Partículas de Prueba Rotantes en Espacio-Tiempo Curvo

Candidato
Nicolás Zalaquett

Tutores
Sergio Hojman
Benjamin Koch

Miembros de la Comisión
Máximo Bañados
Andrés Gomberoff

June 13, 2016

Esctructura de esta presentación

¿Qué buscamos estudiar?

¿Qué buscamos estudiar?

- Objeto en espacio tiempo curvo

¿Qué buscamos estudiar?

- Objeto en espacio tiempo curvo
- "Puntual" (i.e. partícula de prueba)

¿Qué buscamos estudiar?

- Objeto en espacio tiempo curvo
- "Puntual" (i.e. partícula de prueba)
- Añadiendo dinámica de rotación

¿Qué buscamos estudiar?

- Objeto en espacio tiempo curvo
- "Puntual" (i.e. partícula de prueba)
- Añadiendo dinámica de rotación
- Desde ahora los llamaremos STOPs (Trompos Giratorios - "Spinning Tops")

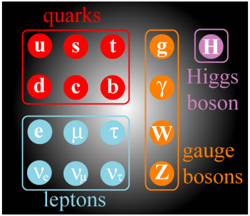
¿Por qué es interesante?

¿Por qué es interesante?

- Casi todas las partículas del modelo estándar tienen rotación interna (exepto el Higgs)

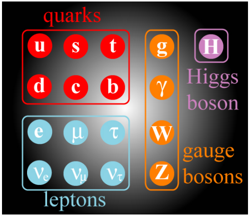
¿Por qué es interesante?

- Casi todas las partículas del modelo estándar tienen rotación interna (exepto el Higgs)



¿Por qué es interesante?

- Casi todas las partículas del modelo estándar tienen rotación interna (exepto el Higgs)



- Es una extensión del modelo usual que puede entregar nueva información sin utilizar herramientas de Física Cuántica

¿Cómo se ha estudiado?

Este modelo se ha analizado principalmente desde dos perspectivas

¿Cómo se ha estudiado?

Este modelo se ha analizado principalmente desde dos perspectivas

- Utilizando EM y propiedades del Tensor de Energía Momentum

¿Cómo se ha estudiado?

Este modelo se ha analizado principalmente desde dos perspectivas

- Utilizando EM y propiedades del Tensor de Energía Momentum
    - Mathisson 1937

¿Cómo se ha estudiado?

Este modelo se ha analizado principalmente desde dos perspectivas

- Utilizando EM y propiedades del Tensor de Energía Momentum
    - Mathisson 1937
    - Papapetrou 1951

¿Cómo se ha estudiado?

Este modelo se ha analizado principalmente desde dos perspectivas

- Utilizando EM y propiedades del Tensor de Energía Momentum
  - Mathisson 1937
  - Papapetrou 1951
  - Dixon 1970

¿Cómo se ha estudiado?

Este modelo se ha analizado principalmente desde dos perspectivas

- Utilizando EM y propiedades del Tensor de Energía Momentum
  - Mathisson 1937
  - Papapetrou 1951
  - Dixon 1970
- Comenzando desde un Lagrangiano

¿Cómo se ha estudiado?

Este modelo se ha analizado principalmente desde dos perspectivas

- Utilizando EM y propiedades del Tensor de Energía Momentum
  - Mathisson 1937
  - Papapetrou 1951
  - Dixon 1970
- Comenzando desde un Lagrangiano
  - Hanson-Regge 1974

¿Cómo se ha estudiado?

Este modelo se ha analizado principalmente desde dos perspectivas

- Utilizando EM y propiedades del Tensor de Energía Momentum
  - Mathisson 1937
  - Papapetrou 1951
  - Dixon 1970
- Comenzando desde un Lagrangiano
  - Hanson-Regge 1974
  - Hojman 1975

Mathisson 1937

Representación en la línea ("proto" distribución de soporte)

$$\int_D T^{\mu\nu} p_{\mu\nu} = \int_L (m^{\mu\nu} p_{\mu\nu} + m^{\mu\nu\rho} p_{\mu\nu;\rho} + \ldots) ds$$

- $L \subset D$ es una línea de mundo tipo tiempo
- $p_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}$; $\xi_\nu = 0$ en los bordes

Mathisson 1937

Representación en la línea ("proto" distribución de soporte)

$$\int_D T^{\mu\nu} p_{\mu\nu} = \int_L (m^{\mu\nu} p_{\mu\nu} + m^{\mu\nu\rho} p_{\mu\nu;\rho} + \ldots) ds$$

- $L \subset D$ es una línea de mundo tipo tiempo
- $p_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}$; $\xi_\nu = 0$ en los bordes
- $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$

Mathisson 1937

Representación en la línea ("proto" distribución de soporte)

$$\int_D T^{\mu\nu} p_{\mu\nu} = \int_L (m^{\mu\nu} p_{\mu\nu} + m^{\mu\nu\rho} p_{\mu\nu;\rho} + ...) ds$$

- $L \subset D$ es una línea de mundo tipo tiempo
- $p_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}$; $\xi_\nu = 0$ en los bordes
- $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$
- Expansión multipolar :

Mathisson 1937

Representación en la línea ("proto" distribución de soporte)

$$\int_D T^{\mu\nu} p_{\mu\nu} = \int_L (m^{\mu\nu} p_{\mu\nu} + m^{\mu\nu\rho} p_{\mu\nu;\rho} + \ldots) ds$$

- $L \subset D$ es una línea de mundo tipo tiempo
- $p_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}$; $\xi_\nu = 0$ en los bordes
- ${T^{\mu\nu}}_{;\nu} = 0$
- Expansión multipolar :
  - Monopolo : $\int_L m^{\mu\nu} p_{\mu\nu} = 0$

Mathisson 1937

Representación en la línea ("proto" distribución de soporte)

$$\int_D T^{\mu\nu} p_{\mu\nu} = \int_L (m^{\mu\nu} p_{\mu\nu} + m^{\mu\nu\rho} p_{\mu\nu;\rho} + \ldots) ds$$

- $L \subset D$ es una línea de mundo tipo tiempo
- $p_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}$; $\xi_\nu = 0$ en los bordes
- ${T^{\mu\nu}}_{;\nu} = 0$
- Expansión multipolar :
  - Monopolo : $\int_L m^{\mu\nu} p_{\mu\nu} = 0$
  - Dipolo : $\int_L m^{\mu\nu} p_{\mu\nu} + m^{\mu\nu\rho} p_{\mu\nu;\rho} = 0$

Mathisson 1937

Representación en la línea (“proto” distribución de soporte)

$$\int_D T^{\mu\nu} p_{\mu\nu} = \int_L (m^{\mu\nu} p_{\mu\nu} + m^{\mu\nu\rho} p_{\mu\nu;\rho} + \ldots) ds$$

- $L \subset D$ es una línea de mundo tipo tiempo
- $p_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}$; $\xi_\nu = 0$ en los bordes
- $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$
- Expansión multipolar :
  - Monopolo : $\int_L m^{\mu\nu} p_{\mu\nu} = 0$
  - Dipolo : $\int_L m^{\mu\nu} p_{\mu\nu} + m^{\mu\nu\rho} p_{\mu\nu;\rho} = 0$

Ecuaciones de Movimiento

$$\dot{p^\mu} = -\frac{1}{2} R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} u^\nu s^{\alpha\beta}$$
$$\dot{s^{\mu\nu}} = p^\mu u^\nu - p^\nu u^\mu$$

Constricciones

Grados de libertad

Constricciones

Grados de libertad

- $p^\mu \rightarrow 4$ grados

Constricciones

Grados de libertad

- $p^{\mu} \rightarrow 4$ grados
- $s^{\mu\nu} \rightarrow 6$ grados (es antisimétrico)

Constricciones

Grados de libertad

- $p^{\mu} \rightarrow 4$ grados
- $s^{\mu\nu} \rightarrow 6$ grados (es antisimétrico)
- Queremos solo 3 en s (rotaciones espaciales en marco en reposo)

Constricciones

Grados de libertad

- $p^\mu \rightarrow$ 4 grados
- $s^{\mu\nu} \rightarrow$ 6 grados (es antisimétrico)
- Queremos solo 3 en s (rotaciones espaciales en marco en reposo)

Constricción de Pirani (1956)

$$s^{\mu\nu} u_\nu = 0$$

Constricciones

Grados de libertad

- $p^\mu \rightarrow$ 4 grados
- $s^{\mu\nu} \rightarrow$ 6 grados (es antisimétrico)
- Queremos solo 3 en s (rotaciones espaciales en marco en reposo)

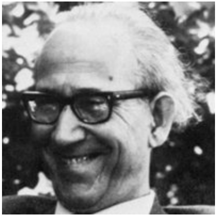
Constricción de Pirani (1956)

$$s^{\mu\nu} u_\nu = 0$$

Constricción de Tulczyjew (1959)

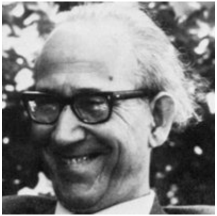
$$s^{\mu\nu} p_\nu = 0$$

Papapetrou 1951 (con ideas de Fock 1939)



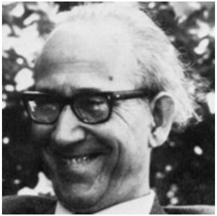
Papapetrou 1951 (con ideas de Fock 1939)

- Polo - Dipolo en un tubo de mundo de coordenadas X^λ



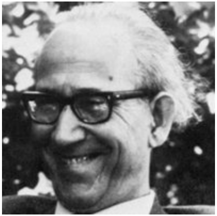
Papapetrou 1951 (con ideas de Fock 1939)

- Polo - Dipolo en un tubo de mundo de coordenadas X^λ
- Tensor de Energía Momentum T nulo fuera de una esfera de radio R en torno a X^λ para todo t



Papapetrou 1951 (con ideas de Fock 1939)

- Polo - Dipolo en un tubo de mundo de coordenadas X^λ
- Tensor de Energía Momentum T nulo fuera de una esfera de radio R en torno a X^λ para todo t
- Usando $\delta x^\lambda = x^\lambda - X^\lambda$ cuando $R \rightarrow 0$ elimina dependencia en R

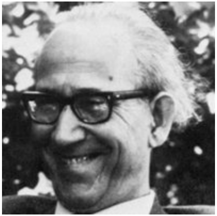


Papapetrou 1951 (con ideas de Fock 1939)

- Polo - Dipolo en un tubo de mundo de coordenadas X^λ
- Tensor de Energía Momentum T nulo fuera de una esfera de radio R en torno a X^λ para todo t
- Usando $\delta x^\lambda = x^\lambda - X^\lambda$ cuando $R \to 0$ elimina dependencia en R

Resumen Polo-Dipolo

$$M^{\mu\nu} = u^4 \int T^{\mu\nu} dV$$
$$W^{\rho\mu\nu} = -u^4 \int \delta x^\rho T^{\mu\nu} dV$$
$$P^\mu = M^{\mu 0}$$
$$S^{\mu\nu} = W^{\mu\nu 0} - W^{\nu\mu 0}$$
$$u^4 = \frac{dX^4}{d\lambda}$$



Papapetrou 1951 (con ideas de Fock 1939) Cont...

Usando $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, integrando sobre V llega a :

Papapetrou 1951 (con ideas de Fock 1939) Cont...

Usando $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, integrando sobre V llega a :

Ecuaciones de movimiento

$$\frac{D}{D\lambda}(mu^{\mu} + u_{\nu}\frac{DS^{\mu\nu}}{D\lambda}) = -\frac{1}{2}R^{\mu}_{\rho\alpha\beta}u^{\rho}S^{\alpha\beta}$$

$$\frac{DS^{\mu\nu}}{D\lambda} = u^{\nu}u_{\alpha}\frac{DS^{\alpha\mu}}{D\lambda} - u^{\mu}u_{\alpha}\frac{DS^{\nu\alpha}}{D\lambda}$$

Dixon 1970

Dixon 1970

- Definió momentum y spin de partícula sujeta a campos gravitacionales y electromagnéticos

Dixon 1970

- Definió momentum y spin de partícula sujeta a campos gravitacionales y electromagnéticos
- Simetrías campos externos $\rightarrow$ conservación de componentes de momentum o spin

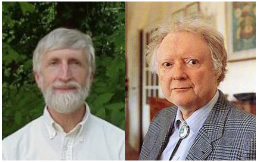
Dixon 1970

- Definió momentum y spin de partícula sujeta a campos gravitacionales y electromagnéticos
- Simetrías campos externos $\rightarrow$ conservación de componentes de momentum o spin
- Las ecuaciones son muy similares a las anteriores añadiendo campos electromagnéticos

Dixon 1970

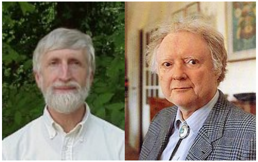
- Definió momentum y spin de partícula sujeta a campos gravitacionales y electromagnéticos
- Simetrías campos externos $\rightarrow$ conservación de componentes de momentum o spin
- Las ecuaciones son muy similares a las anteriores añadiendo campos electromagnéticos
- Una diferencia marcada es que utiliza constricción de Tulczyjew desde el inicio

Hanson-Regge 1974



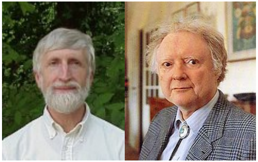
Hanson-Regge 1974

- Primer análisis desde Lagrangiano



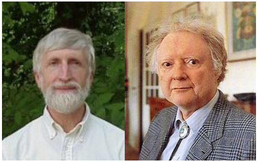
Hanson-Regge 1974

- Primer análisis desde Lagrangiano
- Concepto de rotación interna (matriz de Lorentz en plano tangente)



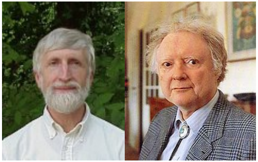
Hanson-Regge 1974

- Primer análisis desde Lagrangiano
- Concepto de rotación interna (matriz de Lorentz en plano tangente)
- Identificación de escalares que pueden componer el Lagrangiano



Hanson-Regge 1974

- Primer análisis desde Lagrangiano
- Concepto de rotación interna (matriz de Lorentz en plano tangente)
- Identificación de escalares que pueden componer el Lagrangiano
- Analizaron el caso de espacio tiempo plano e incluso cuantizaron



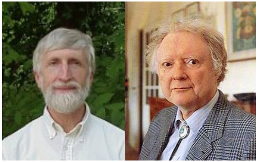
Hanson-Regge 1974

- Primer análisis desde Lagrangiano
- Concepto de rotación interna (matriz de Lorentz en plano tangente)
- Identificación de escalares que pueden componer el Lagrangiano
- Analizaron el caso de espacio tiempo plano e incluso cuantizaron

Ecuaciones de movimiento

$$\frac{dP^{\mu}}{d\lambda} = 0$$

$$\frac{dS^{\mu\nu}}{d\lambda} = P^{\mu}u^{\nu} - P^{\nu}u^{\mu}$$



Hojman 1975

Hojman 1975

- Evolución a espacio tiempo curvo del análisis de Hanson-Regge

Hojman 1975

- Evolución a espacio tiempo curvo del análisis de Hanson-Regge
- Uso de vierbein en vez de matrices de Lorentz

Hojman 1975

- Evolución a espacio tiempo curvo del análisis de Hanson-Regge
- Uso de vierbein en vez de matrices de Lorentz
- Solución en caso plano con campos electromagnéticos

Hojman 1975

- Evolución a espacio tiempo curvo del análisis de Hanson-Regge
- Uso de vierbein en vez de matrices de Lorentz
- Solución en caso plano con campos electromagnéticos
- Primera solución para espacio tiempo de Schwarzschild

Hojman 1975

- Evolución a espacio tiempo curvo del análisis de Hanson-Regge
- Uso de vierbein en vez de matrices de Lorentz
- Solución en caso plano con campos electromagnéticos
- Primera solución para espacio tiempo de Schwarzschild

Ecuaciones de movimiento

$$\frac{DP^\mu}{D\lambda} = -\frac{1}{2} R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} u^\nu S^{\alpha\beta}$$

$$\frac{DS^{\mu\nu}}{D\lambda} = S^{\mu\lambda}\sigma_\lambda{}^\nu - \sigma^{\mu\lambda} S_\lambda{}^\nu = P^\mu u^\nu - P^\nu u^\mu$$

Lagrangiano v/s EM

En este trabajo utilizamos el análisis Lagrangiano ya que

Lagrangiano v/s EM

En este trabajo utilizamos el análisis Lagrangiano ya que

- Es más clara la identificación de los momenta

Lagrangiano v/s EM

En este trabajo utilizamos el análisis Lagrangiano ya que

- Es más clara la identificación de los momenta
- Constricción de Tulczyjew puede venir del Lagrangiano (caso masivo)

Lagrangiano v/s EM

En este trabajo utilizamos el análisis Lagrangiano ya que

- Es más clara la identificación de los momenta
- Constricción de Tulczyjew puede venir del Lagrangiano (caso masivo)
- No existen derivadas de tercer orden

Lagrangiano v/s EM

En este trabajo utilizamos el análisis Lagrangiano ya que

- Es más clara la identificación de los momenta
- Constricción de Tulczyjew puede venir del Lagrangiano (caso masivo)
- No existen derivadas de tercer orden
- Evadimos cualquier ambigüedad en segundas derivadas covariantes

Lagrangiano v/s EM

En este trabajo utilizamos el análisis Lagrangiano ya que

- Es más clara la identificación de los momenta
- Constricción de Tulczyjew puede venir del Lagrangiano (caso masivo)
- No existen derivadas de tercer orden
- Evadimos cualquier ambigüedad en segundas derivadas covariantes

Seguiremos de cerca a Hojman (1975) y Hojman (1978) en la representación de STOPs.

Variables

Variables

- Posición : x^μ

Variables

- Posición : x^μ
- Orientación "interna" : ${e_a}^\mu(\lambda)$ (depende de línea de mundo)

Variables

- Posición : x^μ
- Orientación "interna" : $e_a{}^\mu(\lambda)$ (depende de línea de mundo)
- $g_{\mu\nu} e_a{}^\mu e_b{}^\nu \equiv \eta_{ab}$
- $\eta_{ab} \equiv \text{diag}\ (+1, -1, -1, -1)$

Variables

- Posición : x^μ
- Orientación "interna" : ${e_a}^\mu(\lambda)$ (depende de línea de mundo)
- $g_{\mu\nu}{e_a}^\mu {e_b}^\nu \equiv \eta_{ab}$
- $\eta_{ab} \equiv \text{diag}\ (+1,-1,-1,-1)$

Velocidades

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

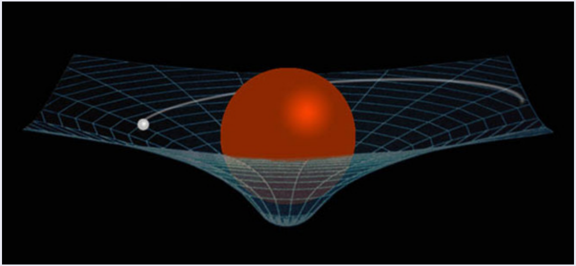
$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \eta^{ab}{e_a}^\mu \frac{D{e_b}^\nu}{D\lambda} = -\sigma^{\nu\mu}$$

con $\frac{D{e_b}^\nu}{D\lambda} \equiv \frac{d{e_b}^\nu}{d\lambda} + {\Gamma^\nu}_{\rho\tau}{e_b}^\rho u^\tau$

Variables Contd...

Descripción Básica

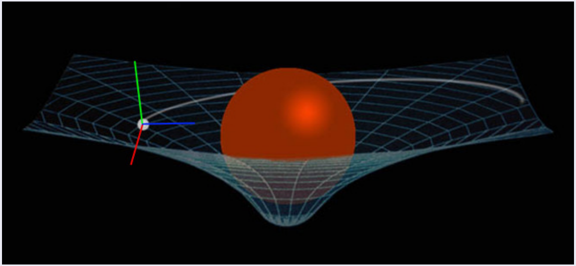
$$x^{\mu}$$



Variables Contd...

Descripción Básica

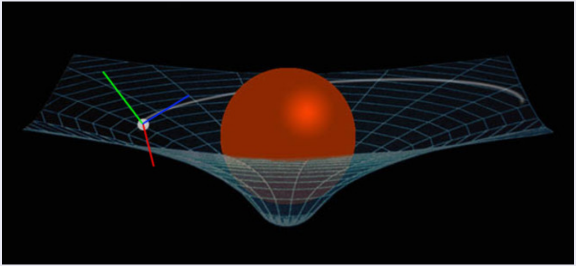
$$x^\mu \ / \ e_a{}^\mu(\lambda)$$



Variables Contd...

Descripción Básica

$$x^\mu \;/\; e_a{}^\mu(\lambda)$$



Lagrangiano

Construiremos el Lagrangiano a partir de los siguientes invariantes

Lagrangiano

Construiremos el Lagrangiano a partir de los siguientes invariantes

- $a_1 \equiv u^\mu u_\mu$

Lagrangiano

Construiremos el Lagrangiano a partir de los siguientes invariantes

- $a_1 \equiv u^\mu u_\mu$
- $a_2 \equiv \sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}$

Lagrangiano

Construiremos el Lagrangiano a partir de los siguientes invariantes

- $a_1 \equiv u^\mu u_\mu$
- $a_2 \equiv \sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}$
- $a_3 \equiv u_\alpha \sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\beta\gamma}u^\gamma$

Lagrangiano

Construiremos el Lagrangiano a partir de los siguientes invariantes

- $a_1 \equiv u^{\mu} u_{\mu}$
- $a_2 \equiv \sigma^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}$
- $a_3 \equiv u_{\alpha} \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\beta\gamma} u^{\gamma}$
- $a_4 \equiv \sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\beta\lambda} \sigma_{\lambda\rho} \sigma^{\rho\alpha}$

Lagrangiano

Construiremos el Lagrangiano a partir de los siguientes invariantes

- $a_1 \equiv u^\mu u_\mu$
- $a_2 \equiv \sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}$
- $a_3 \equiv u_\alpha \sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\beta\gamma}u^\gamma$
- $a_4 \equiv \sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\beta\lambda}\sigma_{\lambda\rho}\sigma^{\rho\alpha}$

Lagrangiano y Momenta

$$L \equiv L(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

$$P_\mu \equiv -\frac{\partial L}{\partial u^\mu}$$

$$S_{\mu\nu} \equiv -\frac{\partial L}{\partial \sigma^{\mu\nu}} = -S_{\nu\mu}$$

Lagrangiano

Construiremos el Lagrangiano a partir de los siguientes invariantes

- $a_1 \equiv u^\mu u_\mu$
- $a_2 \equiv \sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}$
- $a_3 \equiv u_\alpha \sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\beta\gamma}u^\gamma$
- $a_4 \equiv \sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\beta\lambda}\sigma_{\lambda\rho}\sigma^{\rho\alpha}$

Lagrangiano y Momenta

$$L \equiv L(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

$$P_\mu \equiv -\frac{\partial L}{\partial u^\mu}$$

$$S_{\mu\nu} \equiv -\frac{\partial L}{\partial \sigma^{\mu\nu}} = -S_{\nu\mu}$$

Momenta

$$P^\mu = -2(u^\mu L_1 + \sigma^{\mu\alpha}\sigma_{\alpha\lambda}u^\lambda L_3)$$

$$S^{\mu\nu} = -(4\sigma^{\mu\nu}L_2 + 2[u^\mu \sigma^{\nu\lambda}u_\lambda - u^\nu \sigma^{\mu\lambda}u_\lambda]L_3 + 8\sigma^{\mu\lambda}\sigma_{\lambda\rho}\sigma^{\rho\nu}L_4)$$

Variaciones Utilizadas

Variaremos $L(a_1, a_2, a_3, a_4)$ considerando

Variaciones Utilizadas

Variaremos $L(a_1, a_2, a_3, a_4)$ considerando

- δx^μ

Variaciones Utilizadas

Variaremos $L(a_1, a_2, a_3, a_4)$ considerando

- δx^μ
- $\delta\theta^{\mu\nu} \equiv \eta^{ab} e_a{}^\mu (\delta e_b{}^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\rho} e_b{}^\lambda \delta x^\rho) = -\delta\theta^{\nu\mu}$

Variaciones Utilizadas

Variaremos $L(a_1, a_2, a_3, a_4)$ considerando

- δx^μ
- $\delta\theta^{\mu\nu} \equiv \eta^{ab} {e_a}^\mu (\delta {e_b}^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\rho} {e_b}^\lambda \delta x^\rho) = -\delta\theta^{\nu\mu}$
- No consideramos directamente $\delta {e_b}^\nu$ ya que no son realmente independientes

Relación entre Variaciones

Definiendo

$$\mathring{A}^{\mu} \equiv \dot{A}^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\rho} A^{\lambda} u^{\rho},$$

$$DA^{\mu} \equiv \delta A^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\rho} A^{\lambda} \delta x^{\rho}.$$

Relación entre Variaciones

Definiendo

$$\mathring{A}^{\mu} \equiv \dot{A}^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\rho} A^{\lambda} u^{\rho},$$

$$DA^{\mu} \equiv \delta A^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\rho} A^{\lambda} \delta x^{\rho}.$$

Podemos obtener

$$D(\mathring{A}^{\mu}) - (D\mathring{A}^{\mu}) = R^{\mu}_{\lambda\alpha\beta} A^{\lambda} u^{\beta} \delta x^{\alpha}$$

Relación entre Variaciones

Definiendo

$$\mathring{A}^{\mu} \equiv \dot{A}^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\rho} A^{\lambda} u^{\rho},$$

$$DA^{\mu} \equiv \delta A^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\rho} A^{\lambda} \delta x^{\rho}.$$

Podemos obtener

$$D(\mathring{A}^{\mu}) - (\mathring{DA^{\mu}}) = R^{\mu}_{\lambda\alpha\beta} A^{\lambda} u^{\beta} \delta x^{\alpha}$$

Y utilizando

$$D(\sigma^{\mu\nu}) - (\delta\mathring{\theta}^{\mu\nu}) = D(\eta^{ab} {e_a}^{\mu} \mathring{e_b}^{\nu}) - (\eta^{ab} \mathring{{e_a}^{\mu}} D{e_b}^{\nu})$$

Relación entre Variaciones

Definiendo

$$\mathring{A}^{\mu} \equiv \dot{A}^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\rho} A^{\lambda} u^{\rho},$$

$$DA^{\mu} \equiv \delta A^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\rho} A^{\lambda} \delta x^{\rho}.$$

Podemos obtener

$$D(\mathring{A}^{\mu}) - (\mathring{DA^{\mu}}) = R^{\mu}_{\lambda\alpha\beta} A^{\lambda} u^{\beta} \delta x^{\alpha}$$

Y utilizando

$$D(\sigma^{\mu\nu}) - (\delta\mathring{\theta}^{\mu\nu}) = D(\eta^{ab} e_a{}^{\mu} \mathring{e_b}{}^{\nu}) - (\eta^{ab} e_a{}^{\mathring{\mu}} De_b{}^{\nu})$$

Logramos la relación

$$\delta\sigma^{\mu\nu} = (\delta\mathring{\theta}^{\mu\nu}) + \sigma_{\alpha}{}^{\nu} \delta\theta^{\alpha\mu} - \sigma_{\alpha}{}^{\mu} \delta\theta^{\alpha\nu} + (g^{\mu\lambda} R^{\nu}_{\lambda\beta\alpha} u^{\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\lambda\beta} \sigma^{\lambda\nu} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\beta} \sigma^{\mu\lambda}) \delta x^{\beta}$$

Variación

Con esto y algo de algebra logramos la variación de la acción

$$\begin{aligned}\delta S = \int &- P_\mu(\delta \dot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\beta} u^\nu \delta x^\beta) - \frac{1}{2} S_{\mu\nu} g^{\mu\lambda} R^\nu_{\lambda\beta\alpha} u^\alpha \delta x^\beta \\ &- \frac{1}{2} S_{\mu\nu}((\delta \mathring{\theta}^{\mu\nu}) + \sigma_\alpha{}^\nu \delta\theta^{\alpha\mu} - \sigma_\alpha{}^\mu \delta\theta^{\alpha\nu})\end{aligned} \tag{1}$$

Variación

Con esto y algo de algebra logramos la variación de la acción

$$\delta S = \int - P_\mu(\delta \dot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\beta} u^\nu \delta x^\beta) - \frac{1}{2} S_{\mu\nu} g^{\mu\lambda} R^\nu_{\lambda\beta\alpha} u^\alpha \delta x^\beta \\ - \frac{1}{2} S_{\mu\nu}((\delta \mathring{\theta}^{\mu\nu}) + \sigma_\alpha{}^\nu \delta\theta^{\alpha\mu} - \sigma_\alpha{}^\mu \delta\theta^{\alpha\nu}) \tag{1}$$

$$\delta S = \int (\dot{P}_\beta - \Gamma^\mu_{\nu\beta} P_\mu u^\nu + \frac{1}{2} R_{\beta\alpha\lambda\nu} u^\alpha S^{\lambda\nu})\delta x^\beta + \\ \frac{1}{2}(\mathring{S}_{\mu\nu} - S_{\nu\alpha}\sigma_\mu{}^\alpha + S_{\alpha\nu}\sigma_\mu{}^\alpha)\delta\theta^{\mu\nu} - (P_\mu \dot{\delta} x^\mu) - \frac{1}{2}(S_{\mu\nu} \mathring{\delta}\theta^{\mu\nu}) \tag{2}$$

Ecuaciones de Movimiento

Con lo que finalmente obtenemos las siguientes ecuaciones de movimiento

Ecuaciones de Movimiento

Con lo que finalmente obtenemos las siguientes ecuaciones de movimiento

Ecuaciones de movimiento

$$\frac{DP^\mu}{D\lambda} = -\frac{1}{2} R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} u^\nu S^{\alpha\beta}$$

$$\frac{DS^{\mu\nu}}{D\lambda} = S^{\mu\lambda}\sigma_\lambda{}^\nu - \sigma^{\mu\lambda} S_\lambda{}^\nu = P^\mu u^\nu - P^\nu u^\mu$$

Última relación aparece utilizando definición de momenta.

Constantes Independientes del Espacio-Tiempo Particular

Constantes de movimiento en todo espacio tiempo

Constantes Independientes del Espacio-Tiempo Particular

Constantes de movimiento en todo espacio tiempo

- $J^2 \equiv \frac{1}{2} S^{\mu\nu} S_{\mu\nu}$

Constantes Independientes del Espacio-Tiempo Particular

Constantes de movimiento en todo espacio tiempo

- $J^2 \equiv \frac{1}{2} S^{\mu\nu} S_{\mu\nu}$
- $S^4 \equiv S^{\mu\alpha} S_{\alpha\beta} S^{\beta\gamma} S_{\gamma\mu}$

Constantes Independientes del Espacio-Tiempo Particular

Constantes de movimiento en todo espacio tiempo

- $J^2 \equiv \frac{1}{2} S^{\mu\nu} S_{\mu\nu}$
- $S^4 \equiv S^{\mu\alpha} S_{\alpha\beta} S^{\beta\gamma} S_{\gamma\mu}$

Una demostración de ejemplo

$$(\dot{J}^2) = 2\mathring{S}^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = 2(S^{\mu\lambda}\sigma_{\lambda}{}^{\nu} - \sigma^{\mu\lambda} S_{\lambda}{}^{\nu}) S_{\mu\nu} = -4 S^{\mu}{}_{\lambda}\sigma^{\lambda}{}_{\nu} S^{\nu}{}_{\mu}$$

$$\rightarrow S^{\mu}{}_{\lambda}\sigma^{\lambda}{}_{\nu} S^{\nu}{}_{\mu} = Tr(S\sigma S) = 0$$

Constantes Independientes del Espacio-Tiempo Particular

Constantes de movimiento en todo espacio tiempo

- $J^2 \equiv \frac{1}{2} S^{\mu\nu} S_{\mu\nu}$
- $S^4 \equiv S^{\mu\alpha} S_{\alpha\beta} S^{\beta\gamma} S_{\gamma\mu}$
- $m^2 \equiv P^\mu P_\mu$ (dem. depende de constricciones)

Una demostración de ejemplo

$$(\dot{J^2}) = 2\mathring{S}^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = 2(S^{\mu\lambda}\sigma_\lambda{}^\nu - \sigma^{\mu\lambda} S_\lambda{}^\nu) S_{\mu\nu} = -4 S^\mu{}_\lambda \sigma^\lambda{}_\nu S^\nu{}_\mu$$

$$\rightarrow S^\mu{}_\lambda \sigma^\lambda{}_\nu S^\nu{}_\mu = Tr(S\sigma S) = 0$$

Constantes Asociadas a Vectores de Killing

Todo vector de Killing de la métrica ξ_μ tiene una constante de movimiento

Constantes Asociadas a Vectores de Killing

Todo vector de Killing de la métrica ξ_μ tiene una constante de movimiento

$$C_\xi \equiv P^\mu \xi_\mu - \frac{1}{2} S^{\mu\nu} \xi_{\mu;\nu}$$

Constantes Asociadas a Vectores de Killing

Todo vector de Killing de la métrica ξ_μ tiene una constante de movimiento

$$C_\xi \equiv P^\mu \xi_\mu - \frac{1}{2} S^{\mu\nu} \xi_{\mu;\nu}$$

Esto se puede demostrar derivando directamente y utilizando las EM

Constantes Asociadas a Vectores de Killing

Todo vector de Killing de la métrica ξ_μ tiene una constante de movimiento

$$C_\xi \equiv P^\mu \xi_\mu - \frac{1}{2} S^{\mu\nu} \xi_{\mu;\nu}$$

Esto se puede demostrar derivando directamente y utilizando las EM o utilizando el teorema de Noether.

STOP Masivo

Para el STOP masivo utilizaremos la constricción de Tulczyjew

STOP Masivo

Para el STOP masivo utilizaremos la constricción de Tulczyjew

$$S^{\mu\nu}P_{\nu} = 0$$

STOP Masivo

Para el STOP masivo utilizaremos la constricción de Tulczyjew

$$S^{\mu\nu}P_\nu = 0$$

Un Lagrangiano que la entrega directamente es

$$L = \left(\frac{Aa_1 - Ba_2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(Aa_1 - Ba_2)^2 - 8B(Aa_3 - 2Ba_4)} \right)^{1/2}$$

Junto a una trayectoria de Regge

$$Bm^2 - AJ^2/2 = AB$$

STOP Sin Masa - Porque uno diferente

Para el STOP sin masa se debe tener más cuidado

STOP Sin Masa - Porque uno diferente

Para el STOP sin masa se debe tener más cuidado

- La partícula no tiene marco en reposo

STOP Sin Masa - Porque uno diferente

Para el STOP sin masa se debe tener más cuidado

- La partícula no tiene marco en reposo
- Deberiamos tener 2 grados de libertad rotacional (helicidad)

STOP Sin Masa - Porque uno diferente

Para el STOP sin masa se debe tener más cuidado

- La partícula no tiene marco en reposo
- Deberiamos tener 2 grados de libertad rotacional (helicidad)
- Se han considerado variaciones de Tulczyjew y Pirani anteriormente

STOP Sin Masa - Porque uno diferente

Para el STOP sin masa se debe tener más cuidado

- La partícula no tiene marco en reposo
- Deberiamos tener 2 grados de libertad rotacional (helicidad)
- Se han considerado variaciones de Tulczyjew y Pirani anteriormente
    - $S^{\mu\nu}U_\nu = aU^\mu, \quad P^\mu U_\mu = \frac{da}{d\tau}$ (Bailyn-Ragusa 1977)

STOP Sin Masa - Porque uno diferente

Para el STOP sin masa se debe tener más cuidado

- La partícula no tiene marco en reposo
- Deberiamos tener 2 grados de libertad rotacional (helicidad)
- Se han considerado variaciones de Tulczyjew y Pirani anteriormente
  - $S^{\mu\nu}U_\nu = aU^\mu, \quad P^\mu U_\mu = \frac{da}{d\tau}$ (Bailyn-Ragusa 1977)
  - $S^{\mu\nu}P_\nu = 0, \quad P^\mu P_\mu = \frac{da}{d\tau}$ (Mashhoon 1975)

STOP Sin Masa - Porque uno diferente

Para el STOP sin masa se debe tener más cuidado

- La partícula no tiene marco en reposo
- Deberiamos tener 2 grados de libertad rotacional (helicidad)
- Se han considerado variaciones de Tulczyjew y Pirani anteriormente
  - $S^{\mu\nu}U_{\nu} = aU^{\mu}, \quad P^{\mu}U_{\mu} = \frac{da}{d\tau}$ (Bailyn-Ragusa 1977)
  - $S^{\mu\nu}P_{\nu} = 0, \quad P^{\mu}P_{\mu} = \frac{da}{d\tau}$ (Mashhoon 1975)
- Nosotros estudiamos una variación diferente de Tulczyjew

STOP Sin Masa - Elementos

Queremos que la constricción preserve $P^\mu P_\mu = 0$.

STOP Sin Masa - Elementos

Queremos que la constricción preserve $P^\mu P_\mu = 0$.

Elementos a utilizar

$$W^\mu \equiv S^{*\mu\nu} P_\nu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta\nu} S_{\alpha\beta} P_\nu$$

$$\epsilon^{0123} = +(\det(g_{\mu\nu}))^{-1/2}$$

$$V^\mu \equiv S^{\mu\nu} P_\nu$$

Junto al siguiente resultado

$$\text{if} \left\{ \begin{array}{ll} A^\mu A_\mu = 0 & \& \\ A^\mu B_\mu = 0 & \& \\ B^\mu B_\mu \geq 0 & \end{array} \right\} \text{then } \Rightarrow B^\mu = \kappa A^\mu. \tag{3}$$

STOP Sin Masa - Primer Acercamiento

STOP Sin Masa - Primer Acercamiento

- $P^\mu P_\mu = 0$

STOP Sin Masa - Primer Acercamiento

- $P^\mu P_\mu = 0$
- $W^\mu W_\mu = V_\mu V^\mu - \frac{1}{2} P^\mu P_\mu S^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} = 0$ (Discretización)

STOP Sin Masa - Primer Acercamiento

- $P^{\mu}P_{\mu} = 0$
- $W^{\mu}W_{\mu} = V_{\mu}V^{\mu} - \frac{1}{2}P^{\mu}P_{\mu}S^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta} = 0$ (Discretización)
- $\rightarrow W^{\mu} = \lambda P^{\mu}$

STOP Sin Masa - Primer Acercamiento

- $P^\mu P_\mu = 0$
- $W^\mu W_\mu = V_\mu V^\mu - \frac{1}{2} P^\mu P_\mu S^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} = 0$ (Discretización)
- $\rightarrow W^\mu = \lambda P^\mu$
- $\rightarrow V_\mu V^\mu = 0$

STOP Sin Masa - Primer Acercamiento

- $P^\mu P_\mu = 0$
- $W^\mu W_\mu = V_\mu V^\mu - \frac{1}{2} P^\mu P_\mu S^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} = 0$ (Discretización)
- $\rightarrow W^\mu = \lambda P^\mu$
- $\rightarrow V_\mu V^\mu = 0$
- $\rightarrow V^\mu = \alpha P^\mu \rightarrow S^{\mu\nu} P_\nu = \alpha P^\mu$

STOP Sin Masa - Primer Acercamiento

- $P^\mu P_\mu = 0$
- $W^\mu W_\mu = V_\mu V^\mu - \frac{1}{2} P^\mu P_\mu S^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} = 0$ (Discretización)
- $\rightarrow W^\mu = \lambda P^\mu$
- $\rightarrow V_\mu V^\mu = 0$
- $\rightarrow V^\mu = \alpha P^\mu \rightarrow S^{\mu\nu} P_\nu = \alpha P^\mu$

Entonces...

$$W^\mu = \lambda P^\mu$$

$$S^{\mu\nu} P_\nu = \alpha P^\mu$$

STOP Sin Masa - Posibles Resultados

Llegamos a dos posibles resultados

STOP Sin Masa - Posibles Resultados

Llegamos a dos posibles resultados

Caso $\mathcal{A}$

$$P^2 = 0 \qquad W^2 = 0 \qquad V^2 = 0 \qquad W^\mu = \lambda P^\mu$$

$$V^\mu = 0 \qquad S^* S = 0 \qquad J^2 = \lambda^2$$

STOP Sin Masa - Posibles Resultados

Llegamos a dos posibles resultados

Caso $\mathcal{A}$

$$P^2 = 0 \qquad W^2 = 0 \qquad V^2 = 0 \qquad W^\mu = \lambda P^\mu$$

$$V^\mu = 0 \qquad S^*S = 0 \qquad J^2 = \lambda^2$$

Caso $\mathcal{B}$

$$P^2 = 0 \qquad W^2 = 0 \qquad V^2 = 0 \qquad W^\mu = \lambda P^\mu$$

$$V^\mu = \alpha P^\mu \qquad W^\mu = \gamma V^\mu \qquad S^*S \propto \alpha\lambda \qquad J^2 = \lambda^2 - \alpha^2$$

STOP Sin Masa - Tabla Argumentos

	$W^\mu = \lambda P^\mu$	$V^\mu = \alpha P^\mu$	$W^\mu = \gamma V^\mu$	$P_\mu P^\mu = 0$	$W_\mu W^\mu = 0$	$V_\mu V^\mu = 0$
$W^\mu = \lambda P^\mu$	$\mathcal{A}$ & $\mathcal{B}$	$\mathcal{B}_R$	$\mathcal{B}_R$	$\mathcal{A}_R$ & $\mathcal{B}_R$	$\mathcal{A}_R$ & $\mathcal{B}_R$	$\mathcal{A}_R$ & $\mathcal{B}_R$
$V^\mu = \alpha P^\mu$		$\mathcal{B}$	$\mathcal{B}_R$	$\mathcal{B}_R$	$\mathcal{B}_R$	$\mathcal{B}_R$
$W^\mu = \gamma V^\mu$			??	$\mathcal{B}_R$	$\mathcal{B}_R$	$\mathcal{B}_R$
$P_\mu P^\mu = 0$				-	$\mathcal{A}$ & $\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ & $\mathcal{B}$
$W_\mu W^\mu = 0$					-	$\mathcal{A}$ & $\mathcal{B}$
$V_\mu V^\mu = 0$						-

STOP Sin Masa - Consistencia y un Poco Más

Utilizaremos el caso $\mathcal{B}$ ya que

STOP Sin Masa - Consistencia y un Poco Más

Utilizaremos el caso $\mathcal{B}$ ya que

- "Parametriza" en α y λ las familias de constricciones

STOP Sin Masa - Consistencia y un Poco Más

Utilizaremos el caso $\mathcal{B}$ ya que

- "Parametriza" en α y λ las familias de constricciones
- Sabemos que el caso $\alpha = 0$ esta mal definido

STOP Sin Masa - Consistencia y un Poco Más

Utilizaremos el caso $\mathcal{B}$ ya que

- "Parametriza" en α y λ las familias de constricciones
- Sabemos que el caso $\alpha = 0$ esta mal definido

Algunos resultados

STOP Sin Masa - Consistencia y un Poco Más

Utilizaremos el caso $\mathcal{B}$ ya que

- "Parametriza" en α y λ las familias de constricciones
- Sabemos que el caso $\alpha = 0$ esta mal definido

Algunos resultados

Considerando $\quad M^{\mu\nu} P_\nu = \epsilon P^\mu \quad (M = S$ ó $M = S^*$ y $\epsilon = \alpha$ ó $\epsilon = \lambda)$

STOP Sin Masa - Consistencia y un Poco Más

Utilizaremos el caso $\mathcal{B}$ ya que

- "Parametriza" en α y λ las familias de constricciones
- Sabemos que el caso $\alpha = 0$ esta mal definido

Algunos resultados

Considerando $\quad M^{\mu\nu} P_\nu = \epsilon P^\mu \quad (M = S$ ó $M = S^*$ y $\epsilon = \alpha$ ó $\epsilon = \lambda)$

Consistencia

$$\frac{d}{d\tau}(P^\mu P_\mu) = -\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} P^\mu P_\mu$$

STOP Sin Masa - Consistencia y un Poco Más

Utilizaremos el caso $\mathcal{B}$ ya que

- "Parametriza" en α y λ las familias de constricciones
- Sabemos que el caso $\alpha = 0$ esta mal definido

Algunos resultados

Considerando $\quad M^{\mu\nu} P_\nu = \epsilon P^\mu \quad (M = S$ ó $M = S^*$ y $\epsilon = \alpha$ ó $\epsilon = \lambda)$

Consistencia

$$\frac{d}{d\tau}(P^\mu P_\mu) = -\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} P^\mu P_\mu$$

Resultados Relevantes

STOP Sin Masa - Consistencia y un Poco Más

Utilizaremos el caso $\mathcal{B}$ ya que

- "Parametriza" en α y λ las familias de constricciones
- Sabemos que el caso $\alpha = 0$ esta mal definido

Algunos resultados

Considerando $\quad M^{\mu\nu} P_\nu = \epsilon P^\mu \quad (M = S$ ó $M = S^*$ y $\epsilon = \alpha$ ó $\epsilon = \lambda)$

Consistencia

$$\frac{d}{d\tau}(P^\mu P_\mu) = -\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} P^\mu P_\mu$$

Resultados Relevantes

$$P^\nu U_\nu = 0$$

STOP Sin Masa - Consistencia y un Poco Más

Utilizaremos el caso $\mathcal{B}$ ya que

- "Parametriza" en α y λ las familias de constricciones
- Sabemos que el caso $\alpha = 0$ esta mal definido

Algunos resultados

Considerando $\quad M^{\mu\nu} P_\nu = \epsilon P^\mu \quad (M = S$ ó $M = S^*$ y $\epsilon = \alpha$ ó $\epsilon = \lambda)$

Consistencia

$$\frac{d}{d\tau}(P^\mu P_\mu) = -\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} P^\mu P_\mu$$

Resultados Relevantes

$$P^\nu U_\nu = 0$$

$$\mathring{P}^\mu = \kappa P^\mu$$

STOP Sin Masa - Consistencia y un Poco Más

Utilizaremos el caso $\mathcal{B}$ ya que

- "Parametriza" en α y λ las familias de constricciones
- Sabemos que el caso $\alpha = 0$ esta mal definido

Algunos resultados

Considerando $\quad M^{\mu\nu} P_\nu = \epsilon P^\mu \quad (M = S$ ó $M = S^*$ y $\epsilon = \alpha$ ó $\epsilon = \lambda)$

Consistencia

$$\frac{d}{d\tau}(P^\mu P_\mu) = -\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} P^\mu P_\mu$$

Resultados Relevantes

$$P^\nu U_\nu = 0 \qquad \alpha = Constante$$

$$\mathring{P}^\mu = \kappa P^\mu \qquad \lambda = Constante$$

STOP Sin Masa - En Resumen...

Constricciones a utilizar

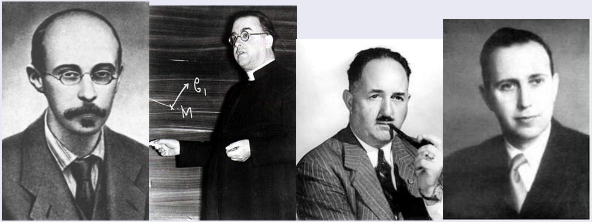
$$S^{\mu\nu}P_{\nu} = \alpha P^{\mu} \tag{4}$$

$$W^{\mu\nu}P_{\nu} = \lambda P^{\mu} \tag{5}$$

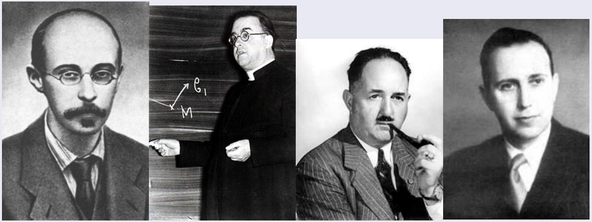
Soluciones STOP Masivos

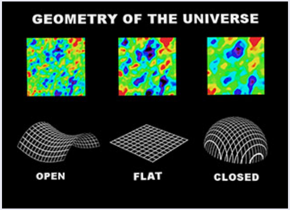
Veamos algunas soluciones para STOPs masivos...

Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker



Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker





Friedmann-Robertson-Walker

Espacio tiempo definido por

$$ds^2 = c^2dt^2 - a(t)^2g(r)dr^2 - a(t)^2r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

$$g(r) = 1/(1 - kr^2)$$

Friedmann-Robertson-Walker

Espacio tiempo definido por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 g(r) dr^2 - a(t)^2 r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

$$g(r) = 1/(1 - kr^2)$$

Vectores de Killing

$$\xi^0_\mu = (0, 0, 0, -a^2 r^2 \sin^2\theta)$$

$$\xi^1_\mu = (0, 0, a^2 r^2 \sin\phi, a^2 r^2 \sin\theta \cos\theta \cos\phi)$$

$$\xi^2_\mu = (0, 0, -a^2 r^2 \cos\phi, a^2 r^2 \sin\theta \cos\theta \sin\phi)$$

Friedmann-Robertson-Walker - Solución Plana

Solución plana con:

Friedmann-Robertson-Walker - Solución Plana

Solución plana con:

Nueva constante de movimiento

$$\sigma = \frac{\beta}{2}\left[\left(P^t\right)^2 - m^2\right]$$

$$\beta \equiv a^2 m^2 c^4 + J^2 \dot{a}^2 + c^2 J^2 k$$

Friedmann-Robertson-Walker - Solución Plana

Solución plana con:

Nueva constante de movimiento

$$\sigma = \frac{\beta}{2}\left[\left(P^t\right)^2 - m^2\right]$$

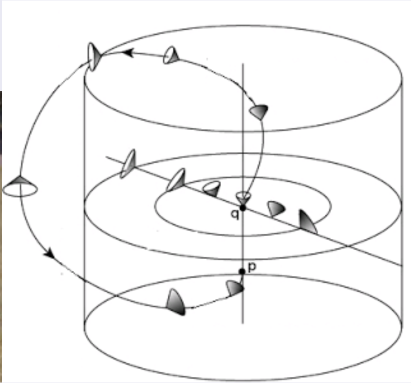
$$\beta \equiv a^2 m^2 c^4 + J^2 \dot{a}^2 + c^2 J^2 k$$

Elemento de línea

$$\frac{ds^2}{c^2 dt^2} = 1 - \frac{2\sigma\left(J^2\dot{H} + J^2H^2 + c^4m^2\right)^2}{\left(J^2H^2 + c^4m^2\right)^2\left(a^2m^2\left(J^2H^2 + c^4m^2\right) + 2\sigma\right)}$$

Gödel

Gödel



Gödel

Espacio tiempo definido por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 + e^{2xw_0} dy^2 - dz^2 + 2ce^{xw_0} dtdy$$

Gödel

Espacio tiempo definido por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 + e^{2xw_0} dy^2 - dz^2 + 2ce^{xw_0} dtdy$$

Vectores de Killing

$$\xi^0_\mu = \left(c^2, 0, ce^{w_0 x}, 0\right)$$

$$\xi^1_\mu = (0, 0, 0, -1)$$

$$\xi^2_\mu = \left(ce^{w_0 x}, 0, \frac{1}{2} e^{2w_0 x}, 0\right)$$

$$\xi^3_\mu = \left(-cw_0 ye^{w_0 x}, -1, -\frac{1}{2} w_0 ye^{2w_0 x}, 0\right)$$

$$\xi^4_\mu = \left(-\frac{1}{2} cw_0 y^2 e^{w_0 x} - \frac{ce^{-w_0 x}}{w_0}, -y, -\frac{1}{4} w_0 y^2 e^{2w_0 x} - \frac{3}{2w_0}, 0\right)$$

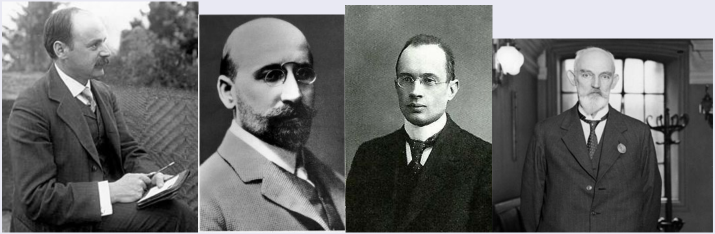
Gödel - Solución Plana $z = 0$

Elemento de línea

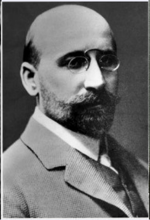
$$\frac{ds^2}{c^2dt^2} = \frac{4c^2e^{2w_0x}\left(4E^2\lambda^2/c^2 + c^2(\lambda-2)^2(\lambda+2)^4m^2\right)}{\left(2cC_3(\lambda+2)^2 + E\left(\lambda^2-4\lambda-4\right)e^{w_0x}\right)^2}$$

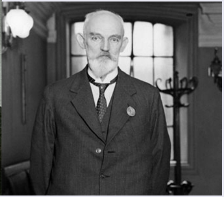
$$\lambda \equiv (\sqrt{2}Jw_0)/(cm)$$

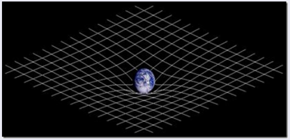
Genérico tipo Schwarzschild



Genérico tipo Schwarzschild





Genérico tipo Schwarzschild

Espacio tiempo definido por

$$ds^2 = g(r)dt^2 - \frac{c^2}{g(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Genérico tipo Schwarzschild

Espacio tiempo definido por

$$ds^2 = g(r)dt^2 - \frac{c^2}{g(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Vectores de Killing

$$\xi^0_\mu = (g, 0, 0, 0)$$

$$\xi^1_\mu = (0, 0, 0, -r^2 \sin^2\theta)$$

$$\xi^2_\mu = (0, 0, r^2 \sin\phi, r^2 \cos\theta \cos\phi \sin\theta)$$
$$\xi^3_\mu = (0, 0, -r^2 \cos\phi, r^2 \cos\theta \sin\theta \sin\phi)$$

Genérico tipo Schwarzschild - Solución Plana

Solución y ds

$$\frac{ds^2}{c^2dt^2} = \frac{m^2(1-\Lambda)}{(P^t)^2}$$

$$P_t = \frac{E \mp jJg'/(2mc^2r)}{1-\eta} \qquad P_\phi = \frac{-j \pm EJ/(mc^2)}{\eta - 1}$$

$$\eta \equiv \frac{J^2 g'}{2c^4m^2r}$$

$$\Lambda \equiv \frac{\left(-j \pm EJ/(c^2m)\right)^2}{c^2(\eta-1)^2m^2r^2}\left[\frac{(\eta r g''/g' - 1)^2}{(\eta-1)^2} - 1\right]$$

Caso Reissner-Nordstrom-(Anti)de Sitter - Solución Plana

En este caso

$$g(r) = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{\kappa G Q^2}{c^4 r^2} - \frac{\lambda r^2}{3}\right)$$

Valor de Λ

$$\Lambda = \frac{27c^6 G J^2 r^6 \left(3c^2 M r - 4\kappa Q^2\right)\left(c^2 jm + EJ\right)^2 \left(6c^6 m^2 r^4 + 2c^4 J^2 \lambda r^4 + 3c^2 G J^2 M r - 6\kappa G J^2 Q^2\right)}{\left(3c^6 m^2 r^4 + c^4 J^2 \lambda r^4 - 3c^2 G J^2 M r + 3\kappa G J^2 Q^2\right)^4}$$

Soluciones STOP sin masa

Ahora un ejemplo para STOPs sin masa...

Genérico tipo Schwarzschild - Solución Radial

Resultado

Genérico tipo Schwarzschild - Solución Radial

Resultado

$$\frac{\dot{r}}{\dot{t}} = \frac{\pm g}{c}$$

Genérico tipo Schwarzschild - Solución Radial

Resultado

$$\frac{\dot{r}}{\dot{t}} = \frac{\pm g}{c}$$

$$P^t = \frac{2cE - \pm\alpha g'}{2cg}$$

Genérico tipo Schwarzschild - Solución Radial

Resultado

$$\frac{\dot{r}}{\dot{t}} = \frac{\pm g}{c}$$

$$P^t = \frac{2cE - \pm\alpha g'}{2cg}$$

$$P^r = \pm\frac{2cE - \pm\alpha g'}{2c^2}$$

Genérico tipo Schwarzschild - Solución Radial

Resultado

$$\frac{\dot{r}}{\dot{t}} = \frac{\pm g}{c}$$

$$P^t = \frac{2cE - \pm\alpha g'}{2cg}$$

$$P^r = \pm\frac{2cE - \pm\alpha g'}{2c^2}$$

$$ds^2 = 0$$

$$P^2 = u^2 = 0$$

Sorpresa Térmica

Concentrémonos en un STOP avanzando en r

$$P^t = \frac{2cE - \alpha g'}{2cg}$$

Sorpresa Térmica

Concentrémonos en un STOP avanzando en r

$$P^t = \frac{2cE - \alpha g'}{2cg}$$

- Consideremos un observador estático en un radio r

Sorpresa Térmica

Concentrémonos en un STOP avanzando en r

$$P^t = \frac{2cE - \alpha g'}{2cg}$$

- Consideremos un observador estático en un radio r
- Su cuadri-velocidad esta dada por $U_o^\mu = c(g^{-1/2}(r), 0, 0, 0)$

Sorpresa Térmica

Concentrémonos en un STOP avanzando en r

$$P^t = \frac{2cE - \alpha g'}{2cg}$$

- Consideremos un observador estático en un radio r
- Su cuadri-velocidad esta dada por $U_o^\mu = c(g^{-1/2}(r), 0, 0, 0)$
- La energía que observa de un STOP sin masa es

$$\mathcal{E}(r) = U_o^\mu P_\mu = cg^{1/2} P^t = c\frac{E - \alpha g'/2c}{g^{1/2}}$$

Sorpresa Térmica

Concentrémonos en un STOP avanzando en r

$$P^t = \frac{2cE - \alpha g'}{2cg}$$

- Consideremos un observador estático en un radio r
- Su cuadri-velocidad esta dada por $U_o^\mu = c(g^{-1/2}(r), 0, 0, 0)$
- La energía que observa de un STOP sin masa es

$$\mathcal{E}(r) = U_o^\mu P_\mu = cg^{1/2} P^t = c\frac{E - \alpha g'/2c}{g^{1/2}}$$

- Usando que E es una constante de movimiento podemos relacionar la energía medida en radios r_1 y r_2

Sorpresa Térmica Contd...

Relación de energía medida en r_1 y r_2

$$\mathcal{E}(r_2) = \sqrt{\frac{g(r_1)}{g(r_2)}}\mathcal{E}(r_1) + \frac{\alpha}{2}\frac{g'(r_1)-g'(r_2)}{g^{1/2}(r_2)}$$

Sorpresa Térmica Contd...

Relación de energía medida en r_1 y r_2

$$\mathcal{E}(r_2) = \sqrt{\frac{g(r_1)}{g(r_2)}}\mathcal{E}(r_1) + \frac{\alpha}{2}\frac{g'(r_1)-g'(r_2)}{g^{1/2}(r_2)}$$

- Existe una contribución extra al caso usual cuando $\alpha \neq 0$

Sorpresa Térmica Contd...

Relación de energía medida en r_1 y r_2

$$\mathcal{E}(r_2) = \sqrt{\frac{g(r_1)}{g(r_2)}}\mathcal{E}(r_1) + \frac{\alpha}{2}\frac{g'(r_1)-g'(r_2)}{g^{1/2}(r_2)}$$

- Existe una contribución extra al caso usual cuando $\alpha \neq 0$
- Cuando $r_2 \longrightarrow \infty$ y el STOP fue producido muy cerca del horizonte de eventos de un hoyo negro de Schwarzschild tenemos

Sorpresa Térmica Contd...

Relación de energía medida en r_1 y r_2

$$\mathcal{E}(r_2) = \sqrt{\frac{g(r_1)}{g(r_2)}}\mathcal{E}(r_1) + \frac{\alpha}{2}\frac{g'(r_1)-g'(r_2)}{g^{1/2}(r_2)}$$

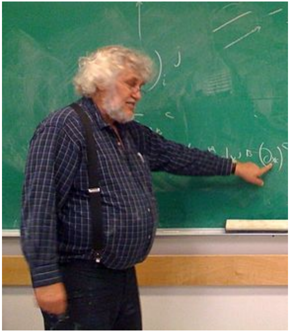
- Existe una contribución extra al caso usual cuando $\alpha \neq 0$
- Cuando $r_2 \longrightarrow \infty$ y el STOP fue producido muy cerca del horizonte de eventos de un hoyo negro de Schwarzschild tenemos

En infinito

$$\mathcal{E}_\infty = \frac{\alpha}{c}\cdot\frac{1}{2}g'|_{r=r_s} = \frac{2\pi\alpha}{\hbar}k_B T_{HU}$$

donde T_{HU} es la temperatura de Hawking-Unruh.

Sorpresa Térmica Contd...



Resultados

Resultados

- Se presentó una nueva constricción para el caso de STOPs sin masa y se analizó su consistencia

Resultados

- Se presentó una nueva constricción para el caso de STOPs sin masa y se analizó su consistencia
- Se resolvieron las trayectorias planas para el caso de STOPs masivos en

Resultados

- Se presentó una nueva constricción para el caso de STOPs sin masa y se analizó su consistencia
- Se resolvieron las trayectorias planas para el caso de STOPs masivos en
  - FLRW (nueva constante de movimiento, puede ser superluminal)

Resultados

- Se presentó una nueva constricción para el caso de STOPs sin masa y se analizó su consistencia
- Se resolvieron las trayectorias planas para el caso de STOPs masivos en
  - FLRW (nueva constante de movimiento, puede ser superluminal)
  - Genérico tipo Schwarzschild (puede ser superluminal)

Resultados

- Se presentó una nueva constricción para el caso de STOPs sin masa y se analizó su consistencia
- Se resolvieron las trayectorias planas para el caso de STOPs masivos en
  - FLRW (nueva constante de movimiento, puede ser superluminal)
  - Genérico tipo Schwarzschild (puede ser superluminal)
  - Gödel (no puede ser superluminal)

Resultados

- Se presentó una nueva constricción para el caso de STOPs sin masa y se analizó su consistencia
- Se resolvieron las trayectorias planas para el caso de STOPs masivos en
  - FLRW (nueva constante de movimiento, puede ser superluminal)
  - Genérico tipo Schwarzschild (puede ser superluminal)
  - Gödel (no puede ser superluminal)
- Se resolvió la trayectoria radial en espacio tiempo Genérico tipo Schwarzschild para el caso de STOPs sin masa

Resultados

- Se presentó una nueva constricción para el caso de STOPs sin masa y se analizó su consistencia
- Se resolvieron las trayectorias planas para el caso de STOPs masivos en
  - FLRW (nueva constante de movimiento, puede ser superluminal)
  - Genérico tipo Schwarzschild (puede ser superluminal)
  - Gödel (no puede ser superluminal)
- Se resolvió la trayectoria radial en espacio tiempo Genérico tipo Schwarzschild para el caso de STOPs sin masa
  - En este caso surgió una solución que presenta una energía residual

Resultados

- Se presentó una nueva constricción para el caso de STOPs sin masa y se analizó su consistencia
- Se resolvieron las trayectorias planas para el caso de STOPs masivos en
  - FLRW (nueva constante de movimiento, puede ser superluminal)
  - Genérico tipo Schwarzschild (puede ser superluminal)
  - Gödel (no puede ser superluminal)
- Se resolvió la trayectoria radial en espacio tiempo Genérico tipo Schwarzschild para el caso de STOPs sin masa
  - En este caso surgió una solución que presenta una energía residual
  - Esta energía es proporcional a la Temperatura de Hawking-Unruh en hoyos negros tipo Schwarzschild

Trabajos Futuros

Trabajos Futuros

- Solución de STOPs sin masa en FLRW (Javier Núñez)

Trabajos Futuros

- Solución de STOPs sin masa en FLRW (Javier Núñez)
- Solución plana de STOPs sin masa en ambos casos (FLRW y Genérico tipo Schwarzschild)

Gracias!

GRACIAS!