Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física
Electricidad y Magnetismo - FIS1533-2

Ayudantía 11

Vector y cargas de polarización en dieléctricos

Profesor: Benjamin Koch (bkoch@fis.puc.cl)
Ayudantes: Camila Navarrete (canavar2@uc.cl) y Nicolás Pérez (nrperez@uc.cl)

Problema 1.

Sea un condensador de carga Q que consta de dos cascarones esféricos concéntricos de radio interior a y exterior b. El espacio entre ambas placas se llena con un material dieléctrico lineal, de constante dieléctrica κ.

a) Obtenga el campo eléctrico en todo el espacio.

b) Calcule la capacidad del sistema.

c) Obtenga el vector polarización en la región correspondiente.

d) Calcule las densidades de carga de polarización en el dieléctrico.

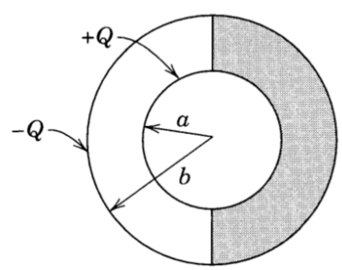
Problema 2.

Considere un condensador esférico de radio interior a y exterior b. La mitad de la región entre las placas se llena con dieléctrico lineal de constante κ como muestra la figura.

a) Encuentre el campo eléctrico en la región entre las placas.

b) Obtenga la densidad superficial de carga del cascarón de radio a.

c) Obtenga la densidad de carga de polarización inducida en el dieléctrico en $r = a$.



Problema 3.

Dentro de un condensador de placas paralelas, de sección A y espesor d, introducimos un dieléctrico de permitividad variable, siendo y la dirección perpendicular a las placas. Despreciando los efectos de borde y en caso de no existir cargas libres al interior del dieléctrico, calcular

a) El campo eléctrico, el desplazamiento eléctrico y el vector de polarización, cuando se aplica una diferencia de potencial V_0 entre las placas.

b) La densidades de carga de polarización.

c) La capacidad del condensador

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(1 + \frac{y}{d}\right) \tag{1}$$

1. Solución

En presencia de las cargas almacenadas en las placas, el dieléctrico entre las mismas se polariza, y aparecen cargas de polarización en las superficies y dentro del dieléctrico.

a) El campo lo obtenemos usando la ley de Gauss, usando como superficies gaussianas esferas concéntricas de radio r. Separamos por regiones:

- $r < a$:
  no hay carga encerrada, por lo que $\vec{E} = 0$.
- $a < r < b$:
  si aplicáramos la ley de Gauss tradicional, en la carga encerrada tendríamos que considerar también la carga de polarización encerrada por la superficie gaussiana,

  $$Q_{\text{enc}} = Q + Q_{\text{pol}}$$

  y ésta última se puede calcular conociendo el vector polarización. El problema es que este vector depende del campo eléctrico, que justamente es lo que queremos calcular. Para resolver ésto se introduce el vector desplazamiento eléctrico $\vec{D}$, cuyo flujo a través de la superficie gaussiana sólo depende de las cargas *libres* encerradas,

  $$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

  Como el problema es esféricamente simétrico, se espera que $\vec{D} = D(r)\hat{r}$, con lo cual podemos resolver rápidamente la integral de superficie, análogo al caso del campo eléctrico en ausencia del dieléctrico,

  $$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S D(r)\, dS = D(r) \oint_S dS = D(r) 4\pi r^2 = Q$$

  de donde $D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$. Al relacionar el vector de desplazamiento eléctrico y el campo a través de $\vec{D} = \kappa\epsilon_0 \vec{E}$ se obtiene

  $$\vec{E}(r) = \frac{\vec{D}}{\kappa\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\kappa\epsilon_0 r^2}\hat{r}, \qquad a < r < b.$$

  Notar que este es el mismo campo sin dieléctrico, pero disminuido en un factor κ.
- $b < r$:
  Aquí la superficie gaussiana encierra todo el sistema, por lo que la carga encerrada es

  $$Q_{\text{enc}} = +Q + Q_{\text{pol}} - Q = Q_{\text{pol}}.$$

  Sabemos además que el dieléctrico es globalmente neutro, por lo que su carga neta de polarización es nula, y por tanto la carga encerrada es nula. Inmediatamente, $\vec{E} = 0$ en esta región del espacio.

b) La capacitancia la calculamos como siempre, $C = Q/|\Delta V|$. Para este caso,

$$\Delta V = -\int_a^b E(r) dr = -\frac{Q}{4\pi\kappa\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\kappa\epsilon_0} \frac{a-b}{ab}, \qquad |\Delta V| = \frac{Q}{4\pi\kappa\epsilon_0} \frac{b-a}{ab}$$

debido a que $b > a$. Inmediatamente vemos que

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{4\pi\kappa\epsilon_0 ab}{b-a}$$

y vemos que esta capacitancia es κ veces la capacitancia del condensador sin dieléctrico.

c) El vector polarización sólo existe dentro del dieléctrico. De la definición de $\vec{D}$,

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \kappa\epsilon_0 \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0(\kappa - 1)\vec{E}$$

por lo que

$$\vec{P} = \frac{(\kappa - 1)Q}{4\pi\kappa r^2}\hat{r}$$

d) Conociendo el vector polarización, las densidades de carga de polarización se obtienen a partir de $\sigma_{\rm pol} = \vec{P}\cdot\vec{n} = P_n$, $\rho_{\rm pol} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$. En este caso, debemos evaluar las superificies interior ($r = a$) y exterior ($r = b$), y el interior del dieléctrico. Entonces

$$\sigma_a = \vec{P}\cdot\vec{n}_a = -\left(\vec{P}\cdot\hat{r}\right)\Big|_{r=a} = -\frac{\kappa-1}{4\pi\kappa a^2}Q$$

en donde hemos usado que $\vec{n}_a = -\hat{r}$ (el vector normal a la superficie del dieléctrico en la superficie interna apunta *hacia* el origen. Además,

$$\rho_{\rm pol} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\frac{(\kappa-1)Q}{4\pi\kappa}\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 0$$

en donde hemos usado que $\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{1}{r^2}\right) = 0$ (divergencia en coordenadas esféricas). Finalmente

$$\sigma_b = \vec{P}\cdot\vec{n}_b = \left(\vec{P}\cdot\hat{r}\right)\Big|_{r=b} = \frac{\kappa-1}{4\pi\kappa b^2}Q$$

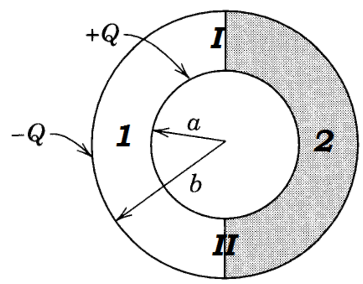
Para concluir, notemos que la carga total de polarización en el dieléctrico es

$$\begin{aligned} Q_{\rm pol} &= \oint_{S_a}\sigma_a dS_a + \int_{a<r<b}\rho_{\rm pol}dV + \oint_{S_b}\sigma_b dS_b = -\frac{\kappa-1}{4\pi\kappa a^2}Q\oint_{S_a}dS_a + 0 + \frac{\kappa-1}{4\pi\kappa b^2}Q\oint_{S_b}dS_b \\ &= -\frac{\kappa-1}{4\pi\kappa a^2}Q4\pi a^2 + 0 + \frac{\kappa-1}{4\pi\kappa b^2}Q4\pi b^2 = 0 \end{aligned}$$

lo cual es consistente con la hipótesis de que el dieléctrico en su globalidad es neutro.

2. Solución

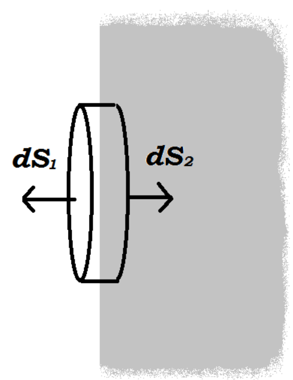
a) Si usamos coordenadas esféricas con origen en el centro del sistema, es claro que en ausencia del dieléctrico existe simetría radial. En presencia del mismo, no es tan evidente. Las zonas de posible conflicto son las interfaces en donde termina el dieléctrico (zonas I y II, figura abajo).



Sin embargo, aplicando la ley de Gauss a estas regiones, usando un cilindro perpendicular a cada interfaz y arbitrariamente pequeño (figura abajo), las integrales en el manto se pueden anular y sobre las tapas el desplazamiento es en esencia constante, si escogemos cada tapa muy pequeña. Si ΔS es el área de las tapas, entonces la ley de Gauss entrega

$$Q = \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{D}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{D}_2 \cdot d\vec{S}_2 = \int_{S_1} D_{1n}\, dS_1 - \int_{S_2} D_{2n}\, dS_2 = (D_{1n} - D_{2n})\Delta S = 0$$

$$\Rightarrow \qquad D_{1n} = D_{2n}$$



en donde hemos hecho $Q = 0$ puesto que en la interfaz **no** hay cargas libres, por lo que la superficie no encierra este tipo de cargas. El subíndice n indica componente normal a la interfaz. La última igualdad implica que justo en la interfaz, la componente normal del desplazamiento eléctrico es continua, y como es nula lejos de la interfaz por ambos lados, se anula en la interfaz. Por tanto, $\vec{D}$ sólo posee componentes en la dirección tangencial a la interfaz, que justamente coincide con la dirección radial de nuestro sistema coordenado. Así, $\vec{D} = D(r)\hat{r}$, y lo mismo ocurre lo mismo con el campo eléctrico.

Entonces nos conviene usar la ley de Gauss generalizada entre las placas. Si S es una superficie gaussiana con radio r entre a y b, entonces la carga libre encerrada es simplemente Q, la carga de la placa interna. Así, el flujo de $\vec{D}$ es

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \oint_S D(r) dS = \int_{S_1} D_1(r) dS_1 + \int_{S_2} D_2(r) dS_2 = Q$$

en donde hemos separado la integral debido a que el desplazamiento, aunque es radial en ambos medios, no poseen necesariamente la misma magnitud. Dado que $D = \kappa\epsilon_0 E$, para el vacío $D_1 = \epsilon_0 E$ ($\kappa = 1$ en el vacío) y $D_2 = \kappa\epsilon_0 E$. Reemplazando,

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \epsilon_0 E(r) dS_1 + \int_{S_2} \kappa\epsilon_0 E(r) dS_2 = \epsilon_0 E(r) \int_{S_1} dS_1 + \kappa\epsilon_0 E(r) \int_{S_2} dS_2 = Q$$

Ambas integrales de superficie valen $2\pi r^2$, puesto que son semi esferas de radio r. Factorizando,

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \epsilon_0 E(r) 2\pi r^2 + \kappa\epsilon_0 E(r) 2\pi r^2 = 2\pi r^2 \epsilon_0 E(r)(1+\kappa) = Q$$

de donde obtenemos que

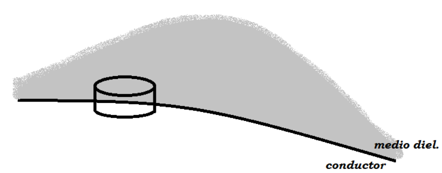
$$E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(1+\kappa)r^2} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E}(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(1+\kappa)r^2}\hat{r}, \qquad a<r<b,$$

que es lo que buscábamos. Una forma extra de escribir esto es

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\bar{\epsilon} r^2}\hat{r},$$

en donde se definió $\bar{\epsilon} \equiv (\epsilon_0 + \epsilon)/2$, una especie de permitividad equivalente entre las placas.

b) Usando la ley de Gauss en la superficie gaussiana de la figura de abajo: un cilindro gaussiano muy pequeño, tal que es perpendicular a la superficie del conductor. Aplicando la ley de Gauss, y notando que la carga encerrada es σS, con S área basal del cilindro,



$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_S D_{arr} dS + \int_S D_{aba} dS = \int_S D_{arr} dS = D_{arr} S = Q = \sigma S$$

en donde hemos hecho el cilindro tan pequeño, que no hay flujo en el manto. La integral "abajo" es cero porque es una región interior a un conductor, por lo que el campo es nulo. Se deduce entonces que justo en la superficie del conductor, $\sigma = D_n = \epsilon E_n$. Por ende, el cálculo para el problema es directo, pero hay que notar que la densidad superficial en la región 1 es distinto de la 2, debido a que en esas regiones el desplazamiento eléctrico es distinto. Así,

$$\sigma = \begin{cases} \epsilon_0 E_n = \epsilon E(r=a) = \frac{Q}{2\pi(1+\kappa)a^2} & \text{región 1} \\ \kappa\epsilon_0 E_n = \kappa\epsilon_0 E(r=a) = \frac{\kappa Q}{2\pi(1+\kappa)a^2} & \text{región 2} \end{cases}$$

Es importante notar que, dada la densidad de carga, la carga neta sobre el cascarón de radio a es

$$Q = \oint_{\text{casc}} \sigma dS = \int_{S_1} \frac{Q}{2\pi(1+\kappa)a^2} dS_1 + \int_{S_2} \frac{\kappa Q}{2\pi(1+\kappa)a^2} dS_2 = \frac{Q}{1+\kappa} + \frac{\kappa Q}{1+\kappa} = Q$$

lo cual es consistente con las hipótesis.

c) La densidad de carga superficial de polarización la obtenemos a partir del vector polarización $\vec{P}$, $\sigma_{\text{pol}} = P_n$, siendo P_n la componente normal a la superficie del dieléctrico. A partir de la definición de desplazamiento eléctrico,

$$\vec{D} - \epsilon_0\vec{E} = \vec{P} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{P} = \epsilon_0(\kappa-1)\vec{E},$$

en donde usamos $\vec{D} = \kappa\epsilon_0\vec{E}$. Evidentemente esta densidad existirá sólo en la superficie de la región 2, que es en donde se encuentra el dieléctrico. Así, usando el campo ya obtenido en (a),

$$\vec{P} = \frac{\epsilon_0(\kappa-1)Q}{2\pi\epsilon_0(1+\kappa)r^2}\hat{r} = \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\frac{Q}{2\pi r^2}\hat{r}$$

por lo que en la superficie interna del dieléctrico,

$$\sigma_{\text{pol}} = P_n = -\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\frac{Q}{2\pi a^2}$$

El signo menos aparece debido a que el vector normal al dieléctrico es $\vec{n} = -\hat{r}$. Un detalle importante es que

$$\sigma_2 + \sigma_{\text{pol}} = \frac{\kappa Q}{2\pi(1+\kappa)a^2} - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\frac{Q}{2\pi a^2} = \frac{Q}{2\pi(1+\kappa)a^2} = \sigma_1,$$

por lo que se concluye que la carga neta superficial en $r = a$ en ambas regiones, es la misma, lo cual explica la simetría esférica del campo eléctrico.

3. Solución

a) El campo eléctrico entre las placas debe estar en la dirección perpendicular a éstas, es decir, en la dirección $\hat{y}$; además, dado que no hay cargas libres el vector desplazamiento eléctrico y el campo eléctrico son constantes. Como la diferencia de potencial está dada del enunciado, para calcular el campo eléctrico y vector desplazamiento eléctrico basta con relacionar V_0 y $\vec{E}(r)$ por su definición

$$\Delta V = V_0 = -\int_d^0 \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_0^d \frac{\vec{D}}{\epsilon}\cdot d\vec{r} \tag{2}$$

donde $\vec{D} = D\hat{y}$ y $d\vec{r} = d\hat{y}$. De modo que la integral en dy está integrando sólo la permitividad que no es constante

$$V_0 = D\int_0^d \frac{1}{\epsilon_0\left(1+\frac{y}{d}\right)}dy = \frac{Dd}{\epsilon}\int_0^d \frac{1/d}{1+y/d}dy = \frac{Dd}{\epsilon_0}\ln\left(1+\frac{y}{d}\right)\Big|_0^d \tag{3}$$

con lo que

$$\boxed{\vec{D} = \frac{V_0\epsilon_0}{d\ln(2)}\hat{y}} \tag{4}$$

Luego, el campo eléctrico viene dado por

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{V_0\epsilon_0}{\epsilon_0\left(1+\frac{y}{d}\right)} \tag{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{V_0}{d\ln 2\left(1+\frac{y}{d}\right)}\hat{y}} \tag{6}$$

Por otro lado, el vector de polarización, $\vec{P}$, viene dado por

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0\vec{E} \tag{7}$$

Luego, de los resultados anteriores

$$\vec{P} = \frac{V_0\epsilon_0}{d\ln 2} - \frac{V_0\epsilon_0}{d\ln 2\left(1+\frac{y}{d}\right)} \tag{8}$$

$$\vec{P} = \frac{V_0\epsilon_0}{d\ln 2}\left(1-\left(1+\frac{y}{d}\right)\right) \tag{9}$$

$$\boxed{\vec{P} = \frac{V_0\epsilon_0}{d\ln 2}\left(\frac{y}{d+y}\right)\hat{y}} \tag{10}$$

b) La densidad de carga de polarización superficial, σ, en los extremos del condensador, es decir, en $y = 0$ y en $y = d$ viene dada por

$$\sigma_{p_1} = \vec{P}\cdot\hat{n}\Big|_{y=0} = \frac{V_0\epsilon_0}{d\ln 2}\frac{y}{d+y}\Big|_{y=0} = 0 \tag{11}$$

$$\sigma_{p_2} = \vec{P}\cdot\hat{n}\Big|_{y=d} = \frac{V_0\epsilon_0}{d\ln 2}\frac{y}{d+y}\Big|_{y=d} = \frac{V_0\epsilon_0}{2d\ln 2} \tag{12}$$

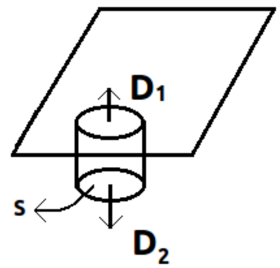
Por otro lado, la densidad de carga volumétrica viene dada por

$$\rho = \vec{\nabla}\cdot\vec{P} = \frac{dP}{dy} = \frac{V_0\epsilon_0 d}{(d+y)^2} \tag{13}$$

c) De la ley de Gauss para dieléctricos

$$\int \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{enc}} \tag{14}$$

donde la superficie gaussiana elegida es un cilindro, tal como se muesra en la Figura



Luego, si la densidad de carga superficial es σ_L,

$$D_1 S + D_2 S = \sigma_L S \tag{15}$$
$$D_1 + D_2 = \sigma_L \tag{16}$$

pero D_1 es nulo puesto que fuera de las placas no hay campo eléctrico y, por ende, tampoco un vector de desplazamiento eléctrico. Así

$$D_2 = \sigma_L \tag{17}$$

Con ello, la capacitancia de los condensadores viene dada por

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{A\sigma_L}{V_0} = \frac{AD_2}{V_0} = \frac{AV_0\epsilon_0}{d\ln 2V_0} \Rightarrow \boxed{C = \frac{A\epsilon_0}{d\ln 2}} \tag{18}$$