

Ayudantía 1

Repaso: Vectores, coordenadas esféricas, derivadas e integrales

Profesor: Benjamin Koch (bkoch@fis.puc.cl)
Ayudante: Camila Navarrete (canavar2@uc.cl)

Problema 1: Vectores.

a) Dos esferas conductoras metálicas muy pequeñas igualmente cargadas, cada una de masa 90 g, están suspendidas del mismo punto por cuerdas, de masa despreciable, de 400 cm de largo. Las esferas están en equilibrio debido a la repulsión electrostática, separadas por una distancia de 2cm. Determine la magnitud y sentido de la fuerza de repulsión eléctrica que siente una de las esferas debido a la presencia de la otra.

b) Si hay 3 fuerzas, F_1 , F_2 y F_3 , apuntando directamente hacia el centro de un triángulo equilátero, cada una ubicada en uno de los vértices, ¿cuál es la fuerza neta en el centro del triángulo si las fuerzas son $F_1 = 30$ N, $F_2 = 40$ N y $F_3 = 15$ N?

Problema 2: Coordenadas esféricas

Usando coordenadas esféricas muestre que el diferencial de ángulo sólido corresponde a la expresión:

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$$

Problema 3: Gradientes.

a) Calcular el gradiente de la magnitud del vector posición, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, en:

- Coordenadas cartesianas.
- Coordenadas esféricas.
- Coordenadas cilíndricas.

b) Sea $r'' = \vec{r} - \vec{r}'$ la distancia entre dos puntos (x, y, z) y (x', y', z') . Calcule el gradiente de la magnitud de r'' y muestre que:

- $\nabla(r''^2) = 2\vec{r}''$
- $\nabla(1/r'') = -\hat{r}''/r''^2$

c) Mostrar que:

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Problema 4: Divergencia y rotor

Calcule la divergencia y rotor del vector $\vec{v} = \hat{r}/r^2$ en coordenadas cartesianas.

Problema 5: Teorema de la divergencia

Compruebe el teorema de la divergencia para $\vec{v} = r^2 \cos\theta \hat{r} + r^2 \cos\phi \hat{\theta} - r^2 \cos\theta \sin\phi \hat{\phi}$ usando el volumen un octante de la esfera de radio R .

Problema 6: Integral de volumen

Suponiendo una nube de electrones confinada en una región entre dos esferas de radios 2 cm y 5 cm, tiene una densidad de carga en volumen expresada en coordenadas esféricas:

$$\rho_v = \frac{-3 \cdot 10^{-8}}{R^4} \cos^2 \phi$$

Con $\rho = C/m^3$. Calcular la carga total contenida en dicha región.