

# Ayudantía 1

## Transformaciones de Lorentz

Profesor: Benjamin Koch  
Ayudante: Federico Márquez (cfmarque@uc.cl)

---

### Problema 1: Transformación inversa

Suponga que un sistema coordenado  $\mathcal{O}'$  se mueve con una velocidad  $\vec{v} = v\hat{x}$  medida desde un sistema coordenado  $\mathcal{O}$ . Como usted sabe, las transformaciones que nos llevan de coordenadas en  $\mathcal{O}$  a coordenadas en  $\mathcal{O}'$  son

$$t' = \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right) \quad (1)$$

$$x' = \gamma (x - vt) \quad (2)$$

$$y' = y \quad (3)$$

$$z' = z, \quad (4)$$

donde  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ . Estas son conocidas como las transformaciones de Lorentz.

Encuentre las transformaciones que nos llevan del sistema  $\mathcal{O}'$  al sistema  $\mathcal{O}$ . Note que, obviamente, estas también corresponden a transformaciones de Lorentz. ¿Qué velocidad caracteriza estas transformaciones?

### Problema 2: Transformaciones de Lorentz

Considere un sistema  $\mathcal{S}'$  que se mueve con una rapidez  $v = 0.8c$  a lo largo del eje  $x$  de  $\mathcal{S}$ . Los orígenes de ambos sistemas coinciden en  $t = 0$ . Considere tres eventos A, B y C con coordenadas en  $\mathcal{S}$ :

$$x_A = 1c \cdot s \quad , \quad t_A = 2s \quad (5)$$

$$x_B = 2c \cdot s \quad , \quad t_B = 4s \quad (6)$$

$$x_C = 5c \cdot s \quad , \quad t_C = 4s, \quad (7)$$

donde “ $c \cdot s$ ” corresponde a un segundo-luz (la distancia recorrida por la luz en un segundo).

a) Encuentre las coordenadas de los 3 eventos en el sistema  $\mathcal{S}'$ . Compare el orden de los 3 eventos en ambos sistemas de referencia.

### Problema 3: Adición de velocidades

Considere un sistema  $\mathcal{S}'$  que se mueve con una velocidad  $\vec{v} = v_1\hat{x}$  con respecto a un sistema  $\mathcal{S}$ . Además, considere un tercer sistema  $\mathcal{S}''$  que se mueve con una velocidad  $\vec{v} = v_2\hat{x}$  con respecto a  $\mathcal{S}'$ .

a) Muestre que el llevar a cabo dos transformaciones de Lorentz (de  $\mathcal{S}''$  a  $\mathcal{S}'$  y de  $\mathcal{S}'$  a  $\mathcal{S}$ ), es equivalente a realizar una única transformación de Lorentz. ¿Qué velocidad caracteriza a esta transformación?

b) Muestre que, en el límite de velocidades pequeñas (indique que debe entenderse aquí por “pequeñas”), la velocidad que caracteriza a la transformación de Lorentz, es lo que esperaría de la relatividad Galileana.

**Problema 4: Tiempo propio**

Una nave que en reposo tiene una longitud  $L$ , parte desde la tierra con una velocidad  $v = \frac{4}{5}c$ . Más tarde, se emite tras él una señal luminosa que llega al cohete en el instante  $t = 0$  según los relojes del cohete y de la Tierra.

- a) ¿Cuándo alcanzará la señal, la cabeza del cohete, según los relojes del mismo?
- b) ¿Cuándo alcanzara la señal, la cabeza del cohete, según los relojes de la Tierra?

Suponga ahora que la señal luminosa es reflejada en la punta del cohete en dirección a la cola.

- c) ¿Cuándo alcanza la cola la señal luminosa según los relojes del cohete?
- d) ¿Y según los relojes de la Tierra?

Si ha realizado bien sus cálculos, notará que los tiempos calculados en los incisos c) y d) se encuentran conectados entre sí a través de la transformación que conecta un tiempo  $t$  medido en un sistema con el tiempo propio, sin embargo, lo mismo no sucede con los tiempos calculados en los incisos a) y b). ¿Por qué? Explique.