Pontificia Universidad Católica de Chile - Facultad de Física
Electricidad y Magnetismo - FIS1533

Ayudantía 12

Ley de Ampere dependiente de t y Ley de Faraday

Ayudante : Nicolás Pérez (nrperez@uc.cl)
Profesor : Benjamin Koch

Problema 1
El voltaje aplicado a través de las placas de un capacitor de $4\mu F$ varía con el tiempo de acuerdo con la expresión:

$$V_{ap} = (8V)(1 - e^{-t/4}) \tag{1}$$

donde t está en t. Calcule:

(a) La corriente de desplazamiento como función del tiempo

(b) El valor de la corriente para $t = 4s$

Solución

Sabemos que la ley de Ampere-Maxwell está dada por:

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{ds} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} \tag{2}$$

Sabevemos que en un capacitor tendremos:

$$\Phi_e = EA = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{3}$$

Luego,

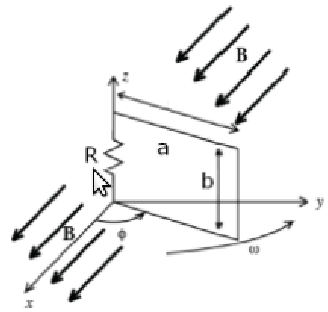
$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} = \frac{dQ}{dt} \tag{4}$$

Entonces, aplicando directamente obtenemos:

$$I_d = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(CV) = C\frac{dV}{dt} \tag{5}$$

Problema 2

La espira rectangular de la figura se encuentra bajo la acción de un campo magnético $\vec{B} = B\hat{x}$ constante. Si la espira gira con velocidad angular $\vec{w} = w\hat{z}$, y en $t = 0$ la espira está en el plano $y - z$, determine la fuerza electromotriz inducida y la corriente inducida en la espira, si su resistencia es R.



Solución

En este caso consideraremos la normal a la espina como:

$$-\hat{\theta} = sen(\theta)\hat{x} - cos(\theta)\hat{y}$$

El flujo magnético queda dado por:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS & (6)\\ &= \int_0^b \int_0^a (B\hat{x}) \cdot (-\hat{\theta}) d\rho dz & (7)\\ &= \int_0^b \int_0^a B\hat{x} \cdot (sen\theta\hat{x} - cos\theta\hat{y}) d\rho dz & (8)\\ &= Babsen\theta & (9) \end{aligned}$$

¿Cuánto vale la fem entonces? Para esto utilizamos la ley de Faraday:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -\frac{d\Phi}{dt} & (10)\\ &= -Babcos\theta\omega & (11) \end{aligned}$$

Ahora, tenemos el problema de decir que es θ. Para esto, utilizamos las típicas ecuaciones de movimiento y postulamos:

$$\theta(t) = \omega t + C \tag{12}$$

Imponiendo condiciones iniciales:

$$\theta(0) = C = \frac{\pi}{2} \qquad \longrightarrow \qquad \theta(t) = \omega t + \frac{\pi}{2} \tag{13}$$

entonces, lo que tenemos es:

$$\epsilon(t) = -Bab\omega cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{14}$$

Finalmente,

$$i(t) = \frac{\epsilon}{R} = -\frac{Bab\omega}{R} cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{15}$$

Problema 3

Se tiene una espira rectangular de largo l, ancho w fija y un alambre recto infinito paralelo al lado l, sobre el mismo plano. El alambre lleva una corriente i en el sentido $\hat{z}$ y están separados por una distancia h (el eje z coincide con el alambre y el eje x sale de la hoja).

(a) Encuentre el flujo magnético que atraviesa la espira.

(b) Suponga que $i(t) = a + bt$, con $a, b > 0$, ¿Cuál es la fem inducida en la espira y la dirección de la corriente inducida?

Solución

Ya hemos estudiado en ayudantías anteriores que el campo magnético producido por un alambre, está dado por:

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r}\hat{\theta} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r}\hat{x} \tag{16}$$

Elegiremos la normal como $\hat{n} = -\hat{x}$ (de modo que el flujo sea positivo). Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_S \vec{B}\cdot\hat{n}dS && (17)\\
&= \int_0^l \int_h^{h+w} \left(-\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r}\hat{x}\cdot(-\hat{x})\right) d\rho dz && (18)\\
&= \frac{\mu_0}{2\pi} il \int_h^{h+w} \frac{dr}{r} && (19)\\
&= \frac{\mu_0}{2\pi} illn\left(1 + \frac{w}{h}\right) && (20)
\end{aligned}$$

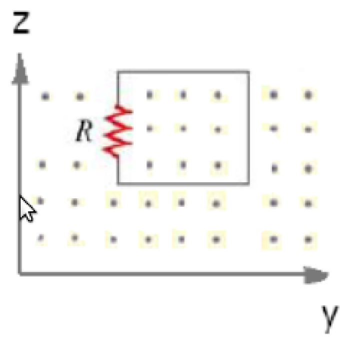
¿y la fem? Usamos la ley de Faraday, de modo que:

$$\begin{aligned}
\epsilon &= -\frac{d\Phi}{dt} && (21)\\
&= -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{di}{dt} lln\left(1 + \frac{w}{h}\right) && (22)\\
&= -\frac{\mu_0}{2\pi} blln\left(1 + \frac{w}{h}\right) && (23)\\
& && (24)
\end{aligned}$$

Problema 4
Considere una espira cuadrada de lado a, masa m y resistencia R en el plano $y - z$. Se aplica un campo magnético externo $\vec{B} = (B_0 - \alpha z)\hat{x}$, con $\alpha > 0$. La espira cae por la fuerza de gravedad desde el reposo.

(a) Encuentre la fuerza electromotriz inducida fem y la corriente inducida en función de la rapidez con que cae la espira.

(b) Encuentre la velocidad en función del tiempo y la velocidad terminal.



Solución

Aquí lo que necesitamos en primer lugar es calcular el flujo magnético pues con el podremos calcular la fem. En este caso particular, consideramos la normal a la espira como $\hat{n} = \hat{x}$. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS && (25)\\
&= \int_0^a dy \int_z^{z+a} dz(B_0 - \alpha z) && (26)\\
&= a\left(B_0 a - \frac{1}{2}\alpha z^2 \Big|_z^{z+a}\right) && (27)\\
&= a\left(B_0 a - \frac{1}{2}\alpha(z+a)^2 + \frac{1}{2}\alpha z^2\right) && (28)\\
&= a^2(B_0 - \alpha z) - \frac{1}{2}\alpha a^3 && (29)
\end{aligned}$$

¿Cómo calculamos ahora la fem inducida?

Sólo necesitamos aplicar la ley de faraday, con lo que obtenemos:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= -\frac{d\Phi}{dt} && (30)\\
&= -\frac{d\Phi}{dz}\frac{dz}{dt} && (31)\\
&= -\alpha a^2 v && (32)
\end{aligned}$$

Ojo: consideramos $\frac{dz}{dt} = -v$ dado que la espira cae y por tanto la velocidad apunta hacia abajo. Entonces $\varepsilon < 0$. Siendo más concretos.. podemos ver que cuando cae la espira, tenemos un mayor campo fluyendo por ella. De este modo, la corriente inducida tiene sentido generando un campo en la dirección $-\hat{x}$.

Finalmente, podemos calcular el valor de la corriente inducida, dado por:

$$i = \frac{|\epsilon|}{R} = \frac{\alpha a^2 v}{R} \tag{33}$$

(b) Si queremos calcular una evolución temporal de la velocidad, debemos buscar una ecuación diferencial para esta variable. Es posible obtener esta ecuación diferencial calculando las fuerzas sobre la espira y aplicando luego la ley de Newton. (Nótese como se anulan las fuerzas sobre los lados paralelos al eje z).

Calculemos la fuerza sobre el lado inferior:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{inf} &= \int_0^a i\vec{dl} \times \vec{B} && (34) \\ &= \int_0^a idy\hat{y} \times (B_0 - \alpha a)\hat{z} && (35) \\ &= ia(B_0 - \alpha z)\hat{z} && (36) \end{aligned}$$

Calculando la fuerza sobre el extremo superior

$$\begin{aligned} \vec{F}_{sup} &= \int_0^a i\vec{dl} \times \vec{B} && (37) \\ &= \int_0^a idy\hat{y} \times (B_0 - \alpha(z+a))\hat{x} && (38) \\ &= -ia(B_0 - \alpha(z+a))\hat{z} && (39) \end{aligned}$$

Finalmente sumamos ambas contribuciones, obteniendo:

$$\begin{aligned} \vec{F}_m &= \vec{F}_{sup} + \vec{F}_{inf} && (40) \\ &= ia(B_0 - \alpha z - (B_0 - \alpha(z+a)))\hat{z} && (41) \\ &= i\alpha a^2 \hat{z} && (42) \\ &= \frac{\alpha^2 a^4 v\hat{z}}{R} && (43) \end{aligned}$$

Entonces, ¿Hacia adonde apunta la fuerza magnética? Por el resultado obtenido vemos que apunta hacia arriba (como es esperable al hacer el razonamiento). Ahora, considerando la fuerza gravitatoria y usando la ley de newton, tenemos:

$$m\frac{d^2 z}{dt^2} = -m\frac{dv}{dt} = \frac{\alpha^2 a^4}{R}v - mg \tag{44}$$

Ahora, naturalmente, en la velocidad terminal se cumple: $\frac{dv_T}{dt} = 0$ de modo que se obtiene:

$$0 = \frac{\alpha^2 a^4}{R}v_T - mg \qquad \rightarrow \qquad v_T = \frac{mgR}{\alpha^2 a^4} \tag{45}$$

y claramente la velocidad apunta en la dirección negativa de $\hat{z}$. Si resolvemos la ecuación para la rapidez, veremos que:

$$-m\frac{dv}{dt} = \frac{\alpha^2 a^4}{R}v - mg \tag{46}$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{dv}{dt} &= \frac{\alpha^2 a^4}{mR}v - g && (47)\\
ge^{\frac{\alpha^2 a^4}{mR}t} &= \frac{dv}{dt}e^{\frac{\alpha^2 a^4}{mR}t} + \frac{\alpha^2 a^4}{mR}ve^{\frac{\alpha^2 a^4}{mR}t} && (48)\\
ge^{\frac{\alpha^2 a^4}{mR}t} &= \frac{d}{dt}\left(ve^{\frac{\alpha^2 a^4}{mR}t}\right) && (49)\\
ve^{\frac{\alpha^2 a^4}{mR}t} &= \frac{gmR}{\alpha^2 a^4}e^{\frac{\alpha^2 a^4}{mR}t} + C && (50)
\end{aligned}
$$

Luego, imponemos condiciones de borde, dado que sabemos que $v(t=0)=0 \rightarrow C = -\frac{gmR}{\alpha^2 a^4}$, de modo que:

$$
\begin{aligned}
ve^{\frac{\alpha^2 a^4}{mR}t} &= \frac{gmR}{\alpha^2 a^4}e^{\frac{\alpha^2 a^4}{mR}t} - \frac{gmR}{\alpha^2 a^4} && (51)\\
&= \frac{gmR}{\alpha^2 a^4}\left(e^{\frac{\alpha^2 a^4}{mR}t} - 1\right) && (52)
\end{aligned}
$$

Entonces, despejamos la velocidad como:

$$
\begin{aligned}
v(t) &= \frac{gmR}{\alpha^2 a^4}\left(1 - e^{-\frac{-\alpha^2 a^4}{mR}t}\right) && (53)\\
\vec{v}(t) &= -\frac{gmR}{\alpha^2 a^4}\left(1 - e^{-\frac{\alpha^2 a^4}{mR}t}\hat{z}\right) && (54)
\end{aligned}
$$