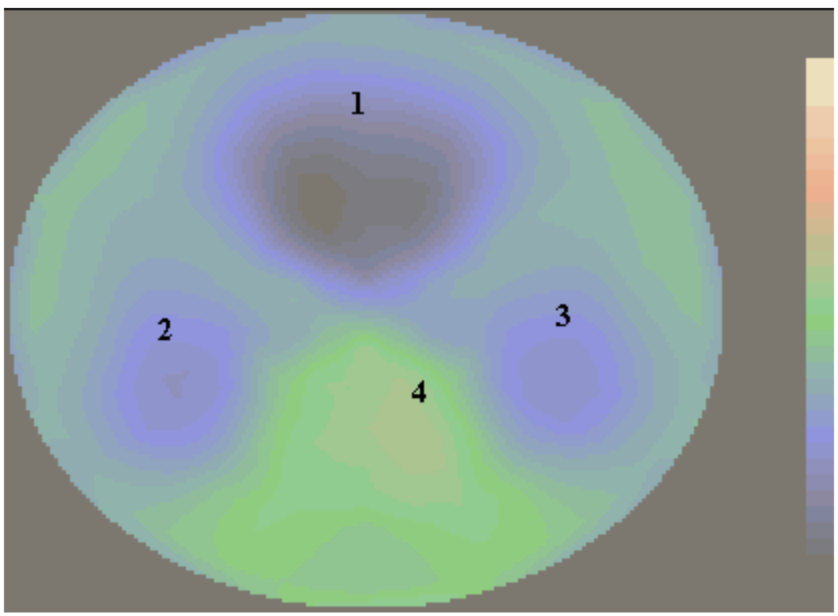
Alberto Calderón (1920-1998)

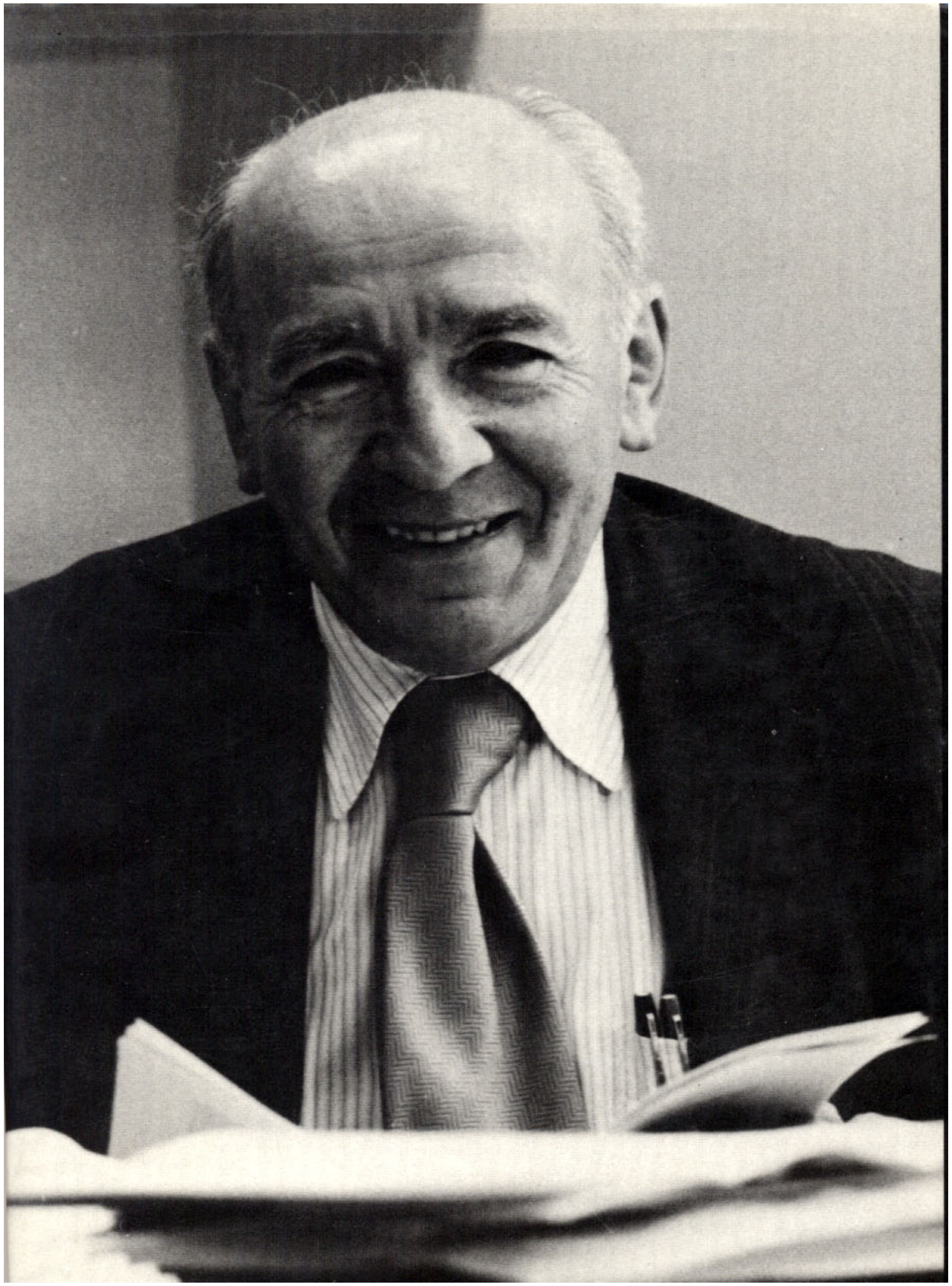
Gunther Uhlmann



ELECTRICAL IMPEDANCE TOMOGRAPHY ILLUSTRATIONS







Mark Kac

Fotografia tomada del libro:

Enigmas of Chance
An Autobiography

Harper and Row, NY, 1985.

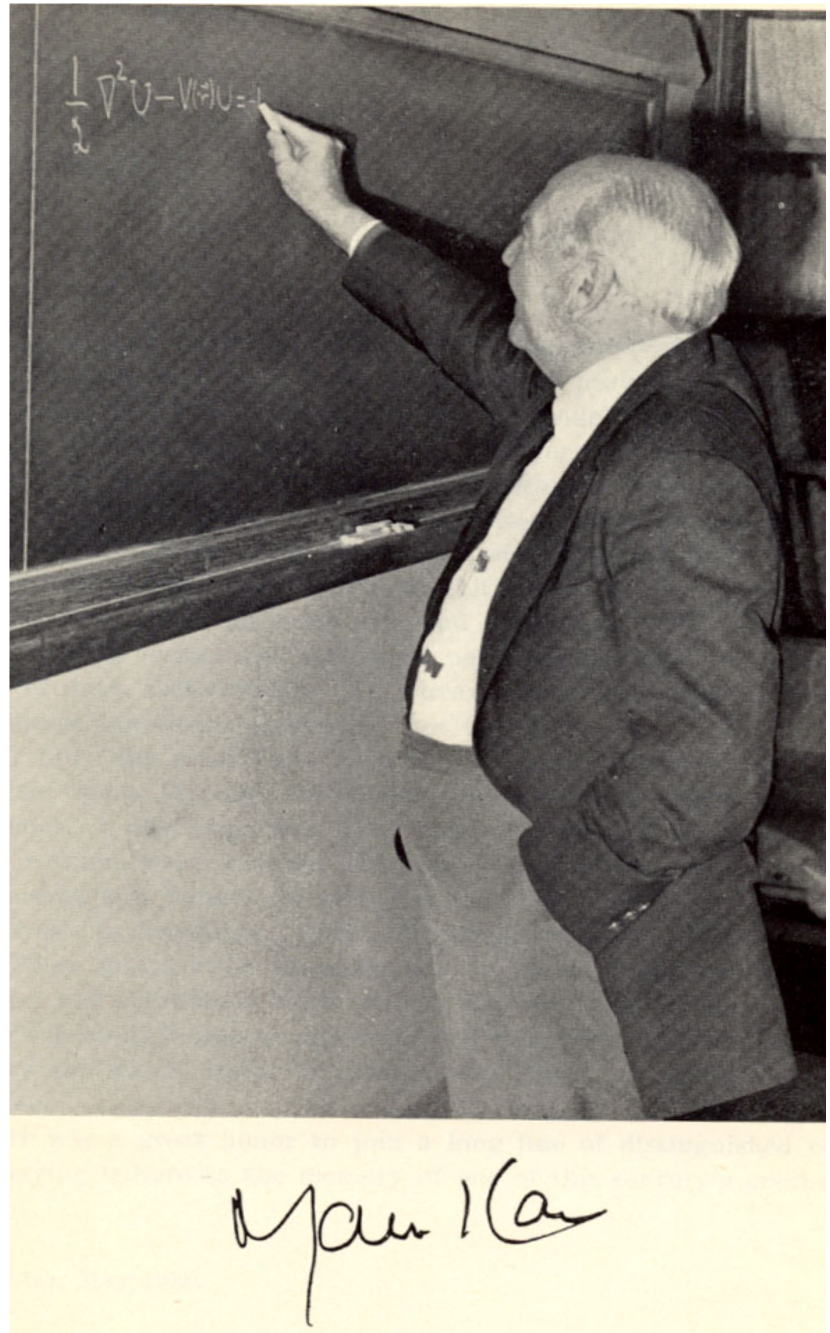
Mark Kac,

Pisa, 1980.

Tomada del libro:

Integration in Function
Spaces and Some
of Its Applications.

AcademiaNazionale
dei Lincei, Pisa, 1980.



FIN