Solucion: Problema 1:

a) Un dipolo eléctrico es un sistema de dos cargas de signo opuesto e igual magnitud cercanas entre sí. **(0.5P)**

Se define el momento dipolar eléctrico como

$$\vec{p} = q\vec{d}.$$

$|\vec{d}| = d$ es la distancia entre las dos cargas y el vector $\vec{d}$ tiene el sentido de la carga negativa a la positiva. **(0.5P)**

b) El campo eléctrico de la carga Q_1 está dada por:

$$\vec{E}_{Q1} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

El campo eléctrico de la carga Q_2 está dada por:

$$\vec{E}_{Q2} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_{Q2}}{|\vec{r}-\vec{r}_{Q2}|^3}$$

El campo eléctrico en el punto $\vec{r}_D$ está dada por:

$$\vec{E} = \vec{E}_{Q1} + \vec{E}_{Q2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[Q_1\frac{\vec{r}_D}{{r_D}^3} + Q_2\frac{\vec{r}_D-\vec{r}_{Q2}}{|\vec{r}_D-\vec{r}_{Q2}|^3}\right]$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx \left(3 * 10^8\right) \hat{}2 * 10^{-7}\ \frac{\mathbf{Vm}}{\mathbf{C}} = 9 * 10^9\ \frac{\mathbf{Vm}}{\mathbf{C}}$$

$$r_D = (1\hat{}2 + 1\hat{}2 + 4\hat{}2)^{1/2}\mathrm{m} = (1+1+16)^{1/2}\mathrm{m} = (2*9)^{1/2}\mathrm{m} = 3\sqrt{2}\mathrm{m}$$

$$|\vec{r}_D - \vec{r}_{Q2}| = (9\hat{}2 + 1\hat{}2 + 4\hat{}2)^{1/2}\mathrm{m} = (81+1+16)^{1/2}\mathrm{m} = (2*49)^{1/2}\mathrm{m} = 7\sqrt{2}\mathrm{m}$$

$$\vec{E} = 9*10^9\ \frac{\mathbf{Vm}}{\mathbf{C}}\left[27\sqrt{2}\mathrm{C}\frac{1}{(3\sqrt{2}m)^3}\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}\mathrm{m} - 343\sqrt{2}\mathrm{C}\frac{1}{(7\sqrt{2}m)^3}\begin{pmatrix}-9\\1\\-4\end{pmatrix}\mathrm{m}\right]$$

$$\vec{E} = \tfrac{1}{2}*9*10^9\left[\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-9\\1\\-4\end{pmatrix}\right]\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{m}} = \frac{9}{2}\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}*10^9\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{m}} = \begin{pmatrix}45*10^9\\0\\0\end{pmatrix}\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{m}}$$

(2P)

El torque que actúa sobre el dipolo eléctrico está dada por:

$$\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}45\\0\\0\end{pmatrix}\mathrm{CV} = \begin{pmatrix}0\\-45\\-3*45\end{pmatrix}\mathrm{J} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-3\end{pmatrix}*45\mathrm{J} \qquad \mathbf{(1.5P)}$$

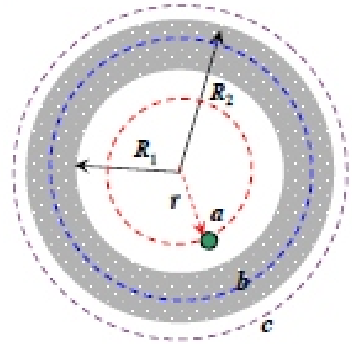
El ángulo entre el campo eléctrico y el momento dipolar eléctrico está dada por:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{E}}{pE} = \frac{2*45}{(2\hat{}2+3\hat{}2+1\hat{}2)^{1/2}*45} = \frac{2}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{2}{7}} \qquad \alpha = \arccos\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\right)$$

$$\mathrm{sen}(\alpha) = \frac{|\vec{p}\times\vec{E}|}{pE} = \frac{(0\hat{}2+1\hat{}2+3\hat{}2)^{1/2}*45}{(2\hat{}2+3\hat{}2+1\hat{}2)^{1/2}*45} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{5}{7}} \qquad \alpha = \arcsen\left(\sqrt{\frac{5}{7}}\right) \qquad \mathbf{(1.5P)}$$

Problema 2

a) *<u>Si el cascarón esférico es un conductor</u>*: Carga se distribuye en la superficie exterior del cascarón.



i) Usando la ley de Gauss y la simetría esférica del problema

$$\oint_S \vec{E}(r)\cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

superficie Gaussiana

$\underline{r > R_2}$

Campo

$$E_c(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{E}_c = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$$

Potencial

$$V(r) = -\int_\infty^r \vec{E}_c \cdot dr$$

$$\boxed{\Rightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

$\underline{R_1 < r < R_2}$

$$Q_{enc} = 0$$

$$\boxed{\therefore E_b = 0}$$

$$V(r) = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot dr = -\int_\infty^{R_2} \vec{E}_c \cdot dr - \int_{R_2}^r \vec{E}_b \cdot dr$$

$$\boxed{\Rightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}}$$

$\underline{r < R_1}$

$$Q_{enc} = 0$$

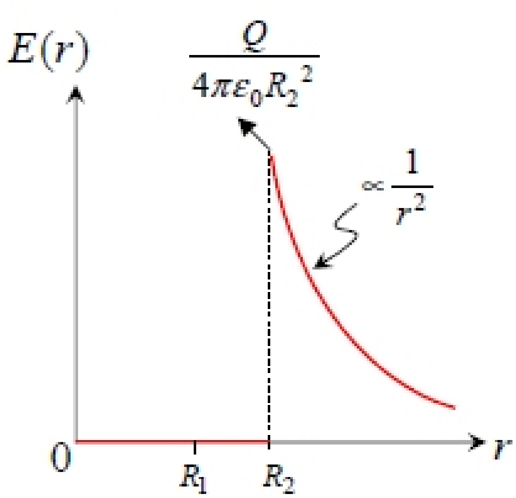
$$\boxed{\therefore E_a = 0}$$

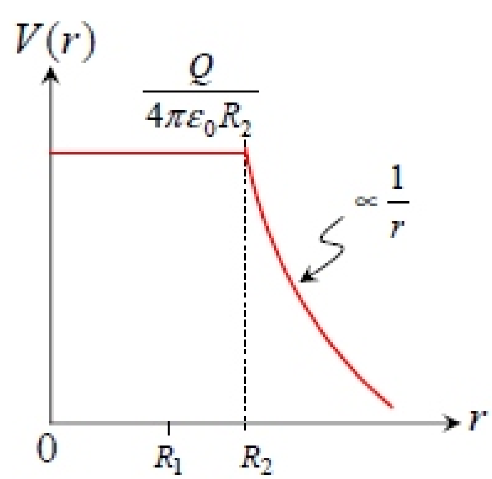
$$V(r) = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot dr$$

$$V(r) = -\int_\infty^{R_2} \vec{E}_c \cdot dr - \int_{R_2}^{R_1} \vec{E}_b \cdot dr - \int_{R_1}^r \vec{E}_a \cdot dr$$

$$\boxed{\Rightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}}$$

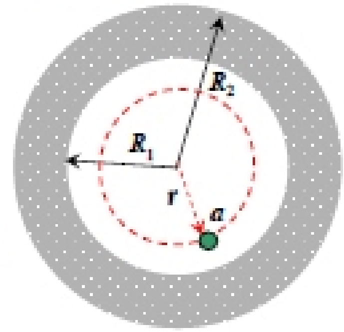
ii) Gráficos del campo eléctrico y potencial eléctrico en función de la distancia radial





b) Si el cascarón esférico es un aislante con densidad de carga ρ uniformemente distribuida en su volumen

Usando la ley de Gauss y la simetría esférica del problema



En el punto a,

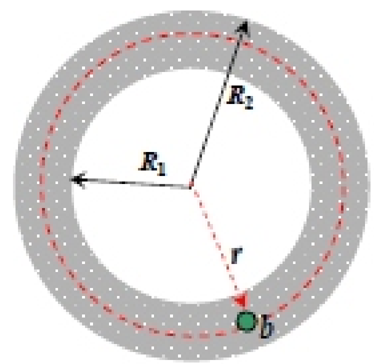
$$E_a(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad , \qquad \text{donde } Q = \text{carga encerrada} = 0$$

$$\boxed{\therefore E_a = 0}$$

En el punto b,

la carga encerrada entre R_1 y r es

$$Q = \frac{4\pi}{3}\left(r^3 - R_1{}^3\right)\rho$$



$$E_b(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_b(4\pi r^2) = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\left(r^3 - R_1{}^3\right)\rho$$

$$\boxed{\therefore E_b = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^3 - R_1{}^3}{r^2}\right)}$$

Problema 3

1. $e = 1{,}610^{-19}C$

2. Fuerza Coulomb

$$F_C = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 (2l)^2} \tag{1}$$

Fuerza resorte

$$F_k = k(L_f - L_0) = k(2l - 4l) = -2lk \tag{2}$$

Con Newton estatico: $F_k + F_C = 0$ encontramos

$$k = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 (2l)^3} \tag{3}$$

3. Campo electrico:

$$\vec{E}_1(x,y,z) = \frac{+e}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{e}_x x + \hat{e}_y y + \hat{e}_z (z-l)}{(x^2+y^2+(z-l)^2)^{3/2}} \tag{4}$$

$$\vec{E}_2(x,y,z) = \frac{-e}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{e}_x x + \hat{e}_y y + \hat{e}_z (z+l)}{(x^2+y^2+(z+l)^2)^{3/2}} \tag{5}$$

$$\vec{E}(x,y,0) = \vec{E}_1(x,y,0) + \vec{E}_2(x,y,0) = -\hat{e}_z \frac{2el}{(x^2+y^2+l^2)^{3/2}} \tag{6}$$

4. Gauss dice que el flujo total es $\frac{+e}{\epsilon_0}$. Como la bola no cubre todo el ángulo solido si no solamente

$$\Omega_{bola} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_m} d\theta \ \sin(\theta) = 2\pi(1 - \frac{2}{3}\sqrt{2}) \tag{7}$$

donde usamos $\sin(\theta_m) = \frac{r}{2l}$ que implica $\cos(\theta_m) = \frac{2}{3}\sqrt{2}$. Esto da para el flujo que no pasa por la bola

$$f_{no-bola} = \frac{+e}{\epsilon_0}(4\pi - \Omega_{bola}) = \frac{+e}{\epsilon_0} 2\pi(1 + \frac{2}{3}\sqrt{2}) \tag{8}$$