PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE FÍSICA
INSTITUTO DE FÍSICA
Primer Semestre de 2014

FIM 8440 ⋆ Mecánica Cuántica Avanzada

Tarea N º 2

NOMBRE : Sebastián Urrutia Quiroga
FECHA : 26 de marzo de 2014

Resolución de Problemas

1. Matrices de Dirac

1.1. Demostración de algunas propiedades

- **Propiedad 1:**

$$
\begin{aligned}
\gamma_\mu \gamma^\mu &= \frac{1}{2}\Big(\gamma_\mu \gamma^\mu + \gamma_\nu \gamma^\nu\Big) && (1)\\
&= \frac{1}{2}\Big(g_{\mu\nu}\gamma^\nu \gamma^\mu + g_{\nu\mu}\gamma^\mu \gamma^\nu\Big) && (2)\\
&= \frac{g_{\mu\nu}}{2}\Big(\gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu\Big) && (3)\\
&= \frac{g_{\mu\nu}}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} && (4)\\
&= g_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu} && (5)\\
&= 4\,\mathbb{1}_{4\times 4} && (6)
\end{aligned}
$$

donde en (3) se he hecho uso de que el tensor métrico es simétrico:

$$
g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \qquad \wedge \qquad g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu} \tag{7}
$$

y en (4) se empleó la relación de anti-conmutación:

$$
\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\,\mathbb{1}_{4\times 4} \tag{8}
$$

donde $\mathbb{1}$ representa la matriz identidad. Finalmente,

$$
\boxed{\gamma_\mu \gamma^\mu = 4\,\mathbb{1}_{4\times 4}} \tag{9}
$$

- **Propiedad 2:**

$$
\begin{aligned}
\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= \Big(2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu\Big)\gamma_\mu && (10)\\
&= \Big(2g^{\nu\mu} - \gamma^\nu \gamma^\mu\Big)\gamma_\mu && (11)\\
&= 2\gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\mu && (12)\\
&= 2\gamma^\nu - 4\gamma^\nu && (13)\\
&= -2\gamma^\nu && (14)
\end{aligned}
$$

donde en (10) se utilizó la relación de anti-conmutación, en (11) la relación de simetría del tensor métrico y en (13) se empleó la primera propiedad demostrada.

Finalmente,

$$\boxed{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu} \tag{15}$$

- **Propiedad 3:**

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu &= \Big(2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu\Big)\gamma^\rho \gamma_\mu && (16)\\
&= 2g^{\nu\mu}\gamma^\rho\gamma_\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\mu && (17)\\
&= 2\gamma^\rho\gamma^\nu + 2\gamma^\nu\gamma^\rho && (18)\\
&= 2\{\gamma^\rho, \gamma^\nu\} && (19)\\
&= 4g^{\nu\rho}\,\mathbb{1}_{4\times 4} && (20)
\end{aligned}$$

donde en (16) y (20) se utilizó la relación de anti-conmutación, en (17) la relación de simetría del tensor métrico y en (18) se empleó la segunda propiedad demostrada.

Finalmente,

$$\boxed{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho}\,\mathbb{1}_{4\times 4}} \tag{21}$$

2. Generador de transformaciones de Lorentz

2.1. Rotación en torno al eje Z

La expansión general de las transformaciones de Lorentz infinitesimales viene dada por:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \Delta\omega^\mu{}_\nu \qquad \wedge \qquad \tau = -\frac{i}{4}\Delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \tag{22}$$

En este caso, el generador viene dado por:

$$\Delta\omega^\mu{}_\nu = i\,\theta J_z{}^\mu{}_\nu \tag{23}$$

Notemos que: $\Delta\omega^{\mu\nu} = \Delta\omega^\mu{}_{\nu'} g^{\nu\nu'}$. Como los elementos del generador son casi todos nulos, solo nos interesa calcular los casos que no son cero:

$$\Delta\omega^{12} = \Delta\omega^1{}_{\nu'} g^{2\nu'} = -\Delta\omega^1{}_2\ , \quad \Delta\omega^{21} = \Delta\omega^2{}_{\nu'} g^{1\nu'} = -\Delta\omega^2{}_1 \tag{24}$$

Así, reemplazando explícitamente en (23),

$$\Delta\omega^{\mu\nu} = \theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

Ahora, para calcular la representación de la rotación, volvemos a notar que casi todos los términos en $\Delta\omega^{\mu\nu}$ son cero, salvo dos de ellos:

- $\boxed{\mu = 1,\, \nu = 2}$

$$\sigma_{12} = \frac{i}{2}[\gamma_1, \gamma_2] = \frac{i}{2}\Big(\gamma_1\gamma_2 - \gamma_2\gamma_1\Big) \tag{26}$$

Recordado que $\gamma_\mu = (\gamma^0, -\vec{\gamma})$,

$$= \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$= \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma^2\sigma^1 - \sigma^1\sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2\sigma^1 - \sigma^1\sigma^2 \end{pmatrix} \tag{28}$$

Y como $[\sigma^j, \sigma^k] = 2i\,\epsilon^{jkl}\sigma^l$,

$$= -\epsilon^{213}\begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \tag{29}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \tag{30}$$

- $\boxed{\mu = 2,\, \nu = 1}$

$$\sigma_{21} = -\sigma_{12} = -\begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \tag{31}$$

Así,

$$\tau = -\frac{i\,\theta}{4}\Big(-\sigma_{12} + \sigma_{21}\Big) = \frac{i\,\theta}{2}\begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \tag{32}$$

que era lo pedido. Por tanto,

$$\boxed{S(rot_z) = \exp\left\{\frac{i\,\theta}{2}\begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}\right\}} \tag{33}$$

2.2. Rotación en torno al eje Z con ángulos dados

La expresión (33) se puede evaluar explícitamente si se diagonaliza el argumento de la exponencial. En este caso, esta situación es trivial, puesto que:

$$\begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\,(1, -1, 1, -1) \tag{34}$$

donde la notación $\mathrm{diag}\,(\cdots)$ representa una matriz diagonal. De acuerdo al álgebra lineal,

$$\begin{aligned} S_{rot_z}(\theta) &= \exp\left\{\frac{i\,\theta}{2}\mathrm{diag}\,(1,-1,1,-1)\right\} && (35)\\ &= \exp\left\{\mathrm{diag}\left(\frac{i\,\theta}{2}, -\frac{i\,\theta}{2}, \frac{i\,\theta}{2}, -\frac{i\,\theta}{2}\right)\right\} && (36)\\ &= \mathrm{diag}\left(e^{i\,\theta/2}, e^{-i\,\theta/2}, e^{i\,\theta/2}, e^{-i\,\theta/2}\right) && (37)\\ &= e^{i\,\theta/2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\,\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\,\theta} \end{pmatrix} && (38) \end{aligned}$$

pues la exponencial de una matriz diagonal es la matriz diagonal de la exponenciación de cada elemento[1]. Ahora,

- $\boxed{\theta = 2\pi}$

  $$S_{rot_z}(2\pi) = -\mathbb{1}_{4\times 4} \tag{39}$$

  Por tanto,

  $$\boxed{\psi' = S_{rot_z}(2\pi)\psi = -\psi} \tag{40}$$

- $\boxed{\theta = 4\pi}$

  $$S_{rot_z}(4\pi) = \mathbb{1}_{4\times 4} \tag{41}$$

  Por tanto,

  $$\boxed{\psi' = S_{rot_z}(4\pi)\psi = \psi} \tag{42}$$

y se demuestra lo pedido.

[1] Ver Anexo I

2.3. Boost en la dirección X

Operamos de una manera similar a la primera sección. Nuevamente, los elementos del generador son casi todos nulos, excepto:

$$\Delta\omega^{01} = \Delta\omega^{0}{}_{\nu'} g^{1\nu'} = -\Delta\omega^{0}{}_{1} \ , \quad \Delta\omega^{10} = \Delta\omega^{1}{}_{\nu'} g^{0\nu'} = \Delta\omega^{1}{}_{0} \tag{43}$$

Así, reemplazando explícitamente en (23),

$$\Delta\omega^{\mu\nu} = \eta \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{44}$$

Ahora, para calcular la representación del *boost*, volvemos a notar que casi todos los términos en $\Delta\omega^{\mu\nu}$ son cero, salvo dos de ellos:

- $\boxed{\mu = 0,\, \nu = 1}$

$$\sigma_{01} = \frac{i}{2}[\gamma_0, \gamma_1] \tag{45}$$

Recordado que $\gamma_\mu = (\gamma^0, -\vec{\gamma})$,

$$= \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \tag{46}$$

$$= \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2\sigma^1 \\ -2\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{47}$$

$$= -i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{48}$$

- $\boxed{\mu = 1,\, \nu = 0}$

$$\sigma_{10} = -\sigma_{01} = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{49}$$

Así,

$$\tau = -\frac{i\,\eta}{4}\Big(-\sigma_{01} + \sigma_{10}\Big) = \frac{\eta}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{50}$$

Anexo I: Exponencial de una matriz diagonal

Sea $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ una matriz de $n \times n$. Es fácil probar que:

$$\begin{aligned}
D^2 &= \operatorname{diag}\left({d_1}^2, {d_2}^2, \ldots, {d_n}^2\right) \\
D^3 &= \operatorname{diag}\left({d_1}^3, {d_2}^3, \ldots, {d_n}^3\right) \\
&\vdots \\
D^k &= \operatorname{diag}\left({d_1}^k, {d_2}^k, \ldots, {d_n}^k\right)
\end{aligned}$$

Ahora, sea $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\exp(\alpha\, D) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k\, D^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \operatorname{diag}\left({d_1}^k, \ldots, {d_n}^k\right)
\end{aligned}$$

Dado que $\dfrac{\alpha^k}{k!}$ son escalares, pueden multiplicar a todos los elementos de la diagonal:

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{diag}\left(\frac{\alpha^k\, {d_1}^k}{k!}, \ldots, \frac{\alpha^k\, {d_n}^k}{k!}\right)$$

Si suponemos que la serie es convergente, entonces la linealidad garantiza:

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k\, {d_1}^k}{k!}, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k\, {d_n}^k}{k!}\right) \\
&= \operatorname{diag}\Big(\exp(\alpha\, d_1), \ldots, \exp(\alpha\, d_n)\Big)
\end{aligned}$$

Y, por lo tanto, *la exponencial de una matriz diagonal es la matriz diagonal con la exponencial de sus elementos.*