PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE FÍSICA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
Primer Semestre de 2014

FIM 8440 ⋆ Mecánica Cuántica Avanzada

Tarea N º 1

NOMBRE : Sebastián Urrutia Quiroga
FECHA : 11 de marzo de 2014

Resolución de Problemas

1. Ecuaciones de Maxwell en notación relativista

1.1. Ecuaciones no homogéneas

Analicemos el siguiente término:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} \tag{1}$$

donde

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

- Para $\beta = 0$:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha F^{\alpha 0} &= \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} && (3) \\ &= \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z && (4) \\ &= \nabla \cdot \vec{E} && (5) \end{aligned}$$

  Por otra parte, como trabajamos en un sistema de unidades en que $c = 1$,

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2} = 1 \quad \longrightarrow \quad \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0} \tag{6}$$

  Así, por la ley de Gauss,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \mu_0 \rho = \mu_0 J^0 \tag{7}$$

  Luego,

$$\partial_\alpha F^{\alpha 0} = \mu_0 J^0 \tag{8}$$

- Para $\beta = 1$:

$$\partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = -\partial_t E_x + \partial_y B_z - \partial_z B_y \tag{9}$$

- Para $\beta = 2$:

$$\partial_0 F^{02} + \partial_1 F^{12} + \partial_2 F^{22} + \partial_3 F^{32} = -\partial_t E_y - \partial_x B_z + \partial_z B_x \tag{10}$$

- Para $\beta = 3$:

$$\partial_0 F^{03} + \partial_1 F^{13} + \partial_2 F^{23} + \partial_3 F^{33} = -\partial_t E_z + \partial_x B_y - \partial_y B_x \tag{11}$$

Notando que:

$$\nabla \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y B_z - \partial_z B_y \\ \partial_z B_x - \partial_x B_z \\ \partial_x B_y - \partial_y B_x \end{pmatrix} \tag{12}$$

Juntando las ecuaciones (9), (10), (11) y haciendo uso de (12) y de la ley de Ampère-Maxwell en nuestro sistema de unidades,

$$-\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \tag{13}$$

Finalmente, combinando (8) y (13) se llega a probar que las ecuaciones de Maxwell no homogéneas pueden escribirse como sigue:

$$\boxed{\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 J^\beta} \tag{14}$$

1.2. Ecuaciones homogéneas

Analicemos ahora el siguiente término:

$$\partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0 \tag{15}$$

con

$$F_{\beta\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Expandiendo,

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} - \partial_\alpha F_{\gamma\beta} - \partial_\beta F_{\alpha\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma F_{\beta\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \tag{17}$$

pero, como el tensor es antisimétrico, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$:

$$2\Big(\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha}\Big) = 0 \tag{18}$$

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0 \tag{19}$$

Notamos que existe una permutación cíclica de los índices. Para determinar cuántas ecuaciones linealmente independientes debemos calcular, razonamos de la siguiente manera:

1. Existen cuatro opciones para cada índice, y se escogen tres de ellos en cada término a sumar
2. Como aparece una suma de las permutaciones, i.e. se suman tres términos correspondientes a las permutaciones cíclicas de tres elementos, el orden en que se opera no es relevante

3. La repetición de tres índices no aporta una ecuación linealmente independiente, ya que: *Sean* $\alpha = \beta = \gamma = \mu$,

$$\partial_\mu F_{\mu\mu} + \partial_\mu F_{\mu\mu} + \partial_\mu F_{\mu\mu} = 3\,\partial_\mu F_{\mu\mu} \equiv 0$$

   La expresión anterior es idénticamente cero, pues el tensor solo tiene ceros en la diagonal

4. Tampoco aportan ecuaciones L.I. las repeticiones de dos índices, ya que en ese caso estaríamos ante el siguiente escenario: *Sean* $\beta = \gamma = \mu \neq \alpha$,

$$\partial_\alpha F_{\mu\mu} + \partial_\mu F_{\alpha\mu} + \partial_\mu F_{\mu\alpha} \equiv 0$$

   La expresión anterior es idénticamente cero, pues el término en rojo *es igual a cero –ya que el tensor tiene ceros en la diagonal– y el término en* azul *se anula por el carácter antisimétrico del tensor*

5. Con todo lo anterior en mente, se concluye que la cantidad de ecuaciones que importa analizar corresponden a una combinatoria (donde no importa el orden y no hay repeticiones) de 4 sobre 3:

$$\binom{4}{3} = 4 \text{ ecuaciones L.I.}$$

Los casos de interés son:

- $\boxed{\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 2}$

$$\begin{aligned} \partial_0 F_{12} + \partial_2 F_{01} + \partial_1 F_{20} &= 0 \\ -\partial_t B_z + \partial_y E_x - \partial_x E_y &= \end{aligned} \tag{20}$$

- $\boxed{\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 3}$

$$\begin{aligned} \partial_0 F_{13} + \partial_3 F_{01} + \partial_1 F_{30} &= 0 \\ \partial_t B_y + \partial_z E_x - \partial_x E_z &= \end{aligned} \tag{21}$$

- $\boxed{\alpha = 0,\ \beta = 2,\ \gamma = 3}$

$$\begin{aligned} \partial_0 F_{23} + \partial_3 F_{02} + \partial_2 F_{30} &= 0 \\ -\partial_t B_x + \partial_z E_y - \partial_y E_z &= \end{aligned} \tag{22}$$

- $\boxed{\alpha = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = 2}$

$$\begin{aligned} \partial_1 F_{23} + \partial_3 F_{12} + \partial_2 F_{31} &= 0 \\ -\partial_x B_x - \partial_z B_z - \partial_y B_y &= \end{aligned} \tag{23}$$

De la ecuación (23) se concluye que:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{24}$$

Intercambiando $\vec{B}$ por $\vec{E}$ en (12), podemos agrupar las ecuaciones (20), (21) y (22) de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = \vec{0} \tag{25}$$

que corresponden, justamente, a las ecuaciones de Maxwell homogéneas. Finalmente, se llega a probar que las dichas ecuaciones pueden escribirse como sigue:

$$\boxed{\partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0} \tag{26}$$