Einschleifenbeiträge des Minimalen Supersymmetrischen Standardmodells zur tiefinelastischen Neutrino–Streuung

Diplomarbeit
von
Benjamin Koch

Technische Universität München
Physik-Department
Institut für Theoretische Physik T30d
Prof. Dr. M. Lindner.

Erstellt am
Werner-Heisenberg-Institut München
bei
Prof. Dr. W. Hollik.

14. August 2003

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Das Ziel physikalischer Forschung ist es, Vorgänge in der Natur zu beobachten und zu erklären. Eines der grundlegendsten Gebiete der Physik ist die Elementarteilchenphysik.

In der Elementarteilchenphysik versucht man, die elementaren Naturbausteine und ihre Wechselwirkung zu verstehen. Ein Ziel dabei ist es, mit Hilfe von Modellen Vorhersagen für physikalische Experimente zu liefern und dann die Modelle zu testen indem man die Vorhersagen mit Messergebnissen vergleicht. Nach dem Standardmodell der Elementarteilchenphysik ist die Materie aus Fermionen mit Spin $\frac{1}{2}$ (Leptonen und Quarks) aufgebaut. Die Wechselwirkungen, die zwischen diesen Fermionen stattfinden, werden von den Eich-Bosonen mit Spin 1 übermittelt. Trotz der erfolgreichen Beschreibung fast aller Hochenergieexperimente durch das Standardmodell [11, 12] ist man davon überzeugt, dass dieses Modell nur ein Bestandteil einer allgemeineren Beschreibung der Materieteilchen und ihrer Kräfte sein kann. Neben theoretischen Überlegungen, die eine allgemeinere Theorie motivieren, gibt es auch experimentelle Hinweise darauf, dass das Standardmodell die Natur nicht exakt beschreibt. So liefert zum Beispiel das NuTeV Experiment, bei dem mittels tiefinelastischer Neutrino-Nukleon-Streuung der elektroschwache Mischungswinkel (θ_W) bestimmt wurde, Resultate, die im Rahmen des Standardmodells von den Ergebnissen anderer Experimente um ca. 3 Standardabweichungen differieren [4, 12]. Die entscheidende Messgröße ist bei diesem Experiment das Verhältnis ($R^{exp}_{\nu(\bar{\nu})}$) zwischen dem Wirkungsquerschnitt für Prozesse mit neutralem Strom und dem Wirkungsquerschnitt für Prozesse mit geladenem Strom.

Eine mögliche, theoretisch favorisierte Erweiterung des Standardmodells kann im Rahmen der Supersymmetrie, die eine Symmetrie zwischen fermionischen und bosonischen Freiheitsgraden herstellt, gefunden werden. Das minimale supersymmetrische Modell, das die Teilchen des Standardmodells enthält, ist das so genannte Minimale Supersymmetrische Standardmodell (MSSM) [23, 25]. In diesem Modell gibt es zu jedem fermionischen Teilchen des Standardmodells ein bosonisches Partnerteilchen und entsprechend umgekehrt. Die bereits bekannten Bosonen können nicht die Partnerteilchen bereits bekannter Fermionen sein, da sie sich unterschiedlich unter Eichtransformationen verhalten. Die direkte Bestätigung für das MSSM durch den Nachweis eines dieser Partnerteilchen konnte bisher noch nicht erbracht werden. Dennoch liefert das Minimale Supersymmetrische Standardmodell eine ähnlich gute Beschreibung der experimentellen Ergebnisse wie das Standardmodell, mit der Einschränkung, dass die Superpartner bisher zu schwer für eine direkte Entdeckung waren. Bis ein Experiment, welches die direkte Entdeckung von Superpartnerteilchen erlaubt, bereit steht, kann man sich auf die Suche nach indirekten Hinweisen machen, die für oder gegen das MSSM sprechen. Ein Hinweis, der für das MSSM spricht, wäre zum Beispiel gefunden, wenn man die im Standardmodell vorliegenden Widersprüche durch Effekte supersymmetrischer Partnerteilchen erklären könnte.

Gegenstand dieser Arbeit ist es, die Auswirkungen supersymmetrischer Partnerteilchen auf das Ergebnis des NuTeV Experiments zu untersuchen. Supersymmetrische Teilchen können über Quanten-Effekte Auswirkungen auf messbare Größen haben. Ziel der in dieser Arbeit gemachten Rechnungen ist es, einen Ausdruck für die Änderung ($\delta R^{1l}_{\nu(\bar{\nu})}$) der theoretischen Vorhersage von $R^{\mathrm{SM}}_{\nu(\bar{\nu})}$ zu berechnen, die man erhält, wenn man auf Ein-Schleifen-Niveau vom Standardmodell zum Supersymmetrischen Standardmodell übergeht.

Die Arbeit ist in sechs Kapitel gegliedert. Nach der Einleitung wird in Kapitel 2 kurz das Standardmodell angesprochen. In Kapitel 3 wird auf das Minimale Supersymmetrische Standardmodell eingegangen. Kapitel 4 beschäftigt sich mit tiefinelastischer Neutrino-Streuung. Dabei wird gezeigt, daß man in erster Ordnung Störungstheorie die Mischungseffekte verschiedener Quarkgenerationen und unter bestimmten Voraussetzungen auch die Effekte von Higgsbosonen vernachlässigen kann. Anschließend wird auf die Kinematik des Neutrino-Nukleon-Streuprozesses, die für die numerische Berechnung von Bedeutung ist, eingegangen. Es wird unter anderem gezeigt, wie sich die im kinematischen Schnitte die im experiment gemacht wurden auf in dieser Arbeit gemachten Rechnungen auswirken.
Unter Verwendung der Ergebnisse aus Kapitel 4 wird in Kaptiel 5 diskutiert, wie sich verschiedene MSSM-Parameter-Szenarien numerisch auf $\delta R^{1l}_{\nu(\bar{\nu})}$ auswirken. In Kapitel 6 werden die Vorgehensweisen und Ergebnisse zusammengefasst. Im Anhang wird auf das Partonmodell, die Quark-Verteilungsfunktionen, das Konzept der Supersymmetrie und das verwendete Renormierungsverfahren eingegangen.

Kapitel 2

Das Standardmodell der elektroschwachen und starken Wechselwirkung

Das Standardmodell der elektroschwachen und starken Wechselwirkung (SM) ist eine Quantenfeld-Theorie mit spontan gebrochener Eichsymmetrie. Es beschreibt die elektromagnetische, die schwache und die starke Kraft mit Hilfe einer einzigen Lagrangedichte. Das Standardmodell hat zwei Hauptbestandteile: Die Materieteilchen und ihre Wechselwirkungen.

2.1 Die Materieteilchen

Die fundamentalen Bausteine der Materie sind Fermionen mit Spin $\frac{1}{2}$. Bei diesen unterscheidet man zwischen Leptonen und Quarks. Die Leptonen bzw. Quarks kann man in drei gleichartige Familien mit jeweils einem linkshändigen Dublett und einem bzw. zwei rechtshändigen Singuletts aufteilen. Die Leptonen nennt man Elektron, Myon und Tauon und falls diese linkshändig sind, hat jedes davon noch einen Partner, den man dann Elektron-Neutrino, Myon-Neutrino und Tauon-Neutrino nennt.

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L, e_R, \mu_R, \tau_R$$

Rechtshändige Neutrinos wurden bislang nur indirekt mittels Neutrino-Oszillationen gemessen[9]. Sie werden jedoch hier im weiteren nicht betrachtet. Die Quarks heißen Up-, Down-, Strange-, Charm-, Bottom- und Top-Quark.

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L, u_R, d_R, c_R, s_R, t_R, b_R$$

Sie besitzen mit der Farbladung gegenüber den Leptonen eine zusätzliche Quantenzahl. Die Farbladung hat drei Einstellmöglichkeiten („rot," „grün" und „blau").

2.2 Die Wechselwirkung

Bisher wurden lediglich Bausteine vorgestellt, ohne dass eine Wechselwirkung zwischen diesen definiert wurde. Es bedarf also noch eines Mechanismus mit dessen Hilfe diese Bausteine zueinander in Bezug treten.
Hinter der Beschreibung der Wechselwirkungen im SM steht das Prinzip der lokalen Eichinvarianz. Zunächst soll der Begriff Eichinvarianz am Beispiel der globalen Eichinvarianz erläutert werden. Man fordert, dass sich eine Lagrangedichte nicht ändert, wenn man die in ihm enthaltenen Felder ϕ_i einer globalen Symmetrietransformation

$$\phi_i(x) \to \phi'_i(x) = (e^{-i\theta^a \tau^a})_{ij}\phi_j(x) \tag{2.1}$$

unterzieht, wobei τ^a die Erzeugenden der zu der Symmetrietransformation gehörenden Symmetriegruppe und θ^a Konstante Parameter sind. Unter dieser Transformation ist zum Beispiel $\phi_i^\dagger \phi_i$ oder $\partial^\mu \phi_i^\dagger \partial_\mu \phi_i$ invariant.
Geht man nun zu einer lokalen Eichtransformation über (d.h. $\theta = \theta(x)$), so ist $\partial^\mu \phi_i^\dagger \partial_\mu \phi_i$ wegen

$$\partial_\mu e^{-i\theta^a \tau^a} \phi = e^{-i\theta^a \tau^a} \partial_\mu \phi - i(\tau^a \partial_\mu \theta^a) e^{-i\theta^a \tau^a} \phi \neq e^{-i\theta^a \tau^a} \partial_\mu \phi \ , \tag{2.2}$$

im allgemeinen nicht mehr eichinvariant. Man kann der Forderung nach lokaler Eichinvarianz gerecht werden, wenn man statt der partiellen Ableitung ∂_μ eine kovarianten Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu - igA^a_\mu \tau^a \tag{2.3}$$

verwendet. Mit dem sogenannten Eichfeld A^a_μ wurde eine neue dynamische Größe eingeführt. Diese muss sich unter einer infinitesimalen lokalen Eichtranformation so transformieren, dass der störende Zusatzterm in Gleichung (2.2) kompensiert wird.

$$A^{a\,\prime}_\mu = e^{-i\theta^b \tau^b} A^a_\mu e^{i\theta^b \tau^b} + \frac{1}{ig}(-i\partial_\mu \theta^a) \ . \tag{2.4}$$

Für das A^a_μ kann ein eigener kinetischer Term in der Lagrangedichte definiert werden, der nach *Yang* und *Mills* [3] Yang-Mills Term genannt wird. Für den Fall, dass die Symmetriegruppe die $SU(3)_C$ ist, bezeichnet man die acht dazugehörigen Eichbosonen A^a_μ mit Gluonen. Die Gluonen sind die Übermittler der starken Wechselwirkung.
Neben der bereits erwähnten Gruppe $SU(3)_C$ gibt es im Standardmodell zusätzlich die $SU(2)_W$ und die $U(1)_Y$. Das direkte Produkt $SU(2)_W \times U(1)_y$ ist die Grundlage für die einheitliche Beschreibung der elektromagnetischen und schwachen Kraft. Die schwache Wechselwirkung wird von den W-Bosonen und dem ungeladenen Z-Boson übermittelt. Das ebenfalls ungeladene und masselose Photon überträgt die elektromagnetische Wechselwirkung. Diese Austauschteilchen sind die Masseneigenzustände der Eichfelder. Sie werden

Eichbosonen genannt. Das Z-Boson und das Photon, die beide ungeladen sind, wechselwirken mit allen Fermionen. Das geladene W-Boson bewirkt dagegen nur Übergänge innerhalb der linkshändigen Dupletts. In der elektroschwachen Theorie sind die Masseneigenzustände nicht identisch mit den Wechselwirkungseigenzuständen. Diese Unterscheidung zwischen Masseneigenzuständen und Wechselwirkungseigenzuständen ist notwendig, da die Eichbosonen konstruktionsbedingt masselos sind und erst durch den Higgsmechanismus im Rahmen spontaner Symmetriebrechung eine Masse erhalten. (Siehe z.B.(*Peskin, Schröder* [2]))

2.3 Parameter des Standardmodells

2.3.1 Alle Parameter des Standardmodells

Sämtliche physikalischen Vorhersagen, die sich aus dem SM ableiten lassen, basieren auf einer festgelegten Anzahl von Eingabeparametern. als a priori unbekannte Größen. Sind diese Parameter erst einmal durch Messung festgelegt, kann man Wahrscheinlichkeiten für weitere Prozesse berechnen. Die Messung anderer Prozesse testet dann die Vorhersage des Modells. Ein Modell muss dann verworfen oder zumindest verändert werden, wenn die Vorhersagen signifikant von den experimentellen Ergebnissen abweichen. Die im SM definierten Naturkonstanten sind in Tabelle 2.1 aufgeführt

Auf die Größen m_Z und m_W wird in Kapitel 2.3.2 näher eingegangen, da aus ihnen der elektroschwache Mischungswinkel θ_W hervorgeht, der Gegenstand der später folgenden Untersuchung ist.

2.3.2 Elektroschwacher Mischungswinkel θ_W

Nimmt man an, A_μ^a seien die Eichfelder zu den die $SU(2)_W$ erzeugenden Matrizen τ^a(a=1,2,3), die mit der Stärke g koppeln, so sind die A_μ^a, nachdem sie mit Hilfe des bereits erwähnten Higgsmechanismus massiv geworden sind, schon Kandidaten für Austauschteilchen. Es zeigte sich, dass diese naheliegende Variante in der Natur nicht realisiert ist. Deshalb ist es notwendig das Feld B_μ der $U(1)_Y$ Symmetrie, das mit der Stärke g' koppelt, mit einzubeziehen. Man definiert aus den B_μ und A_μ^a vier neue Vektorbosonen, von denen drei massiv sind und eines masselos ist.

$$\begin{array}{lll} W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 + iA_\mu^2) & \text{mit der Masse} & m_W = g\frac{v}{2} \\ W_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 - iA_\mu^2) & \text{mit der Masse} & m_W = g\frac{v}{2} \end{array} \tag{2.5}$$

$$\begin{array}{lll} Z_\mu^0 = \frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}(gA_\mu^3 - g'B_\mu) & \text{mit der Masse} & m_Z = \sqrt{g^2+g'^2}\frac{v}{2} \\ A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}(g'A_\mu^3 + gB_\mu) & \text{mit der Masse} & m_A = 0 \end{array} \tag{2.6}$$

v ist der Vakuumerwartungswert des Higgsfeldes. (Der Vakuumerwartungswert kommt in

Parameter:	Bezeichung:
Kopplungskonstanten:	
α	Feinstrukturkonstante
α_s	Starke Kopplungskonstante
Leptonenmassen:	
m_e	Elektron-Masse
m_μ	Myon-Masse
m_τ	Tauon-Masse
Quark-Massen:	
m_u	Up-Quark-Masse
m_c	Charm-Quark-Masse
m_t	Top-Quark-Masse
m_d	Down-Quark-Masse
m_s	Strange-Quark-Masse
m_b	Bottom-Quark-Masse
Eichboson-Massen:	
m_Z	Z-Masse
m_W	W-Masse
Higgsmasse:	
M_H	Higgsmasse
CKM Parameter:	
λ_{ij}	Quark-Massen-Mischungs-Matrix-Parameter

Tabelle 2.1: Die Parameter des SM

der Masse vor, was naheliegend ist, da das Higgsfeld für die Massenerzeugung zuständig ist.) Das masselose Feld A_μ beschreibt das elektromagnetische Vektorpotential, das massebehaftete Feld Z^0_μ beschreibt den neutralen schwachen Strom und die ebenfalls massebehafteten geladenen Eichbosonen W^+_μ und W^-_μ beschreiben den geladenen schwachen Strom. Die Felder A_μ und Z^0_μ sind orthogonal zueinander. Mit dem elektroschwachen Mischungswinkel θ_W für den

$$\cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}\ , \qquad \sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}} \tag{2.7}$$

gilt, schreibt man Gleichung (2.6) um.

$$\begin{pmatrix} Z^0 \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & -\sin\theta_W \\ \sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^3 \\ B \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Wobei θ_W der elektroschwache Mischungswinkel, ist der sich folgendermaßen aus den Kopplungkonstanten berechnet.

$$\cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}} \quad , \qquad \sin\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}} \tag{2.9}$$

Die Verbindung zwischen den zu den Kopplungskonstanten g, g‘ gehörenden Quantenzahlen und der elektrischen Ladung eines Elektrons wird über die Beziehung

$$Q = T^3 + Y \tag{2.10}$$

hergestellt. Quadriert man nun die zweite Gleichung aus (2.9) und vergleicht das Ergebnis mit der Massendefinition aus (2.6) , so erhält man die häufig verwendete Relation

$$\sin^2\theta_W = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}. \tag{2.11}$$

2.4 Probleme des Standardmodells

Die Vorhersagen, die sich mit Hilfe des Standardmodells ableiten lassen, wurden zum allergrößten Teil mit hoher Genauigkeit im Experiment bestätigt [10]. Dennoch lässt es etliche Fragen ungeklärt. Deshalb suchen theoretische Physiker auf aller Welt nach neuen Theorien der elementaren Wechselwirkungen. Einige dieser Probleme werden hier kurz angesprochen.

2.4.1 Gravitation und dunkle Materie

Der augenscheinlichste Schwachpunkt der Physik zum heutigen Zeitpunkt ist, dass es bisher nicht gelungen ist, alle bekannten fundamentalen Wechselwirkungen im Rahmen einer einzigen konsistenten Quantentheorie zu beschreiben. Die Gravitation wird makroskopisch durch die Allgemeine Relativitätstheorie beschrieben. Bei den Energien, die an den heutigen Beschleunigern erreicht werden können, ist die Kopplung der Gravitation um viele Größenordnungen kleiner als die im Standardmodell betrachteten Kopplungen. Deshalb wird das Standardmodell als Niederenergie-Approximation einer noch unbekannten Theorie angesehen.
Nimmt man an, dass die Allgemeine Relativitätstheorie die makroskopischen Vorgänge im Universum richtig beschreibt, so ist der heutige Entwicklungstand unseres Universums mit der beobachteten Materiemenge nicht zu erklären. Ein möglicher Ausweg aus diesem Dilemma wäre die Existenz von massiven Teilchen, die nur sehr schwach wechselwirken und deshalb noch nicht beobachtet werden konnten. Kandidaten hierfür werden z.B. von der in Kapitel B vorgestellten supersymmetrischen Eichtheorie zur Verfügung gestellt.

2.4.2 Grosse Vereinheitlichung

GUT steht für „Grand Unified Theories.“ Jeder Kandidat für eine solche GUT muss das SM als Niederenergienäherung enthalten. Ein vielversprechender Ansatz ist es, die $SU(3)_C \times SU(2)_W \times U(1)_Y$ als das Ergebnis einer Symmetriebrechung, einer größeren Gruppe, zum Beispiel der $SU(5)$, zu betrachten. Wäre das der Fall, so müssten sich die Werte der Kopplungskonstanten der elektromagnetischen, der schwachen und der starken Wechselwirkung bei der Energie, an der die Symmetriebrechung stattfindet, vereinigen. Die Abhängigkeit der Kopplungskonstanten von der Energieskala kann allgemein aus Renormierungsgruppengleichungen bestimmt werden. Betrachtet man nun die drei extrapolierten Lösungskurven in Abbildung 2.1 der Kopplungskonstanten des Standardmodells, so kann man erkennen, dass sie sich nicht in einem Punkt schneiden. Das sollte man jedoch bei einer vereinheitlichten Theorie erwarten.

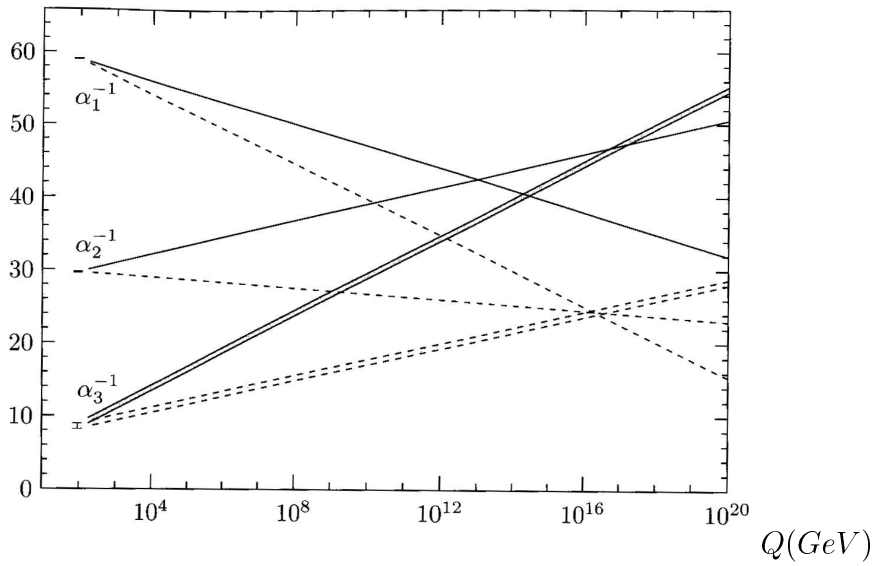


Abbildung 2.1: *Die Extrapolation der inversen Kopplungskonstanten des SM über der Energie.* Die durchgezogenen Linien gelten für das SM und die gestrichelten Linen für ein entsprechendes supersymmetrisches Multiplet [2].

Innerhalb einer supersymmetrischen Theorie (siehe Kapitel B) schneiden sich die drei Kurven jedoch im Rahmen der Ungenauigkeit in einem Punkt.

2.4.3 Hierarchieproblem

Wie bereits beschrieben wurde, sind die Materie- und Eichfelder im Standardmodell a priori masselos. Massen werden dort erst durch die Kopplung an das skalare Higgsfeld erzeugt. Die Größe dieser Massen hängt nur wenig von der Energieskala ab, bei der die Symmetrie des Higgsfeldes gebrochen wird. Das Higgsfeld selber kann jedoch, da es skalar ist, ohne die gesamte Symmetrie des Standardmodells zu zerstören, mittels quadratisch divergenter Quantenkorrekturen Masse erhalten. Regularisiert man diese Divergenzen mit einem UV-Cutoff $M_{GUT} \approx 10^{34}$ so ist die unrenormierte Higgsmasse $M_{H,0}$ und der Higgsmassen-Counterterm δM_H viel größer als die physikalische Higgsmasse.

$$\begin{aligned} M_{H,0}^2, \delta M_H^2 \approx M_{GUT}^2 \approx 10^{34} GeV^2, \\ M_{H,0}^2 - \delta M_H^2 = m_H^2 \approx 10^4 GeV^2. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Es erscheint nun als unnatürlich, dass sich zwei derart grosse Zahlen so genau kompensieren, dass aus ihrer Differenz genau die relativ kleine Higgsmasse von ca. 10^2 GeV entsteht Die Massen bilden eine hierarchische Struktur, deren Ursprung unbekannt ist. Dieses spezielle Hierarchieproblem (es gibt noch weitere, die hier nicht angesprochen werden) wird auch „Finetuning“ -Problem genannt.

2.4.4 Präzisionsmessungen

Neben all diesen Problemen, die an den Grenzen des SM auftauchen, gibt es auch Messungen bei niedrigeren Energieskalen, die möglicherweise auf eine Theorie jenseits des Standardmodells hinweisen. Zum Beispiel wurden von der NuTeV Kollaboration am Fermilab Neutrinos tiefinelastisch an Nukleonen gestreut. Aus den Messergebnissen wurde indirekt die Masse des W-Bosons bestimmt. Die veröffentlichten Messwerte weisen, im Vergleich mit den Resultaten anderer Experimente, eine deutliche Abweichung bei der Bestimmung der Masse des W-Bosons [4] auf. Graphisch wird diese Abweichung in Abbildung 2.2 dargestellt.
Das in Abbildung 2.2 dargestellte M_W hängt mit $\sin\theta_W$ über Gleichung (2.11) zusammen.

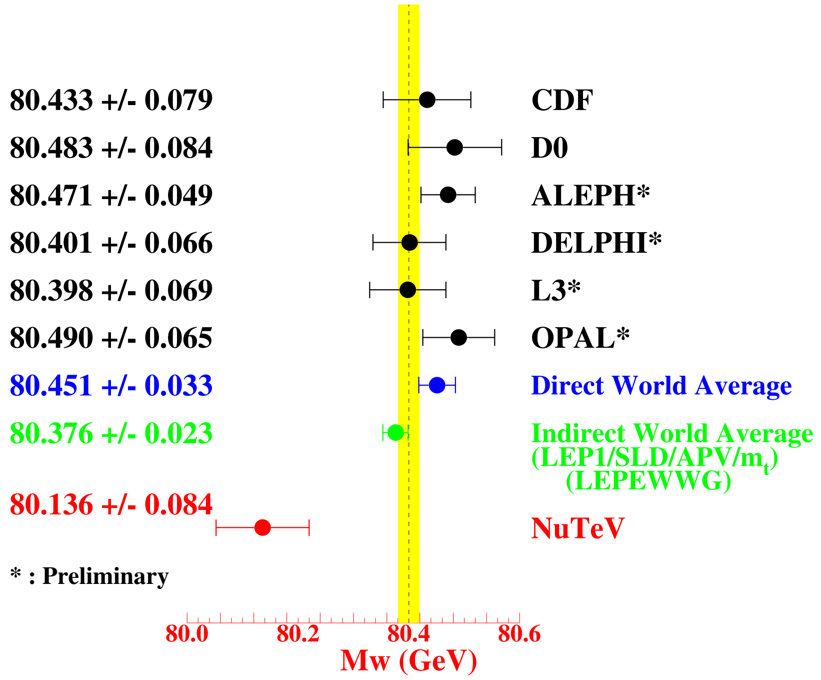


Abbildung 2.2: *Bei dem NuTeV Experiment gemessene Masse des W-Bosons im Vergleich mit den Ergebnissen anderer Großexperimente* [8].

2.5 Messung von $\sin\theta_W$ aus ν-Nukleon Streuung

Bei der tiefinelastischen Streuung von Neutrinos an Kernen, wie sie bei dem NuTeV Experiment untersucht wurde, gibt es zwei verschiedene Typen von Streuprozessen. $\nu_\mu + N \to \nu + X$ ist ein Prozess mit neutralem Strom (NC) und $\nu_\mu + N \to \mu^- + X$ ist ein geladener Strom (CC), da das beteiligte ungeladene Neutrino in ein geladenes Teilchen umgewandelt wird. Der Fluss der Myon-Neutrinos war bei dem NuTeV Experiment um ein vielfaches höher, als der Fluss der Elektron-Neutrinos, weshalb hier nur Stoßprozesse mit Myon-Neutrinos betrachtet werden. In Abbildung 2.3 sind die Feynmandiagramme der Partonprozesse in niedrigster Ordnung Störungstheorie dargestellt.

Dabei koppelt das neutrale Vektorboson Z_0 mit

$$ie\gamma_\mu \frac{I_q^3 - \sin^2\theta_W Q_q}{\sin\theta_W \cos\theta_W} \cdot (1-\gamma_5) + \frac{(-\sin\theta_W)}{\cos\theta_W} Q_q \cdot (1+\gamma_5)) \tag{2.13}$$

und das geladene Vektorboson W^+ mit

$$ie\gamma_\mu(\frac{1}{\sqrt{2}\sin\theta_W}V_{ij}\cdot(1-\gamma_5)) \tag{2.14}$$

an die Quarks.

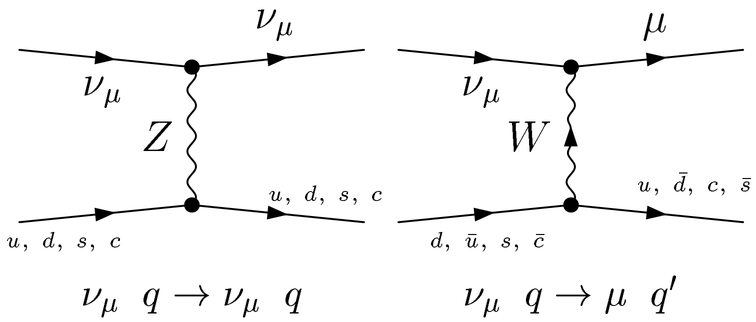


Abbildung 2.3: *Hauptbeiträge zur Neutrino Nukleonstreuung in Nullter Ordnung Störungstheorie(tree Level).*

Vergleicht man die beiden Lepon-Lepton-Eichboson Vertizes so kann man die geringe Masse des Myons vernachlässigen. Anschliessend stellt sich heraus, dass an beiden Lepon-Lepton-Eichboson Vertizes dieselbe kopplung steht. Dies liegt daran, dass einerseits Neutrinos nur linkshändig vorkommen und andererseits das W^+ nur linkshändig (d.h. über $(1-\gamma_5)$) koppelt. Um den gesamten NC(CC) Wirkungsquerschnitt zu erhalten, muss man nach Gleichung (A.1) die differentiellen Partonwirkungsquerschnitte mit den entsprechenden Verteilungsfunktionen falten und über sämtliche Quarks summieren. Eine experimentell gut zugängliche Größe ist z.B. das Verhältnis $\frac{\sigma_{NC}}{\sigma_{CC}}$. Dies hängt durch die Kopplungen unter anderem auch von $\sin\theta_W$, dem elektroschwachen Mischungswinkel aus Kapitel 2.3.2 ab. Diese Abhängigkeit kann näherungsweise über folgende einfache Beziehung errechnet werden [5]:

$$R_\nu = g_L^2 + r g_R^2\,, \tag{2.15}$$

$$R_{\bar{\nu}} = g_L^2 + \frac{1}{r}g_R^2 \tag{2.16}$$

mit

$$g_L^2 = \frac{1}{2} - \sin^2\theta_W + \frac{5}{9}\sin^4\theta_W, \quad g_R^2 = \frac{5}{9}\sin^4\theta_W \tag{2.17}$$

und

$$r = \frac{\sigma(\bar{\nu} + N \to \bar{\mu} + X)}{\sigma(\nu + N \to \mu + X)} \ . \tag{2.18}$$

Um diese Beziehung herzuleiten, wurden einige Näherungen gemacht:

- Es wurde in niedrigster Ordnung Störungstheorie gerechnet (siehe Abbildung 2.3),
- Isosymmetrie angenommen (siehe A.1),
- das Verhältnis $\frac{\frac{-i}{k^2-M_Z^2}}{\frac{-i}{k^2-M_W^2}}$, das aus den unterschiedlichen Propagatoren der Graphen folgt, wurde mit eins gleichgesetzt,
- die Massen der leichten an der Reaktion beteiligten Teilchen wurden auf Null gesetzt.

Die Herleitung findet sich im allgemeineren Fall für Quarkmassen $\neq 0$ in [6].
Da r und R_ν bzw. $R_{\bar{\nu}}$ aus der Messung hervorgehen, lässt sich eine Gleichung für $\sin^2\theta_W[r, R_\nu]$ ableiten, die anschließend mit den bisherigen Messungen verglichen werden kann. Bezieht man die elektroschwachen Standardmodell-Effekte höherer Ordnung mit ein, so kann dies durch eine Modifikation der Gleichungen (2.17) berücksichtigt werden [7]:

$$g_L^2 = \rho(\frac{1}{2} - \sin^2\theta_W k + \frac{5}{9}\sin^4\theta_W \kappa^2), \quad g_R^2 = \frac{5}{9}\sin^4\theta_W \kappa^2. \tag{2.19}$$

Für eine Higgsmasse von ca. 100 GeV und eine Topmasse von ca. 175 GeV lassen sich die beiden Parameter ρ und κ mit der Masse des Top-Quarks M_t und der Higgsboson-Masse M_t und m_h abschätzen [**?**, 5]:

$$\begin{aligned}\rho &\approx 1.0086 + 0.0175(\tfrac{M_t}{175GeV} - 1) - 0.0006\ln(\tfrac{m_h}{100GeV}),\\ \kappa &\approx 1.0349 + 0.07(\tfrac{M_t}{175GeV} - 1) - 0.0029\ln(\tfrac{m_h}{100GeV}).\end{aligned}$$

Kapitel 3

Das Minimale Supersymmetrische Standardmodell

Das minimale supersymmetrische Standardmodell (MSSM) ist eine ($N = 1$) supersymmetrische Theorie. Seine nichtabelsche lokale Eichsymmetrie ist in Anlehnung an das SM die $SU(3)_C \times SU(2)_I \times U(1)_Y$. Auch der Teilcheninhalt wird in Anlehnung an den des Standardmodells gewählt.

3.1 Bausteine des MSSM

Die Minimalforderung an das MSSM ist, dass es sämtliche Materieteilchen, die man aus dem SM kennt, ebenfalls enthält. Wie in (B.3) beschrieben, gibt es zu jedem fermionischen Freiheitsgrad genau einen bosonischen Freiheitsgrad und umgekehrt. Man ordnet jedem Materiefeld des SM ein chirales Superfeld und das dazu konjugiert komplexe Superfeld zu. Die fermionischen Freiheitsgrade dieser Felder entsprechen den Freiheitsgraden der Fermionen aus dem SM (Quarks und Leptonen). Die dazugehörigen bosonischen Freiheitsgrade werden als Superpartner (im speziellen Squarks und Sleptonen) bezeichnet. Per Konstruktion transformieren sich die Superpartner in identischer Weise unter den inneren Eichtransformationen wie die jeweiligen Standardmodellteilchen. Den Eichbosonen des Standardmodells werden jeweils fermionische Vektorsuperfelder zugeordnet, deren zusätzliche physikalische Freiheitsgrade einen Weyl-Spinor bilden. Man nennt die Spin-$\frac{1}{2}$-Superpartner der Eichbosonen Gauginos. Die Eichbosonen und Gauginos transformieren sich bezüglich der adjungierten Darstellung der Eichgruppe. Man kann deshalb Fermionen und Bosonen aus dem Standardmodell nicht als Superpartner von einander betrachten, da sie sich unterschiedlich unter der inneren Symmetrie transformieren.
Der supersymmetrische Higgs-Sektor kann nicht einfach als fermionische Erweiterung der skalaren Freiheitsgrade des SM formuliert werden. Die minimale Möglichkeit mit der man sowohl den u-, als auch den d-artigen Quarks Masse zukommen lassen kann [18, 25], ist ein Higgs-Sektor mit zwei statt einem skalaren Dublett und zwei Higgsino-Dubletts. Der Index L oder R bei den Sfermionen $\tilde{f}_{L,R}$ drückt keine Chiralitätseigenschaft aus, sondern

Superfeld	THDM Teilchen	Super-Partner	$SU(3)_C \times SU(2)_I \times U(1)_Y$ Darstellung	Bezeichnung
$\hat{Q}$	$\begin{pmatrix} \hat{u}_L \\ \hat{d}_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{d}_L \end{pmatrix}$	$(3, 2, \frac{1}{3})$	Quarks, Squarks
$\hat{U}$	$\hat{u}_R$	$\tilde{u}_R^\dagger$	$(3^*, 2, -\frac{4}{3})$	Up-Quark, Up-Squark
$\hat{D}$	$\hat{d}_R$	$\tilde{d}_R^\dagger$	$(3^*, 2, \frac{2}{3})$	Dp-Quark, Dp-Squark
$\hat{L}$	$\begin{pmatrix} \hat{\nu}_L \\ \hat{e}_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L \\ \tilde{e}_L \end{pmatrix}$	$(1, 2, -1)$	Leptonen, Sleptonen
$\hat{E}$	$\hat{e}_R$	$\tilde{e}_R^\dagger$	$(1, 1, 2)$	Elektron, Selektron
$\hat{H}_1$	$\begin{pmatrix} \hat{H}_1^1 \\ \hat{H}_1^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{H}_1^1 \\ \tilde{H}_1^2 \end{pmatrix}$	$(1, 2, -1)$	Higgsbosonen, Higgsinos
$\hat{H}_2$	$\begin{pmatrix} \hat{H}_2^1 \\ \hat{H}_2^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{H}_2^1 \\ \tilde{H}_2^2 \end{pmatrix}$	$(1, 2, 1)$	Higgsbosonen, Higgsinos
$\hat{V}'$	$\hat{B}_\mu$	λ_B	$(1, 1, 0)$	B_μBoson, Bino
$\hat{V}^a$	$\hat{B}_\mu^a$	λ_W^a	$(1, 3(ad.), 0)$	W_μ^aBoson, Wino
$\hat{V}_s^a$	$\hat{G}_\mu^a$	λ_s^a	$(8(ad.), 1, 0)$	Gluonen, Gluinos

Tabelle 3.1: Der Teilcheninhalt des MSSM

rührt von der Zugehörigkeit zu dem jeweiligen Fermion her.
Eine exakte Supersymmetrie ist ausgeschlossen, da Superpartner mit gleicher Masse wie die SM-Teilchen experimentell ausgeschlossen sind. Der Ausweg aus diesem Dilemma besteht darin, dass man den Superpartnern eine Masse gibt, die oberhalb der bisherigen Beschleunigern zugänglichen Energien liegt und somit experimentell noch nicht ausgeschlossen ist. Im MSSM werden die Massen der supersymmetrischen Teilchen mit Hilfe der Soft-Brechungsterme eingeführt. Wie in [20] erläutert, ist die Tatsache, dass supersymmetrische Teilchen, falls sie existieren, Massen haben, die sich stark von denen der Standardmodellteilchen unterscheiden nicht unnatürlich. Der Grund dafür ist, dass der Mechanismus spontaner Brechung der Supersymmetrie, der mit dem Soft-Brechungsterm niederenergetisch parametrisiert wird, ein anderer ist als der Mechanismus spontaner Symmetriebrechung im Standardmodell. Es ist also auch nicht zu erwarten, dass die beiden Mechanismen auf Massen der gleichen Größenordnung führen. In Tabelle 3.1 sind die Bezeichnungen der MSSM-Felder in der Wechselwirkungsdarstellung gegeben.

In Spalte 4 der Tabelle 3.1 bedeuten die ersten beiden Zahlen die Dimensionalität der Darstellung der jeweiligen nichtabelschen Eichgruppe. Im Fall der abelschen Eichgruppe ist die Darstellung des Hyperladungsoperators

$$Q = T + \frac{Y}{2} \tag{3.1}$$

angegeben.

3.2 Supersymmetriebrechung

Wie bereits erwähnt, ist eine exakte Supersymmetrie (SUSY) experimentell ausgeschlossen. Es bedarf also eines Brechungsmechanismus der SUSY, der den Superpartnern unterschiedliche Massen verschafft. Leider kann dies nicht analog zum Standardmodell durch spontane Symmetriebrechung erfolgen [22]. Allerdings will man auch nicht, dass durch die Wahl von Massentermen weitere Eigenschaften, wie das Verschwinden von quadratischen Divergenzen, verloren gehen. Neben der Brechung der globalen und lokalen Supersymmetrie, die jedoch das Auftreten zusätzlicher Teilchen zur Folge hat [24], besteht eine weitere Möglichkeit der Massenerzeugung darin, explizite Softbrechungsterme einzuführen. Es ergeben sich folgende R-paritätserhaltende Softbrechungsterme [20, 24], die frei von quadratischen Divergenzen sind.

$$\begin{aligned}
-L_{soft} \;=\; & +m_1^2|H_1|^2 + m_2^2|H_2|^2 - M_{12}^2(\epsilon_{ij}H_1^iH_2^j + h.k.) \\
& +M_{\tilde{Q}}{}^2\left[\tilde{u_L^*}\tilde{u_L} + \tilde{d_L^*}\tilde{d_L}\right] + M_{\tilde{U}}^2\left[\tilde{u_R^*}\tilde{u_R}\right] + M_{\tilde{D}}2\left[\tilde{d_R^*}\tilde{d_R}\right] \\
& +M_{\tilde{L}}{}^2\left[\tilde{\nu_L^*}\tilde{\nu_L} + \tilde{e_L^*}\tilde{e_L}\right] + M_{\tilde{E}}^2\left[\tilde{e_L^*}\tilde{e_L}\right] \\
& +\tfrac{g_I}{\sqrt{2}m_W}\epsilon_{ij}\left[\tfrac{m_eA_e}{\cos\beta}H_1^i\tilde{l}_L^je_R^* + \tfrac{m_dA_d}{\cos\beta}H_1^i\tilde{q}_L^jd_R^* - \tfrac{m_uA_u}{\sin\beta}H_2^i\tilde{q}_L^ju_R^* + h.k.\right] \\
& +\tfrac{1}{2}\left[M_3\bar{\tilde{g}}\tilde{g} + M_2\bar{\tilde{W}}_a\tilde{W}_a + M_1\bar{\tilde{B}}\tilde{B}\right]
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Diese Soft-Brechungsterme gelten für die erste Generation von Materieteilchen. Für die zweite und dritte Generation ist die Gestalt der Softbrechungsterme analog. In der entdgültigen Lagrangedichte tritt die Summe aus allen dreien auf. Die Größen $M_{\tilde{Q},\tilde{D},\tilde{U},\tilde{L},\tilde{E}}$ sind im allgemeinen Fall hermitesche (3×3)-Matrizen im Familienraum, während m_uA_u, m_dA_d und m_eA_e beliebige komplexe (3×3)-Matrizen im Familienraum seien können. Hier werden diese Matrizen Familien-diagonal gewählt.

3.3 Higgs-Sektor

Nach [25, 18] ist es nicht möglich, das MSSM mit nur einem skalaren Higgs-Isodublett zu formulieren, mit zwei solchen Dubletts ist es jedoch möglich:

$$H_1 = \begin{pmatrix} H_1^1 \\ H_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1^0 + i\xi_1) \\ \phi_1^- \end{pmatrix}, \; H_2 = \begin{pmatrix} H_2^1 \\ H_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_2^+ \\ v_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_2^0 + i\xi_2) \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

v_1 und v_2 sind die Vakuum-Erwartungswerte des Higgspotentials. Das Verhältnis

$$\tan\beta \;=\; \frac{v_2}{v_1} \tag{3.4}$$

ist ein wichtiger Parameter des MSSM. Die acht Freiheitsgrade in Gleichung (3.3) reduzieren sich auf fünf physikalische, und zu drei unphysikalische Freiheitsgrade (Higgsteilchen). Die Masseneigenzustände der physikalischen Higgsteilchen ($H^{\pm}$, h^0, H^0, A^0) ergeben sich mit den Winkelparametern α und β zu:

$$
\begin{aligned}
H^{\pm} &= -\phi_1^{\pm} \sin\beta + \phi_2^{\pm} \cos\beta, \\
h^0 &= \sqrt{2}\left[-\phi_1^0 \sin\alpha + \phi_2^0 \cos\alpha\right], \\
H^0 &= \sqrt{2}\left[\phi_1^0 \cos\alpha + \phi_2^0 \sin\alpha\right], \\
A^0 &= \sqrt{2}\left[-\xi_1^0 \sin\beta + \xi_2^0 \cos\beta\right],
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Der Mischungswinkel α ist durch

$$
\tan 2\alpha = \tan 2\beta \frac{M_A^2 + M_Z^2}{M_A^2 - M_Z^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \tag{3.6}
$$

bestimmt. M_A ist die Masse das A^0-Bosons. $H^{\pm}$ sind elektrisch geladene und h^0 H^0 sind elektrisch neutrale Higgs-Bosonen. h^0 bezeichnet das leichteste Higgsteilchen. Für den Fall dass die Higgsteilchen A^0, H^0 und $H^{\pm}$ sehr schwer sind, entkoppeln diese und der Higgs-Sektor des MSSM ist durch Messung bei niedrigeren Energieen nicht von dem des SM zu unterscheiden. Von einem solchen Szenario wird in dieser Arbeit ausgegangen. Zur weiteren Studie der Eigenschaften des Higgs-Sektors wird auf [28] verwiesen.

3.4 Squark- und Slepton-Sektor

Die Squarks sind die Superpartner der Quarks. Wie bei den Quarks unterscheidet man up- und down-artige Squarks. Die durch die Wechselwirkungszustände ausgedrückten Squarkmassenterme in der Lagrangedichte lauten

$$
L_{q_L,q_R} = -(\tilde{u}_L^*,\ \tilde{u}_R^*) M_{\tilde{u}}^2 \begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{u}_R \end{pmatrix} - (\tilde{d}_L^*,\ \tilde{d}_R^*) M_{\tilde{d}}^2 \begin{pmatrix} \tilde{d}_L \\ \tilde{d}_R \end{pmatrix}. \tag{3.7}
$$

Gleichung (3.7) steht wiederum repräsentativ für analoge Massenterme der anderen beiden Generationen. Dies ist natürlich nur dann erlaubt, wenn es keine Familienmischung der Squarks gibt. Die Massenmatrizen in Gleichung (3.7) sind nach [25, 23]

$$
M_{\tilde{q}}^2 = \begin{pmatrix} M_{\tilde{q}}^{LL} + m_{\tilde{q}}^2 & m_{\tilde{q}} (M_{\tilde{q}}^{LR})^* \\ m_{\tilde{q}} (M_{\tilde{q}}^{LR}) & M_{\tilde{q}}^{RR} + m_{\tilde{q}}^2 \end{pmatrix}, \tag{3.8}
$$

wobei $\tilde{q}$ ein Squark-Index ist und die Matrixelemente durch

$$M_{\tilde{q}}^{LL} = M_Z^2(I_3^{\tilde{q}} - Q_{\tilde{q}} \sin^2(\theta_W)) \cos(2\beta) + M_{\tilde{Q}}^2 \text{ für linkshändige Squarks,} \tag{3.9}$$

$$M_{\tilde{q}}^{LR} = A_{\tilde{q}} - \mu^* \begin{cases} \cot\beta & \text{für u-artige Squarks,} \\ \tan\beta & \text{für d-artige Squarks,} \end{cases} \tag{3.10}$$

$$M_{\tilde{q}}^{RR} = M_Z^2 Q_q \sin^2(\theta_W) \cos(2\beta) + \begin{cases} M_{\tilde{U}^2} & \text{für rechtshändige u-artige Squarks,} \\ M_{\tilde{D}^2} & \text{für rechtshändige d-artige Squarks,} \end{cases} \tag{3.11}$$

erklärt werden. Die Masseneigenzustände erhält man durch Diagonalisieren der Matrix $M_{\tilde{u}}^2$ bzw. der Matrix $M_{\tilde{d}}^2$ mit einer unitären Matrix U^f gemäß

$$U^u M_{\tilde{u}}^2 U^{u\dagger} \ = \ \text{diag}(m_{\tilde{u}_1},\ m_{\tilde{u}_2})\ . \tag{3.12}$$

Nach Lösung der quadratischen Gleichung ergeben sich die $\tilde{u}$-Squark bzw. die $\tilde{d}$-Squarkmassen zu

$$m_{\tilde{u}_{1,\,2}} \ = \ \frac{1}{2}(M_u^{LL} + M_u^{RR} \mp \sqrt{(M_u^{LL} - M_u^{RR})^2 + 4m_u^2|M_u^{LR}|^2}\ ). \tag{3.13}$$

Will man, dass die Squarks überhaupt nicht untereinander mischen, werden diese Matrizen diagonal gewählt und es gilt dann: $A_u = \mu^* \cot\beta$ und $A_d = \mu^* \tan\beta$.
Mit den Sleptonen verhält sich alles prinzipiell analog wie mit den Squarks bis auf die Besonderheit, dass das Neutrino im SM masselos ist und, dass die starke Wechselwirkung nicht an Sleptonen koppelt. Die Massenterme der Sleptonfelder erhält man aus den Gleichungen (3.7, 3.9, , 3.11) mit den Ersetzungen

$$\begin{gathered} \tilde{q} \to \tilde{l},\ \ M_{\tilde{Q}}^2 \to M_{\tilde{L}}^2, \\ M_{\tilde{D}}^2 \to M_{\tilde{E}}^2 \ \text{ und } \ M_{\tilde{U}}^2 \to 0\ . \end{gathered} \tag{3.14}$$

Die MSSM Massenparameter $M_{\tilde{Q},\,\tilde{L},\,\tilde{D},\,\tilde{E},\,\tilde{U}}$ wurden hier nicht nach verschiedenen Generationen unterschieden. Da es im Allgemeinen jedoch nicht der Fall sein muss, dass die Massenparameter der drei verschiedenen Generationen denselben Wert haben, erhält jeder dieser Parameter noch einen zusätzlichen Generationsindex i, der von 1 bis 3 läuft.

3.5 Neutralino-Sektor

Die Neutralinos ergeben sich aus der Mischung neutraler Higgssinos. Ihre Massenterme lauten nach [23, 26]

$$L_{\lambda^3,\lambda',\psi^1_{H_1},\psi^2_{H_2}} = -\frac{1}{2}(\psi^0)^T Y \psi^0 + \text{h.c.}\,, \quad \psi^0 = (\lambda', \lambda^3, \psi^1_{H_1}, \psi^2_{H_2}). \tag{3.15}$$

Dabei ist Y die Neutralinomassenmatrix

$$Y = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -M_Z \sin\theta_W \cos\beta & M_Z \sin\theta_W \sin\beta \\ 0 & M_2 & M_Z \cos\theta_W \cos\beta & -M_Z \cos\theta_W \sin\beta \\ -M_Z \sin\theta_W \cos\beta & M_Z \cos\theta_W \cos\beta & 0 & -\mu \\ M_Z \sin\theta_W \sin\beta & -M_Z \cos\theta_W \sin\beta & -\mu & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Die Softbrechungsparameter M_2 und M_1 sind im Allgemeinen von einander unabhängig, werden jedoch häufig über die GUT-Relation $M_1 = M_2 \frac{5}{3} \tan^2\theta_W$ in Beziehung gebracht.

Gleichung (3.16) lässt sich ebenfalls mit Hilfe einer unitären Transformationsmatrix diagonalisieren, so dass man die Masseneigenwerte der Neutralinos erhält.

3.6 Chargino-Sektor

Die Charginos sind Mischungen der geladenen Winos $\lambda^\pm := \lambda^1 \pm i\lambda^2$ und der geladenen Higgsinos $\psi^2_{H_1}$, $\psi^1_{H_2}$. Definiert man die zwei Dupletts

$$\psi^R = (-i\lambda^+, \psi^1_{H_2}), \quad \psi^L = (-i\lambda^-, \psi^2_{H_1})\,, \tag{3.17}$$

so erhält man den Chargino-Massenterm aus dem bilinearen Anteil der Neutrino- Lagrangdichte $\mathcal{L}_{Chrg}$.

$$\mathcal{L}_{Chrg} = i\left[\psi^{R^T}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}^R + \bar{\psi}^{L^T}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\bar{\psi}^R\right] - \left[\psi^{R^T} X \psi^L + \bar{\psi}^{L^T} X^\dagger \bar{\psi}^R\right] \tag{3.18}$$

Die Chargino-Massenmatrix X hat die Gestalt

$$X = \begin{pmatrix} M_2 & \sqrt{2} M_W \sin\beta \\ \sqrt{2} M_W \cos\beta & \mu \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Auch hier kann man nach einer Diagonalisierung die Charginomassen in Abhängigkeit von den SUSY-Parametern angeben,

$$m^2_{\tilde{\chi}\,1,2} = \frac{M_2^2 + |\mu|^2 + 2M_W^2}{2} \mp \sqrt{\frac{(M_2^2 + |\mu|^2 + 2M_W^2)^2}{4} - |M_W^2 \sin(2\beta) - \mu M_2|^2}\,. \tag{3.20}$$

Kapitel 4

Die Streuung von Neutrinos an Nukleonen und das R-Verhältnis

In diesem Kapitel wird beschrieben, wie man das R-Verhältnis

$$R^{\nu} = \frac{\sigma^{\nu}_{NC}}{\sigma^{\nu}_{CC}}, \tag{4.1}$$

das bereits in Kapitel 2.5 erwähnt wurde, in nächsthöherer Ordnung der Störungstheorie (Ein-Schleifen-Niveau) berechnet. Allerdings soll hier auf Näherungen und Annahmen, die dort gemacht wurden, verzichtet werden. Vorrangig werden die Auswirkungen supersymmetrischer Effekte auf Ein-Schleifen-Niveau im Unterschied zu den SM-Korrekturen untersucht.

4.1 Partonprozesse

Bei einem tiefinelastischen Streuprozess wie er für des NuTeV relevant ist streut ein Myon-Neutrino an einem Parton. Den Wirkungsquerschitt für einen solchen Streuvorgang nennt man partonischen Wirkungsquerschnitt und er wird mit einem $\hat{\sigma}$ gekennzeichnet.

4.1.1 Neutraler Strom

Es können verschiedene Parton-Streupozesse mit neutralem Strom vorkommen:

$$\begin{gathered} \hat{\sigma}^{\nu}_{NC,p}(\hat{s}) \equiv \int \mathrm{d}\Omega \frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}(\nu_\mu + p \to \nu_\mu + p)(\hat{s},\theta)}{\mathrm{d}\Omega}\ , \\ \text{mit p } \in \ \left\{u, d, s, c, b, \bar{u}, \bar{d}, \bar{s}, \bar{c}, \bar{b}\right\}\ . \end{gathered} \tag{4.2}$$

Das ein- und auslaufende Teilchen p nummeriert die Quaks im Nukleon, die energetisch erlaubt sind. $\hat{s}$ ist der quadrierte invariante Viererimpuls der beiden einlaufenden Teilchen im

Neutrino-Parton-System (siehe Gleichung (4.49)). ($\mathrm{d}\Omega = \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$) ist im Schwerpunktsystem definiert.

$$\hat{s} = (p_\nu^\mu + p_p^\mu)^2 \tag{4.3}$$

Es wird davon ausgegangen, daß das Teilchen p durch die Wechselwirkung nicht verändert wird. Der theoretisch auf Ein-Schleifen-Niveau auftretende Flavor-Changing-Neutral-Current konnte bisher nicht beobachtet werden, weshalb er hier nicht betrachtet wird.

4.1.2 Geladener Strom

Bei den Prozessen mit geladenem Strom(CC) verhält es sich ganz ähnlich wie bei den NC-Prozessen, nur dass es dort Übergänge zwischen verschiedenen Generationen von Quarks geben kann.

$$\begin{aligned} &\hat{\sigma}^\nu_{CC,p,p'}(\hat{s}) \equiv \int \mathrm{d}\Omega \frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}(\nu_\mu + p \to \nu_\mu + p')(\hat{s},\theta)}{\mathrm{d}\Omega} \;, \\ &\text{mit p } \in \; \{d, s, b, \bar{u}, \bar{c}\} \text{ und } p' \; \in \; \left\{u, c, \bar{d}, \bar{s}, \bar{b}\right\} \;. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Es gilt jedoch die Einschränkung, dass bei jedem partonischen Teilprozess eine Änderung des Isospins von 1 stattfindet, das heißt, dass sich ein d-Quark nur in ein u- oder c-Quark umwandeln darf. Die Amplituden solcher Übergänge werden im Standardmodell mit Hilfe der CKM-Matrix quantifiziert, was in [29] und [30] beschrieben ist. Im MSSM wird die CKM-Matrix des SM übernommen.

4.2 Hadronische Prozesse

Den hadronischen Wirkungsquerschnitt $\sigma_{NC\,(CC)}$ erhält man, wenn man die partonischen Teilprozesse ($\hat{\sigma}(\nu + p \to \nu + p)(\hat{s})$, $\hat{\sigma}(\nu + p \to \mu + p')(\hat{s})$) wie in Anhang A.1 beschrieben mit den jeweiligen Partonverteilungsfunktionen faltet und über die erlaubten Partonprozesse summiert. Definiert man den gesamten invarianten quadrierten Impuls des Neutrino-Nukleon-Systems S wie im Anhang A.1

$$\hat{s} = x \cdot S \;, \tag{4.5}$$

so erhält man:

$$\sigma_{NC\,(CC)}(S) = \sum_{p,(p')} \int_0^1 \mathrm{d}x \cdot f_{p/P}(x, \mu_F) \cdot \hat{\sigma}^\nu_{NC(CC),\,p(p,p')}(xS) \;. \tag{4.6}$$

Die Größe R aus Gleichung (4.1) läßt sich, sowohl im SM als auch im MSSM in höherer Ordnung Störungstheorie ausrechnen, wenn man die eingehenden Parton-Wirkungsquerschnitte aus den Gleichungen (4.2, 4.4) in höherer Ordnung im SM (MSSM) ausrechnet und in Gleichung (4.6) einsetzt.

$$R^{\mathrm{SM}^{1l}} = \frac{\sigma_{NC}^{1l}}{\sigma_{CC}^{1l}} \tag{4.7}$$

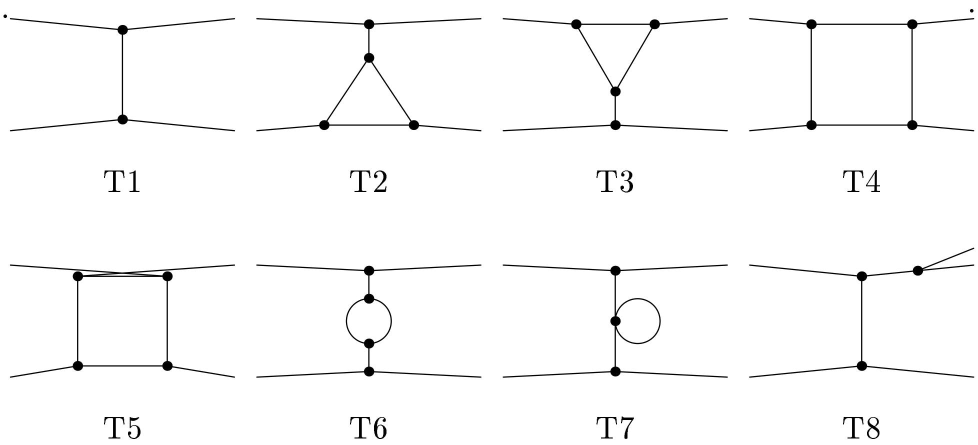
Der Index $1l$ steht für erste Ordnung Störungstheorie.

$$R^{\mathrm{MSSM}^{1l}} = \frac{\sigma_{NC}^{\mathrm{MSSM}^{1l}}}{\sigma_{CC}^{\mathrm{MSSM}^{1l}}} \tag{4.8}$$

Wie sich der Übergang vom SM auf das MSSM auf die meßbare Größe R in erster Ordnung Störungstheorie auswirkt, erfährt man, wenn man

$$\delta R^{1l} = R^{\mathrm{MSSM}^{1l}} - R^{\mathrm{SM}^{1l}} \tag{4.9}$$

bildet. Bei der Berechnung der Matrixelemente zu den Wirkungsquerschnitten $\sigma_{NC}^{\mathrm{MSSM\ (SM)}^{1l}}$ und $\sigma_{CC}^{\mathrm{MSSM\ (SM)}^{1l}}$, die wiederum in $R^{\mathrm{MSSM}^{1l}}$ und $R^{\mathrm{SM}^{1l}}$ eingehen, treten nach Anwendung der entsprechenden Feynmanregeln folgende Topologien von Feynmangraphen auf.



Bei den Graphen zwei bis acht laufen auf den inneren Linien sämtliche Teilchen, die die Feynmanregeln des jeweiligen Modells (MSSM oder SM) erlauben. Bei einigen der Graphen der Topologien 2, 3, 6 und 7 treten ultraviolette (UV) Divergenzen auf, die regularisiert und durch das Addieren von Counterterm-Diagrammen renormiert werden müssen. Wie die Regularisierung und Renormierung im Detail geschieht ist im Anhang C beschrieben. Läuft bei Topologie 2, 3 oder 8 in der Schleife bzw. auf einer äußeren Linie ein masseloses Teilchen (γ), so kann das zu Infrarotdivergenzen führen. T8 stellt durch reelle Photon-Abstrahlung eine Korrektur zum betrachteten Prozess dar. Die Teilchen, die im MSSM zusätzlich zu denen im SM eingeführt werden, sind alle massebehaftet und können deshalb keine Infrarotdivergenzen verursachen. Diese Eigenschaft kann man sich zu Nutze machen, wenn man lediglich δR^{1l} und nicht die Werte von $R^{\mathrm{MSSM}^{1l}}$ und $R^{\mathrm{SM}^{1l}}$ berechnen will.

4.3 Skizze der Berechnungen

Um eine Näherung zu machen, die eine Aussage über δR^{1l} zulässt, muss man die partonischen Wirkungsquerschnitte in Gleichung (4.6) noch weiter zerlegen.

4.3.1 Aufteilung in SM- und MSSM-Korrekturen

Dazu wird zunächst die verkürzte Schreibweise

$$\frac{d\hat{\sigma}(\nu_\mu + q \to \nu_\mu + q)^{\mathrm{MSSM}^{1l}}(xS, \theta)}{d\Omega} =: \sigma_{NC}^{\mathrm{MSSM}^{1l}}(q) \; , \tag{4.10}$$

$$\frac{d\hat{\sigma}(\nu_\mu + q \to \nu_\mu + q)^{\mathrm{SM}^{1l}}(xS, \theta)}{d\Omega} =: \sigma_{NC}^{\mathrm{SM}^{1l}}(q) \tag{4.11}$$

definiert. Wirkungsquerschnitte sind proportional zum Betragsquadrat der invarianten Amplitude $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}} + \mathcal{M}_{1l}$. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ steht für das Born-Diagramm und $\mathcal{M}_{1l}$ für die Summe der Ein-Schleifen-Diagramme. Es ist von Vorteil, die Amplitude $\mathcal{M}_{1l}$ noch weiter aufzuspalten.

$$\mathcal{M}_{1l}^{\mathrm{SM}} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}{}^{\mathrm{SM}} + \mathcal{M}_{1l-}^{\mathrm{SM}} + \mathcal{M}_{H}^{\mathrm{SM}} \tag{4.12}$$

$$\mathcal{M}_{1l}^{\mathrm{MSSM}} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}{}^{\mathrm{MSSM}} + \mathcal{M}_{1l-}^{\mathrm{MSSM}} + \mathcal{M}_{H}^{\mathrm{MSSM}} \tag{4.13}$$

In den beiden Gleichungen (4.12) und (4.13) setzt sich die Amplitude aus einem Born-Anteil ($\mathcal{B}$), einem Anteil der Higgsteilchen enthält (H) und den restlichen Ein-Schleifen-Diagrammen ($1l-$) zusammen.

Der Gesamtwirkungsquerschnitt z.B. im Falle eines neutralen Stroms ist

$$\begin{aligned} &\sigma_{NC}^{\mathrm{SM}^{1l}}(q) = \sigma_{NC\,\mathrm{virtuell}}^{\mathrm{SM}} + \sigma_{NC\,\mathrm{reell}}^{\mathrm{SM}} \; , \qquad \text{mit} \\ &\sigma_{NC\,\mathrm{virtuell}}^{\mathrm{SM}} \sim |\mathcal{M}_B^{\mathrm{SM}}|^2 + 2\,\mathrm{Re}((\mathcal{M}_B^{\mathrm{SM}})^* \mathcal{M}_{1l-}^{\mathrm{SM}}) + 2\,\mathrm{Re}((\mathcal{M}_B^{\mathrm{SM}})^* \mathcal{M}_H^{\mathrm{SM}}) + \mathcal{O}(\alpha^4). \end{aligned} \tag{4.14}$$

$\sigma_{NC\,\mathrm{reell}}^{\mathrm{SM}}$ ist der Wirkungsquerschnitt der von der Abstrahlung von Photonen herrührt. Um eine konsistente Störungsentwicklung in der Kopplung (α) bis zur Ordnung α^3 zu bekommen, muss man Terme höherer Ordnung ($\mathcal{O}(\alpha^4,\ ...)$) weglassen. Im MSSM gilt: $\mathcal{M}_B^{\mathrm{MSSM}} = \mathcal{M}_B^{\mathrm{SM}}$, $\sigma_{NC\,\mathrm{reell}}^{\mathrm{MSSM}} = \sigma_{NC\,\mathrm{reell}}^{\mathrm{SM}}$ und $\mathcal{M}_{1l-}^{\mathrm{MSSM}} = \mathcal{M}_{1l-}^{\mathrm{SM}} + \mathcal{M}_{SP}^{\mathrm{MSSM}}$. Die Superpartner-Amplitude $\mathcal{M}_{SP}^{\mathrm{MSSM}}$ besteht aus den Teilen der MSSM-Amplitude, die weder Born-Niveau $\mathcal{M}_B^{\mathrm{MSSM}}$ sind noch Higgs-Teilchen enthalten $\mathcal{M}_H^{\mathrm{MSSM}}$, noch identisch mit Standardmodell-Diagrammen $\mathcal{M}_{1l-}^{\mathrm{SM}}$ sind. Daraus ergibt sich der supersymmetrische partonische Wirkungsquerschnitt zu

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{NC}^{\mathrm{MSSM}^{1l}}(q) = \sigma_{NC\,\mathrm{virtuell}}^{\mathrm{MSSM}} + \sigma_{NC\,\mathrm{reell}}^{\mathrm{SM}}\,, \qquad \text{mit} \\
&\sigma_{NC\,\mathrm{virtuell}}^{\mathrm{MSSM}} \sim |\mathcal{M}_B^{\mathrm{SM}}|^2 + 2\,\mathrm{Re}((\mathcal{M}_B^{\mathrm{SM}})^*((\mathcal{M}_{1l-}^{\mathrm{SM}}) + \mathcal{M}_{SP}^{\mathrm{MSSM}}) + 2\,\mathrm{Re}((\mathcal{M}_B^{\mathrm{SM}})^*\mathcal{M}_H^{\mathrm{MSSM}}) + \mathcal{O}(\alpha^4)\,.
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Die Differenz der Wirkungsquerschnitte $\sigma_{NC}^{\mathrm{MSSM}^{1l}}(q)$ und $\sigma_{NC}^{\mathrm{MSSM}^{1l}}(q)$ ist somit

$$
\begin{aligned}
(\sigma_{NC}^{\mathrm{MSSM}^{1l}}(q) - \sigma_{NC}^{\mathrm{SM}^{1l}}(q)) \sim\ & 2\,\mathrm{Re}((\mathcal{M}_B^{\mathrm{SM}})^*\mathcal{M}_{SP}^{\mathrm{MSSM}}) \\
& +2\,\mathrm{Re}((\mathcal{M}_B^{\mathrm{SM}})^*\mathcal{M}_H^{\mathrm{MSSM}}) - 2\,\mathrm{Re}((\mathcal{M}_B^{\mathrm{SM}})^*\mathcal{M}_H^{\mathrm{SM}}) \\
& +\mathcal{O}(\alpha^4)
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

Der erste Term in Gleichung (4.16) ist die Größe, die im weiteren berechnet wird. Sie ist das, was man als Ein-Schleifen-Korrektur bekommt, wenn man für den betrachteten Partonprozess nur die Superpartnerbeiträge in den Schleifen erlaubt.

4.3.2 Higgsbeiträge

Wenn nun der Higgssektor im MSSM ähnlich wie der des Standardmodells ist, so müssen sich der zweite und der dritte Term in Gleichung (4.16) in guter Näherung wegheben. Aber selbst wenn dies nicht der Fall ist, so ist eine weitere Diskussion möglich. Es muss untersucht werden, welchen Effekt die Differenz der Higgs-Amplituden in Gleichung (4.16) verursacht. Bei den Diagrammen, in denen das Higgs nicht in der inneren Schleife aus Topologie 6 und 7 vorkommt, koppelt es an mindestens einer Seite an zwei Fermionen, von denen eines ein äußeres ist. Derartige Kopplungen besitzen die Struktur $ie(C^-\omega_- + C^+\omega_+)$ [41] mit

$$
\begin{aligned}
C^{+(-)} = &-\tfrac{1}{2\sin(\theta)M_W}(\delta_{ij}m_f(1 + \delta Z_e - \tfrac{\delta s}{s} + \tfrac{\delta m_f}{m_f} - \tfrac{\delta M_W}{M_W} + \tfrac{1}{2}\delta Z^H) \\
&+ \tfrac{1}{2}(m_f\delta Z_{ij}^{f,R(L)} + \delta Z_{ij}^{f,R(L)\dagger}m_f))\,.
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

Diese Kopplung trägt keine Massendimension. Vergleicht man die Größenordnungen, mit der die Kopplungen in die Gesamtamplitude eingehen, so stellt man fest, dass die Higgs-Fermion-Kopplungen im Vergleich zu den sonstigen Kopplungen um einen Faktor $\frac{m_f}{M_W}$ unterdrückt sind. Für die Leptonen und u-, d-, s-Quarks ist $\frac{m_f}{M_W} \leq 0.0019$. Für das relativ schwere c-Quark ist dieser Wert zwar um den Faktor 10 größer, wobei jedoch die Streuung an c-Quarks aufgrund der Partonverteilungsfunktionen [15] stark unterdrückt ist. Das Argument, dass die Diagramme, die ein MSSM-Higgs enthalten, aufgrund der Kopplung unterdrückt sind, gilt jedoch nicht für Higgsbosonen, die in dem Schleifen eines Vektorbosonpropagators laufen. Wenn man Superpartner Ein-Schleifen-Korrekturen ausrechnet, indem man einmal Higgseffekte mitnimmt und einmal sämtliche Higgsteilchengraphen ausschließt so stellt sich heraus, dass sich bei einer exemplarischen Wahl von MSSM-Parametern beide Korrekturen um weniger als 1% unterscheiden.

$$\frac{2\mathrm{Re}((\mathcal{M_B}^{\mathrm{SM}})^* \mathcal{M}_H^{\mathrm{MSSM}})}{2\mathrm{Re}((\mathcal{M_B}^{\mathrm{SM}})^* \mathcal{M}_{SP}^{\mathrm{MSSM}})} \leq 1\% \tag{4.18}$$

Allerdings ist diese Aussage nicht allgemeingültig, da sie nicht für sämtliche MSSM-Parameter überprüft wurde. Darüber hinaus liegen hier keine numerischen Werte für $(\mathcal{M_B}^{\mathrm{SM}})^* \mathcal{M}_H^{\mathrm{SM}}$ vor weshalb auch die exakte Berechnung von $(\mathcal{M_B}^{\mathrm{SM}})^* \mathcal{M}_{SP}^{\mathrm{MSSM}}$ im gesamten MSSM-Parameterraum nicht weiterhelfen würde. Zusammenfassend läßt sich also sagen, dass der Beitrag der supersymmetrischen Teilchen $(\sigma_{NC}^{\mathrm{MSSM}^{1l}}(q) - \sigma_{NC}^{\mathrm{SM}^{1l}}(q))$ in guter Näherung durch

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{NC}^{\mathrm{SP}}(q) &:= \textstyle\sum_p \int \mathrm{d}\Omega \;\; (\sigma_{NC}^{\mathrm{MSSM}^{1l}}(q) - \sigma_{NC}^{\mathrm{SM}^{1l}}(q)) \\ &= \textstyle\sum_p \int \mathrm{d}\Omega \;\; 2 \;\mathrm{Re}((\mathcal{M}_B^{\mathrm{SM}})^* \mathcal{M}_{\mathrm{SP}}^{\mathrm{MSSM}}) \end{aligned} \tag{4.19}$$

ausgedrückt werden kann, solange der MSSM Higgssektor dem des Standardmodells ähnelt. Wenn das CP-ungerade Higgs-Boson A^0 eine Masse hat, die deutlich größer als die Z-Masse ist, so verhält sich der MSSM-Higgssektor SM-ähnlich. Das leichteste Higgs-Boson besitzt eine SM-Kopplung und die anderen Higgs-Bosonen entkoppeln in guter Näherung. Diese spezielle Einstellung limitiert die Untersuchung jedoch auf einen beschränkten Parameterbereich des Minimal Supersymmetrischen Standardmodells. Es bleibt noch anzumerken, dass das Herausnehmen der Diagramme mit Higgsteilchen lediglich einen numerischen Check widerspiegelt, da ein generelles Entfernen von Higgsbeiträgen zu einer divergenten Quantenfeldtheorie führen würde.

4.3.3 Mischung der Quarkgenerationen

Im vorangegangenen Kapitel wurde exemplarisch mit Wirkungquerschnitten von neutralen Strömen (NC) gerechnet. Die Resultate übertragen sich im Prinzip auch auf geladene Ströme, man muss jedoch dabei berücksichtigen, dass es bei CC-Prozessen Übergänge zwischen verschiedenen Quarkfamilien geben kann. Derartige Übergänge werden durch die CKM-Matrix [30, 29] beschrieben,

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

Beim Übergang zur nächsten Ordnung Störungsrechnung muss auch diese Quark-Mischungsmatrix renormiert werden, was ein nichttriviales Unterfangen darstellt. Deshalb lohnt es sich, erst einmal abzuschätzen, welche Auswirkungen die Einbeziehung der CKM-Matrix überhaupt auf die Größe $\Delta_{CC}^{1l} = (\sigma_{CC}^{\mathrm{MSSM}^{1l}}(q) - \sigma_{CC}^{\mathrm{SM}^{1l}}(q))\frac{1}{k}$ hat. Die Wolfenstein-Parametrisierung [31] erlaubt es die verschiedenen Matrixeinträge in kompakter Weise zu behandeln. Danach nimmt die CKM-Matrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}\lambda^2 & \lambda & \lambda^3 A(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1-\frac{1}{2}\lambda^2 & A\lambda^2 \\ \lambda^3 A(1-\rho-i\eta) & -\lambda^2 A & 1 \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

an. Für die auftretenden Parameter gilt: $\lambda = V_{us} = 0.22$, $A \approx \frac{5}{4}$ und $\rho^2 + \eta^2 < 1$. Um die Effekte der CKM-Matrix auf die Größe Δ^{1l}_{CC} abzuschätzen, wird exemplarisch anhand des Streuprozesses $(\nu + d \to \mu + u)$ Δ^{1l}_{CC} für den Fall, dass die CKM-Matrix (V_{CKM}) gleich der Einheitsmatrix ist, und $\Delta^{1l'}_{CC}$ für den Fall der Ein-Schleifen renormierten CKM-Matrix amplitudenweise aufgeschrieben.

$V_{CKM} = id$ **:**

In diesem Fall muss die CKM-Matrix nicht renormiert werden und der Wirkungsquerschnitt des geladenen Stroms errechnet sich durch

$$\sigma^{1l}_{CC} = |\mathcal{M}_B + \mathcal{M}_l|^2 = \mathcal{M}_B^2 + 2\,\mathrm{Re}(\mathcal{M}_B^* \mathcal{M}_l) + \mathcal{O}(\alpha^4). \tag{4.22}$$

Ordnungen α^4 und höher in der Kopplung werden wie auch im vorangegangenen Kapitel bei einer konsistenten Ein-Schleifen-Rechnung vernachlässigt.

$V_{CKM} \neq id$ **:**

Hier muss die CKM-Matrix renormiert werden. Die Parameter der auf Ein-Schleifen-Niveau gültigen Wolfenstein-Parametrisierung werden mit einem „'" versehen. Es lässt sich zum Beispiel schreiben: $\lambda \to \lambda' = \lambda(1 + \Delta)$, wobei $\Delta < 1$ angenommen wird. Die anderen Parameter A und $(\rho - i\eta)$ sind von der Größenordnung eins oder kleiner und werden deshalb in der folgenden Entwicklung nicht weiter berücksichtigt. Die quadrierte Bornamplitude des Prozesses $(\nu + d \to \mu + u)$ ist

$$\begin{aligned} \sum_{q=u,c,t} \sigma_{\nu+d\to\mu+q} &\sim |\mathcal{M'}_{B\ du}|^2 + |\mathcal{M'}_{B\ dc}|^2 + |\mathcal{M'}_{B\ dt}|^2 \\ &\sim (1-\tfrac{1}{2}\lambda^2)^2|\mathcal{M}_B|^2 + \lambda^2|\mathcal{M}_B|^2 + \lambda^6|\mathcal{M}_B|^2. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Hier wird die Kennzeichnung, ob es sich um einen MSSM- oder einen SM-Prozess handelt, weggelassen, da die hier durchgeführte Näherung in beiden Modellen Gültigkeit hat. Die Ein-Schleifen-Amplituden unter Berücksichtigung der CKM-Matrix ergeben analog

$$\begin{aligned} \mathcal{M'}_{l\ du} &= (1-\tfrac{1}{2}\lambda^2)\mathcal{M}_l \\ \mathcal{M'}_{l\ dc} &= +\lambda'\mathcal{M}_l \\ \mathcal{M'}_{l\ dt} &= +\lambda'^3\mathcal{M}_l \end{aligned} \tag{4.24}$$

Daraus folgt die Korrektur zum Tree-Level-Ergebnis.

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathcal{M'}^*_B\mathcal{M'}_l) &= \mathrm{Re}(\mathcal{M'}^*_{B\,du}\mathcal{M'}_{l\,du} + \mathcal{M'}^*_{B\,dc}\mathcal{M'}_{l\,dc} + \mathcal{M'}^*_{B\,dt}\mathcal{M'}_{l\,dt}) \\ &= Re((1-\tfrac{1}{2}\lambda^2)(1-\tfrac{1}{2}\lambda'^2)\mathcal{M}^*_B\mathcal{M}_l + \lambda\lambda'\mathcal{M}^*_B\mathcal{M}_l + \lambda^3\lambda'^3\mathcal{M}^*_B\mathcal{M}_l)\end{aligned} \tag{4.25}$$

Nun will man erfahren, ob $\mathrm{Re}(\mathcal{M}_B\mathcal{M}_l) \approx \mathrm{Re}(\mathcal{M'}_B\mathcal{M'}_l)$ gilt. Dazu bildet man die Differenz, die sich mit den Gleichungen (4.25) und (4.22) zu

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathcal{M'}'_B\mathcal{M'}'_l) - \mathrm{Re}(\mathcal{M}_B\mathcal{M}_l) &= (-1+1+(-\tfrac{1}{2}\lambda'^2 - \tfrac{1}{2}\lambda^2 + \tfrac{1}{4}\lambda^2\lambda'^2 + \lambda^3\lambda'^3))\,\mathrm{Re}(\mathcal{M}_B\mathcal{M}_l) \\ &= \lambda^2(\tfrac{1}{2}(1+\Delta)^2 - \tfrac{1}{2} + (1+\Delta) + \tfrac{1}{4}\lambda'^2 + \lambda\lambda'^3)\,\mathrm{Re}(\mathcal{M}_B\mathcal{M}_l) \\ &= \lambda^2(-(1+\Delta) + (1+\Delta) - \Delta^2 + \tfrac{1}{4}\lambda'^2 + \lambda\lambda'^3)\,\mathrm{Re}(\mathcal{M}_B\mathcal{M}_l) \\ &= \lambda^2(-\Delta^2 + \tfrac{1}{4}\lambda'^2 + \lambda\lambda'^3)\,\mathrm{Re}(\mathcal{M}_B\mathcal{M}_l)\end{aligned} \tag{4.26}$$

ergibt. Wie schon bereits zuvor erwähnt, sollte $\Delta < 1$ sein. Betrachtet man nur die Größenordnungen, so kann man aus Gleichung (4.27)

$$\mathrm{Re}(\mathcal{M'}_B\mathcal{M'}_l) - \mathrm{Re}(\mathcal{M}_B\mathcal{M}_l) \;\leq\; \mathcal{O}(\lambda^2)\;(\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(\lambda))\;\; \mathrm{Re}(\mathcal{M}_B\mathcal{M}_l) \tag{4.27}$$

ablesen. Daraus lässt sich schließen, dass der Fehler in der Ein-Schleifen-Korrektur bei der $\nu + d \to \mu + u$ Reaktion, den man erhält, wenn man die CKM-Matrix mit der Einsmatrix gleichsetzt, mindestens um den Faktor λ^2 unterdrückt ist. Dasselbe Verfahren ist auch bei allen anderen auftretenden Teilprozessen mit geladenem Strom, die in Gleichung (4.4) aufgezählt sind, anwendbar. In all diesen Fällen stellt sich heraus, dass der Fehler, den man beim Vernachlässigen der CKM-Effekte bei den Ein-Schleifen-Korrekturen macht, um den Faktor λ^2 unterdrückt ist.
Nun kann auch auf Prozesse mit dem Austausch eines geladenen Stroms (σ_{CC}) die Diskussion aus Kapitel (4.3.2) auf die Gleichung

$$\begin{aligned}(\sigma_{CC}^{\mathrm{MSSM}^{1l}}(q) - \sigma_{CC}^{\mathrm{SM}^{1l}}(q)) \sim\; & 2\,\mathrm{Re}((\mathcal{M}_B^{\mathrm{SM}})^*\mathcal{M}_{\mathrm{SP}}^{\mathrm{MSSM}}) \\ & + 2\,\mathrm{Re}((\mathcal{M}_B^{\mathrm{SM}})^*\mathcal{M}_H^{\mathrm{MSSM}}) - 2\,\mathrm{Re}((\mathcal{M}_B^{\mathrm{SM}})^*\mathcal{M}_H^{\mathrm{SM}}) \\ & + \mathcal{O}(\Delta^4)\end{aligned} \tag{4.28}$$

angewandt werden. Analog zum Fall der neutralen Ströme (siehe Gleichung (4.19)) folgt.

$$\begin{aligned}\delta\sigma_{CC}^{\mathrm{SP}}(q) := & \textstyle\sum_{p,p'}\int \mathrm{d}\Omega\;\; (\sigma_{CC}^{\mathrm{MSSM}^{1l}}(q) - \sigma_{CC}^{\mathrm{SM}^{1l}}(q)) \\ = & \textstyle\sum_{p,p'}\int \mathrm{d}\Omega\;\; 2\;\mathrm{Re}((\mathcal{M}_B^{\mathrm{SM}})^*\mathcal{M}_{\mathrm{SP}}^{\mathrm{MSSM}}) \\ & + \text{vernachlässigbare Korrekturen}\end{aligned} \tag{4.29}$$

4.3.4 Isospinsymmetrie

Wie in Anhang A genauer erläutert, wird in dieser Arbeit unter der Annahme von Isospinsymmetrie gerechnet. Nimmt man nun an, dass das Target zu gleichen Teilen aus Neutronen und Protonen (f') besteht, also isoskalar ist, so erhält man folgende vereinfachende Relationen für die Partonverteilungsfunktionen (f) eines isoskalaren Targets, die hier bei der numerischen Berechnung verwendet wurden.

$$\begin{aligned} f_u(x,\mu_F) &= f_d(x,\mu_F) = \tfrac{1}{2}(f'_u(x,\mu_F) + f'_d(x,\mu_F)) \ , \\ f_{\bar{u}}(x,\mu_F) &= f_{\bar{d}}(x,\mu_F) = f'_{\bar{u}}(x,\mu_F) \ , \\ f_{\bar{s}}(x,\mu_F) &= f_s(x,\mu_F) = f'_s(x,\mu_F) \ , \\ f_{\bar{c}}(x,\mu_F) &= f_c(x,\mu_F) = f'_c(x,\mu_F) \ . \end{aligned} \tag{4.30}$$

4.3.5 MSSM-Beiträge zu R

Nun wird gezeigt, wie man aus den Resultaten (4.19), (4.29) im Zusammenspiel mit den Born-Amplituden für die Neutrinoprozesse die Korrektur des R-Verhältnisses errechnet. Zur Vereinfachung wurde die Renormierungsskala Q^2 von der die Partonverteilungsfunktionen aus der PDFLIB (Siehe Anhang A.1) ebenfalls abhängen, konstant auf 100 GeV^2 gewählt. Nach Gleichung (4.9) gilt

$$\begin{aligned} \delta R^{1l} &= R^{\mathrm{MSSM}^{1l}} - R^{\mathrm{SM}^{1l}} \\ &= \frac{\sum_q \int\int_0^1 \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}x \ \sigma_{NC}^{\mathrm{MSSM}^{1l}}(q) \ f_q(x)}{\sum_q \int\int_0^1 \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}x \ \sigma_{CC}^{\mathrm{MSSM}^{1l}}(q) \ f_q(x)} - \frac{\sum_q \int\int_0^1 \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}x \ \sigma_{NC}^{\mathrm{SM}^{1l}(q)} \ f_q(x)}{\sum_q \int\int_0^1 \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}x \ \sigma_{CC}^{\mathrm{SM}^{1l}}(q) \ f_q(x)} \ . \end{aligned} \tag{4.31}$$

Der linke der beiden Brüche in Gleichung (4.31) wird mit (4.19, 4.16)zu

$$\begin{aligned} \delta R^{1l} &= R^{\mathrm{MSSM}^{1l}} - R^{\mathrm{SM}^{1l}} \\ &= \frac{\sum_q \int\int_0^1 \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}x \ (\sigma_{NC}^{\mathrm{SM}^{1l}}(q) + \delta\sigma_{NC}^{\mathrm{SP}}(q)) \ f_q(x)}{\sum_q \int\int_0^1 \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}x \ (\sigma_{CC}^{\mathrm{SM}^{1l}}(q) + \delta\sigma_{CC}^{\mathrm{SP}}(q)) \ f_q(x)} - \frac{\sum_q \int\int_0^1 \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}x \ \sigma_{NC}^{\mathrm{SM}^{1l}(q)} \ f_q(x)}{\sum_q \int\int_0^1 \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}x \ \sigma_{CC}^{\mathrm{SM}^{1l}}(q) \ f_q(x)} \ . \end{aligned} \tag{4.32}$$

Um die Formel übersichtlicher zu gestalten, werden die Summation, die Faltung und die Phasenraumintegration bei jedem Faktor der Brüche aus Gleichung (4.32) einzeln ausgeführt und tauchen deshalb nach außen hin nicht mehr auf. Dies wird durch das Weglassen des Quark-Summationsindexes q ausgedrückt.

$$\delta R^{1l} \approx \frac{(\sigma_{NC}^{\mathrm{SM}^{1l}} + \delta\sigma_{NC}^{\mathrm{SP}})}{(\sigma_{CC}^{\mathrm{SM}^{1l}} + \delta\sigma_{CC}^{\mathrm{SP}})} - \frac{\sigma_{NC}^{\mathrm{SM}^{1l}}}{\sigma_{CC}^{\mathrm{SM}^{1l}}} \ . \tag{4.33}$$

Die ausintegrierten und summierten Ein-Schleifen-Standardmodell-Wirkungsquerschnitte $\sigma_{CC}^{\mathrm{SM}^{1l}}$ und $\sigma_{NC}^{\mathrm{SM}^{1l}}$ setzen sich jeweils wiederum aus einem Bornbeitrag $\sigma_{\mathcal{B}\,NC,CC}^{\mathrm{SM}}$ und aus einem Loopbeitrag $\sigma_{l\,NC,CC}^{\mathrm{SM}}$ zusammen.

$$\delta R^{1l} \approx \frac{(\sigma_{B\,NC}^{\mathrm{SM}}+\delta\sigma_{l\,NC}^{\mathrm{SM}}+\delta\sigma_{NC}^{\mathrm{SP}})}{(\sigma_{B\,CC}^{\mathrm{SM}^{1l}}+\delta\sigma_{l\,CC}^{\mathrm{SM}}+\delta\sigma_{CC}^{\mathrm{SP}})} - \frac{\sigma_{B\,NC}^{\mathrm{SM}^{1l}}+\delta\sigma_{l\,NC}^{\mathrm{SM}}}{\sigma_{B\,CC}^{\mathrm{SM}^{1l}}+\delta\sigma_{l\,CC}^{\mathrm{SM}}}\ . \tag{4.34}$$

Die numerischen Werte aller Faktoren in Gleichung (4.34), die ein δ tragen, sind verglichen mit den Born-Wirkungsquerschnitten je nach der betrachteten Gesamtenergie des Prozesses um den Faktor 10^{-2} bis 10^{-3} kleiner. Es bietet sich also an, eine Taylorentwicklung nach diesen Größen ($\delta\sigma_{l\,NC}^{\mathrm{SM}}$, $\delta\sigma_{l\,CC}^{\mathrm{SM}}$, $\delta\sigma_{l\,NC}^{\mathrm{SP}}$, $\delta\sigma_{l\,CC}^{\mathrm{SP}}$) zu machen.

$$\delta R^{1l} = \frac{1}{\sigma_{B\,CC}^{\mathrm{SM}}}\delta\sigma_{l\,NC}^{\mathrm{SP}} - \frac{\sigma_{B\,NC}^{\mathrm{SM}}}{(\sigma_{B\,CC}^{\mathrm{SM}})^2}\delta\sigma_{l\,CC}^{\mathrm{SP}} + \mathcal{O}(\delta^2)\ . \tag{4.35}$$

In erster Ordnung besteht keine Abhängigkeit von den Größen $\delta\sigma_{l\,NC}^{\mathrm{SM}}$ und $\delta\sigma_{l\,CC}^{\mathrm{SM}}$. Aus Gleichung (4.35) lässt sich aus den einzelnen renormierten Superpartner-Wirkungsquerschnitten zusammen mit den Bornwirkungsquerschnitten für verschiedene Szenarien (d.h. für verschiedene Punkte im MSSM-Parameterraum) δR näherungsweise berechnen.

4.3.6 Transformation ins Laborsystem

Wirkungsquerschnitte werden üblicherweise im Schwerpunktsystem (CM) berechnet, wohingegen Messungen im Laborsystem (Lab) stattfinden. Diese beiden Bezugsysteme sind im Fall des NuTeV-Experiments nicht identisch. Das Schwerpunktsystem zeichnet sich dadurch aus, dass die Summe der Dreierimpulse der einfallenden Teilchen gleich Null ist. Im Laborsystem befindet sich ein massives Teilchen (Target) in Ruhe und der einlaufende Reaktionspartner streut an diesem. Das Target stellt bei dem betrachteten Experiment ein ruhendes Nukleon (z.B. Proton) dar, auf das ein Myon-Neutrino mit dem Viererimpuls p_1^ν trifft.

Streuung an massivem ruhenden Quark

Nimmt man vereinfachend an, dass sich mit dem Nukleon auch das in ihm befindliche Quark im Laborsystem in Ruhe ist, so haben die Viererimpulse der Streuung

$$\nu(p_1) + q(p_2) \to \nu(k_1) + q(k_2) \tag{4.36}$$

im Laborsystem folgende Form:

$$\begin{aligned}
p_{1Lab} &= (E_{1\,Lab}, 0, 0, E_{1Lab}),\\
p_{2Lab} &= (E_{2Lab}, 0, 0, 0),\\
k_{1Lab} &= (E'_{1Lab}, 0, E'_{1Lab}\sin(\theta_{1Lab}), E'_{1Lab}\cos(\theta_{1Lab})),\\
k_{2Lab} &= (E'_{2Lab}, 0, E'_{2Lab}\sin(\theta_{2Lab}), E'_{2Lab}\cos(\theta_{2Lab})).
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Im Schwerpunktsystem nehmen diese Vierervektoren dann die Gestalt

$$
\begin{aligned}
p_{1\mathrm{CM}} &= (E_{1\,\mathrm{CM}}, 0, 0, E_{1\mathrm{CM}}),\\
p_{2\mathrm{CM}} &= (E_{2\mathrm{CM}}, 0, 0, -E_{1\mathrm{CM}}),\\
k_{1\mathrm{CM}} &= (E'_{1\mathrm{CM}}, 0, +E'_{1\mathrm{CM}}\sin(\theta_{\mathrm{CM}}), +E'_{1\mathrm{CM}}\cos(\theta_{\mathrm{CM}})),\\
k_{2\mathrm{CM}} &= (E'_{2\mathrm{CM}}, 0, -E'_{1\mathrm{CM}}\sin(\theta_{\mathrm{CM}}), -E'_{1\mathrm{CM}}\cos(\theta_{\mathrm{CM}})).
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

an. Die Vierervektoren in beiden Bezugssystemen müssen durch Lorentztransformation ineinander übergehen. Aus

$$
p^{\nu}_{1Lab} \;=\; \Lambda^{\nu}_{\;\mu}\, p^{\mu}_{1\mathrm{CM}} \tag{4.39}
$$

folgt mit der Einschränkung auf eigentlich-orthochrone Lorentztransformationen ($\det\Lambda = 1$ und $\Lambda^0_{\;0} > 0$) die Transformationsmatrix Λ. Kennt man diese Matrix, kann man unter anderem die Auswirkungen eines Bezugssystemwechels (CM $\rightarrow$ Lab) auf den jeweils beobachteten Streuwinkel berechnen. In Abbildung 4.1 ist zu erkennen, dass die beobachteten Streuwinkel im Laborsystem viel kleiner sind als die entsprechenden Winkel im CM-System, die die gerade Linie in Abbildung 4.1 darstellen. Diesen Effekt nennt man „Boost“. Eine ganz ähnliche Kurve ergibt sich, wenn man die Winkeltransformation für Streuprozesse mit geladenem Strom berechnet, da die Myonmasse so klein ist, dass sie kaum einen merklichen Effekt verursachen kann.

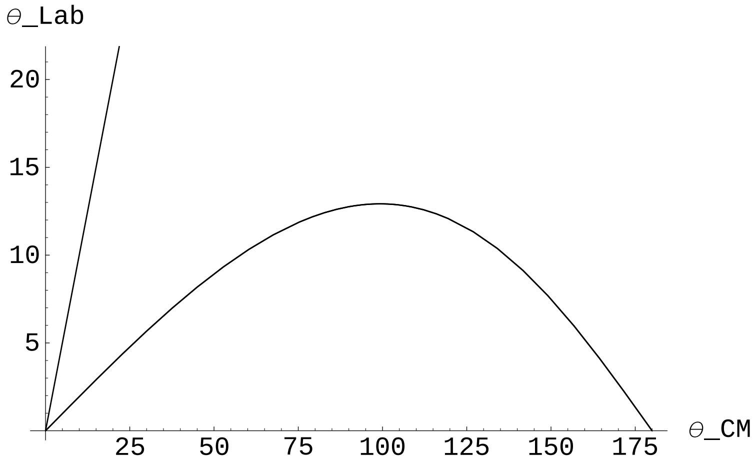


Abbildung 4.1: *Streuwinkel im Laborsystem in Abhängigkeit von dem Winkel im CM-System am Beispiel einer CM-Energie von 10GeV und einer Quarkmasse von 1GeV*

Der Graph kann die wirklichen Verhältnisse bei der Neutrino-Nukleon-Streuung nur grob widerspiegeln und sollte daher eher als Veranschaulichung des „Boosts“ in Vorwärtsrichtung dienen.

Streuung an ruhendem Proton

In Realität streut das Neutrino jedoch nicht an einem ruhenden Quark, sondern an einem ruhenden Proton. Die Quarks in dem Proton werden mit Hilfe des Partonmodells beschrieben und in diesem Modell tragen sie den Bruchteil x des Protonimpulses (definiert im CM-System der Neutrino–Proton-Streuung). Dieses Modell, das mit klassischen Verteilungsfunktionen arbeitet, liefert nur unter bestimmten Voraussetzungen physikalisch sinnvolle Vorhersagen. Es gilt zum Beispiel nur, wenn man die Quarkmassen auf Null setzt. Eine Quarkmasse mit dem Wert Null würde jedoch bedeuten, dass es kein Bezugssystem gibt, in dem das Quark ruht, wie im vorangegangenen Kapitel angenommen. Der Frage nach der Transformation von Streuwinkeln kann man aus dem Weg gehen, indem man im CM-System über den gesamten Winkelbereich integriert und somit die gesamte Streuwahrscheinlichkeit unabhängig vom Bezugssystem erhält. Dennoch bleibt die Frage, wie die Energie des einfallenden Neutrinos im Laborsystem mit der Schwerpunktsenergie des Neutrino-Quark-Prozesses im CM-Proton-Neutrino-System zusammenhängt. Auf Parton-Niveau sind die Viererimpulse des Prozesses (4.36) im CM-System

$$\begin{aligned} p_{1\mathrm{CM}} &= (E_{1\,\mathrm{CM}}, 0, 0, +E_{1\mathrm{CM}}), \\ p_{2\mathrm{CM}} &= (E_{1\mathrm{CM}}, 0, 0, -E_{1\mathrm{CM}}), \\ k_{1\mathrm{CM}} &= (E'_{1\mathrm{CM}}, 0, +E'_{1\mathrm{CM}}\sin(\theta_{\mathrm{CM}}), +E'_{1\mathrm{CM}}\cos(\theta_{\mathrm{CM}})), \\ k_{2\mathrm{CM}} &= (E'_{2\mathrm{CM}}, 0, -E'_{1\mathrm{CM}}\sin(\theta_{\mathrm{CM}}), -E'_{1\mathrm{CM}}\cos(\theta_{\mathrm{CM}})). \end{aligned} \tag{4.40}$$

Als Laborsystem hingegen wird nun das Bezugssystem, in dem der Dreierimpuls ($\vec{p}_{N\,\mathrm{Lab}}$) des gesamten Nukleons gleich Null ist, definiert.

$$P^{\mu}_{N\,\mathrm{Lab}} \;=\; (M_N, 0, 0, 0). \tag{4.41}$$

Die Viererimpulse $k_{1\,\mathrm{Lab}}$ und $k_{2\,\mathrm{Lab}}$ sollen wiederum aus den CM-Vektoren mittels der Lorentztransformation $\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ hervorgehen.

$$k^{\mu}_{1Lab} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu}\, k^{\nu}_{1CM},\ \ k^{\mu}_{2Lab} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu}\, k^{\nu}_{2CM} \tag{4.42}$$

Die Form der Lorentztransformation kann man nun aus zwei Bedingungen gewinnen. Einerseits soll gelten

$$P^{\mu}_{NCM} \;=\; (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\ \nu}\, P^{\nu}_{NLab} \;=\; (M_N\gamma, 0, 0, -M_N\gamma\beta), \tag{4.43}$$

andererseits ergibt sich $P^{\mu}_{N\,\mathrm{CM}}$ aus der Definition

$$\vec{p}_2 \;=\; x\vec{P}_{N\ \mathrm{CM}}. \tag{4.44}$$

Aus den Gleichungen (4.43), (4.44) folgt

$$p_2^\mu = xM_N\gamma\beta(1,0,0,-1). \tag{4.45}$$

Aus dem Vergleich der Gleichungen (4.40) und (4.45) ergibt sich

$$E_{1CM} = xM_N\gamma\beta. \tag{4.46}$$

Dieselbe invertierte Lorentztransformation legt $p_1^\mu = E_{1Lab}\gamma(1-\beta)(1,0,0,1)$ fest und somit gilt

$$E_{1CM} = E_{1Lab}\gamma(1-\beta). \tag{4.47}$$

Setzt man nun Gleichung (4.47) in Gleichung (4.46) ein und löst nach β auf, so kennt man wiederum nach Festlegung auf eigentlich-orthochrone Lorentztransformationen die Koeffizienten der Transformationsmatrix.

$$\beta \;=\; \frac{E_{1Lab}}{E_{1Lab+xM_N}}, \;\; \gamma \;=\; \frac{E_{1Lab}+xM_N}{\sqrt{xM_N(E_{1Lab}+xM_N)}}. \tag{4.48}$$

Nun da γ und β bekannt sind, kann man mit Gleichung (4.45) die Schwerpunktsenergie $\hat{s}$ des Neutrino–Parton-Systems in Abhängigkeit von den Größen x, M_N und E_{1Lab} angeben.

$$\hat{s} = (p_1^\mu + p_2^\mu)^2 = \frac{4xM_N E_{1Lab}^2}{2E_{1Lab}+xM_N}. \tag{4.49}$$

Das Partonmodell hat seine Gültigkeit in dem Limes $M_N \ll E_{1Lab}$. In diesem Limes (d.h. wenn $M_N \to 0$) wird mit $\gamma \to \infty$ die Lorentztransformationsmatrix divergent. Dieses Verhalten ist eine Schwäche des Partonmodells. Dennoch erhält man, wenn man die Gleichung (4.49) nach kleinen M_N entwickelt, eine Größenordnungsabschätzung für $\hat{s}$.

$$\hat{s} \;\equiv\; x\,S \;=\; x\,2M_N E_{1Lab}. \tag{4.50}$$

Einschränkung der detektierten Energie

Bei dem NuTeV Experiment wurde nicht jedes detektierte Ereigniss für die Datenanalyse verwendet. Unter anderem wurde gefordert, dass die im Detektor deponierte Energie ($E_{\mathrm{D}Lab}$) sich in einem bestimmten Bereich (20 GeV $< E_{\mathrm{D}Lab} <$ 180 GeV) bewegen muss. Da das im Fall einer NC-Streuung auslaufende Neutrino keine weitere Energie im Detektor deponiert, kann $E_{\mathrm{D}Lab}$ mit $E'_{2\mathrm{CM}}$ aus Gleichung (4.38) identifiziert werden. Im Fall einer CC-Streuung kann die Spur des auslaufenden Leptons anhand seiner Lange identifiziert werden und somit ist die gesamte deponierte Energie von der vom auslaufenden Quark deponierten Energie ($E_{\mathrm{D}Lab}$) unterscheidbar. Auch für den CC-Fall werden die Grenzen (20GeV $< E_{\mathrm{D}Lab} <$ 180GeV) angelegt. ($E_{\mathrm{D}Lab}$) erhält man aus $E'_{2\mathrm{CM}}$ mit Hilfe einer Lorenztransformation.

$$E_{\mathrm{D}Lab} = E'_{2\mathrm{Lab}} = \Lambda_0^{\mu}\, k_{2CM}^{\mu} = \gamma E'_{2\mathrm{CM}} - \gamma\beta E'_{1\mathrm{CM}} \cos\theta_{\mathrm{CM}} \tag{4.51}$$

Aus der Annahme, dass neben dem auslaufenden Neutrino, auch das auslaufende Quark über keine Ruhemasse verfügt, ergibt sich für die invariante Schwerpunktsenergie $\hat{s}$

$$\hat{s} = (k_{1\,\mathrm{CM}} + k_{2\,\mathrm{CM}})^2 = 4E'^{2}_{1\,\mathrm{CM}}\ . \tag{4.52}$$

Da bei masselosen Quarks $E'_{1\,\mathrm{CM}} = E'_{2\mathrm{CM}}$ gilt, erhält man nachdem man die Gleichungen (4.52) und (4.49) in (4.51) einsetzt,

$$E_{\mathrm{D}Lab} = \frac{1}{2}\frac{(E_{1\,Lab} + xM_N)\sqrt{4E^2_{1\,Lab}}}{2E_{1\,Lab} + xM_N}(1 - \frac{E_{1\,Lab}}{E_{1\,Lab} + xM_N}\cos(\theta_{\mathrm{CM}}))\ . \tag{4.53}$$

Im Limes von $M_N \to 0$ vereinfacht sich diese Relation, die θ_{CM} und $E_{\mathrm{D}Lab}$ zueinander in Bezug setzt, zu

$$\cos\theta_{\mathrm{CM}} = (1 - 2\frac{E_{\mathrm{D}Lab}}{E_{1\,Lab}}). \tag{4.54}$$

Dieser Zusammenhang zwischen θ_{CM} und $E_{\mathrm{D}Lab}$ ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Man erkennt, dass nur dann die gesamte Neutrinoenergie deponiert werden kann, wenn das Neutrino rückwärts gestreut wird. Ebenso einleuchtend ist, dass, wenn keinerlei Energie deponiert wurde, der Streuwinkel des Neutrinos Null sein muss. Dieser Zusammenhang ermöglicht es, Einschränkungen, die an die deponierte Energie gemacht wurden, dadurch zu berücksichtigen, dass man bei der Rechnungen den Streuwinkel des Leptons eingrenzt. In Abbildung 4.3 ist für eine vorgegebene untere (20 GeV) und obere (180 GeV) Grenze von $E_{\mathrm{D}Lab}$ der erlaubte Winkelbereich im Schwerpunktsystem in Abhängigkeit von der Energie des einlaufenden Neutrinos dargestellt.

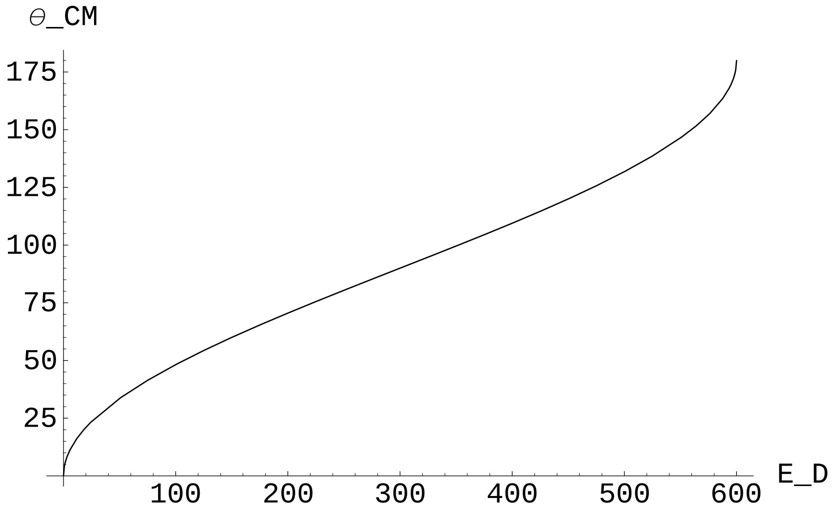


Abbildung 4.2: *Abhängigkeit des Neutrino-Streuwinkels in Abhängigkeit von der deponierten Energie E_D* bei einer Energie des einlaufenden Neutrinos von 600 GeV.

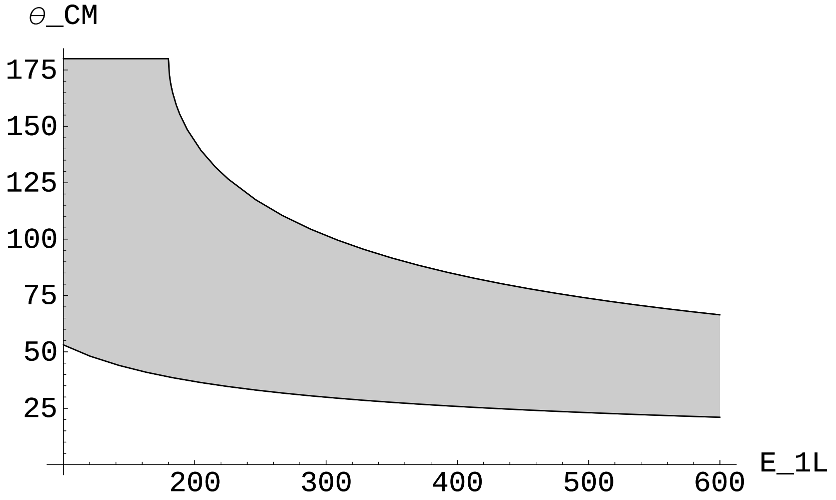


Abbildung 4.3:
Abhängigkeit des erlaubten Neutrino-Streuwinkel-Bereichs ($20\ GeV < E_{DLab} < 180\ GeV$*) von der Energie des einlaufenden Neutrinos*

4.4 Das R-Verhältnis aus Antineutrinostreuung

Neben der Größe R wurde bei dem NuTeV Experiment auch $\bar{R}$ gemessen. Analog zu R ist auch $\bar{R}$ ein Verhältnis von NC- zu CC-Streuwahrscheinlichkeiten, allerdings für Antineutrinoprozesse. Hat man die partonischen Wirkungsquerschnitte $\sigma_{::}^{::}(p)$ für Neutrino-

Partonstreuung erst einmal berechnet, bekommt man die entsprechenden partonischen Wirkungsquerschnitte $\bar{\sigma}_{\ddot{}\ddot{}}(p)$ für Antineutrino-Antipartonstreuung ohne zusätzlichen Rechenaufwand dazu. Die Wirkungsquerschnitte bleiben in diesem Fall unverändert wenn man jedes äußere Teilchen durch sein Antiteilchen ersetzt.

4.5 Paschos–Wolfenstein-Relation

Um die die Effekte der Unsicherheiten, die aus der Charmproduktion resultieren, zu vermindern haben *Paschos* und *Wolfenstein* vorgeschlagen [16] die Größe R^- zu untersuchen.

$$\begin{aligned} R^- &\equiv \frac{\sigma(\nu_\mu N \to \nu_\mu X) - \sigma(\bar{\nu}_\mu N \to \bar{\nu}_\mu X)}{\sigma(\nu_\mu N \to \mu_\mu^- X - \sigma(\bar{\nu}_\mu N \to \bar{\mu}_\mu^- X)} \\ &\approx \frac{R^\nu - rR^{\bar{\nu}}}{1-r} = (g_L^2 - g_R^2) \quad . \end{aligned} \tag{4.55}$$

Der Parameter r wurde ebenso wie g_L und g_R in Kapitel 2.5 definiert (siehe Gleichungen (2.15), (2.16, (2.17). Da die Wirkungsquerschnitte der Prozesse $(\nu_\mu + (s,c) \to \nu_\mu + (s,c))$ gleich den $(\bar{\nu}_\mu + (\bar{s},\bar{c}) \to \bar{\nu}_\mu + (\bar{s},\bar{c}))$ Wirkungsquerschnitten sind, und da darüberhinaus die s- c-Quarkverteilung identisch mit der $\bar{s}$- $\bar{c}$-Quarkverteilung ist, kürzen sich sämtliche Effekte der beiden schwereren Quarks. Da die Verteilungsfunktionen dieser beiden Quarks nicht so exakt bestimmt sind wie die der leichteren Quarks, erhöht das Konzept von *Paschos* und *Wolfenstein* die Vorhersagekraft durch die Berechnung der Größe R^-. Leider ist R^- von der experimentellen Seite her schlechter zugänglich als R^ν. Dies liegt vor allem daran, dass die beobachtbaren Endzustände der NC-Reaktion bei ν-Streuung ununterscheidbar von den Endzuständen der $\bar{\nu}$-Streuung sind. Um eine Unterscheidung treffen zu können, müsste man also den Zustand des jeweils einlaufenden Neutrinos kennen. Sehr reine ν- bzw. $\bar{\nu}$-Strahlen konnten am Tevatron durch den Zerfall von Pionen und Kaonen erzeugt werden, die wiederum aus 800-GeV-Protonen entstanden, die auf ein Beryllium-Oxid-Target gestrahlt wurden.

4.6 Praktische Durchführung der Rechnung

4.6.1 Feynmandiagramme

Zur numerischen Berechnung von Gleichung (4.35) wurden mit Hilfe von *FeynArts 3.1* [34] die in (4.35) relevanten Feynmandiagramme aus den für das MSSM [26] gültigen Feynmanregeln erstellt. Im Anhang D sind die in Tabelle 4.1 erwähnten Diagramme explizit aufgeführt.

Die Amplituden, die sich aus diesen Diagrammen ergeben, wurden mit Hilfe des von *FormCalc 3.0* [35] erzeugten Fortrancodes numerisch auf ihre UV-Endlichkeit überprüft. Hierzu wurden die Parameter, μ und Δ (siehe Anhang C), welche die Unendlichkeiten in

- Born-Diagramme für	ν_μ-NC-Streuung an	u-, d-, s-, c-, $\bar{u}$-, $\bar{d}$-, $\bar{s}$-, $\bar{c}$-Quarks,
- Born-Diagramme für	ν_μ-CC-Streuung an	d-, c-, $\bar{u}$-, $\bar{s}$-Quarks,
- Ein-Schleifen-Diagramme für	ν_μ-NC-Streuung an	u-, d-, s-, c-, $\bar{u}$-, $\bar{d}$-, $\bar{s}$-, $\bar{c}$-Quarks,
- Ein-Schleifen-Diagramme für	ν_μ-CC-Streuung an	d-, c-, $\bar{u}$-, $\bar{s}$-Quarks,
- Counterterm-Diagramme	für sämtliche Ein-Schleifen-Prozesse.	

Tabelle 4.1: Die bei der Berechnung des R-Verhältnisses vorkommenden Feynmangraphen

den Ein-Schleifen-Integralen regularisieren, in einem großen Wertebereich variiert. Da die Streuamplitude von diesen Parametern unabhängig sein muss, darf sich das Ergebnis im Rahmen der numerischen Genauigkeit nicht ändern. Dieser Test war erfolgreich.

4.6.2 Faltung und Summation der Teilprozesse

Um bei festgelegter Gesamtenergie und festgelegtem Streuwinkel im CM-System die MSSM-Effekte auf das R- ($\bar{R}$)-Verhältnis für eine bestimmte Einstellung im MSSM-Parameterraum zu berechnen, wurde ein Fortran-Programm geschrieben. Dieses Programm ruft jeweils ein von *FormCalc 3.0* erstelltes Unterprogramm auf und faltet die Wirkungsquerschnitte der partonischen Prozesse mit den entsprechenden Partonverteilungsfunktionen aus [15]. Neben der Integration, die aufgrund der Faltung nach der Summation über die Teilprozesse ausgeführt wird, kann auch noch über den Streuwinkel im CM-System integriert werden. Als Ausgabewerte liefert dieses Programm die in Gleichung (4.35) vorkommenden Größen sowohl für die Neutrino- als auch für die Antineutrino–Nukleon-Streuung.

4.6.3 Fehlerfortpflanzung

Bei der Berechung der expliziten Werte für $\delta^{\mathrm{SP}}_{l\,CC}$, $\delta^{\mathrm{SP}}_{l\,NC}$, $\delta^{\mathrm{SM}}_{B\,CC}$ und $\delta^{\mathrm{SM}}_{B\,NC}$ ergeben sich Unsicherheiten, die sich auf δR^{1l} fortsetzen. Ursachen für diese Unsicherheiten, sind die Unsicherheiten in den verwendeten Parametern des Modells, Unsicherheiten die aus der Partonverteilungsfunktion kommen und eine Unbestimmtheit, von der Integration herrührt. Im Gegensatz zu den anderen Unsicherheiten, läßt sich der Bestimmtheitsgrad der Integration gut abschätzen und kann von der Integrationsroutine ausgegeben werden. Wenn man das Maß der Ungenauigkeit der einzelnen Teilergebnisse kennt, kann man unter der Annahme, dass die einzelnen Fehler unkorreliert sind, den daraus resultierenden Gesamtfehler $U\left[\delta R^{1l}\right]$ von δR^{1l} angeben.

$$\begin{aligned} U\left[\delta R^{1l}\right]^2 = & \left(\frac{\partial \delta R^{1l}}{\partial \sigma^t_{CC}}\right)^2 U\left[\sigma^t_{CC}\right]^2 + \left(\frac{\partial \delta R^{1l}}{\partial \sigma^t_{NC}}\right)^2 U\left[\sigma^t_{NC}\right]^2 \\ & + \left(\frac{\partial \delta R^{1l}}{\partial \sigma^{\mathrm{SP}}_{CC}}\right)^2 U\left[\sigma^{\mathrm{SP}}_{CC}\right]^2 + \left(\frac{\partial \delta R^{1l}}{\partial \sigma^{\mathrm{SP}}_{NC}}\right)^2 U\left[\sigma^{\mathrm{SP}}_{NC}\right]^2 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Die relative Unsicherheit ist über $\bar{U}(\sigma^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}) = \frac{U[\sigma^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}]}{\sigma^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}}$ definiert. Da die Integration über die Partonfunktionen und den Raumwinkel für die einzelnen Beiträge zu δR^{1l} einen ähnlich großen rechnerischen Aufwand erfordert, kann man die Integrationsroutine so einstellen, dass sie für jeden Beitrag $\sigma^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}$ oder $\delta\sigma^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}$ die selbe relative Ungenauigkeit $\bar{U}(..\sigma^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}) = \left[\bar{U}\right]$ liefert. Nach dem Ausführen der einzelnen partiellen Ableitungen ergibt sich aus Gleichung (4.56) die gesamte Unsicherheit die aus der Numerik folgt zu

$$U\left[\delta R^{1l}\right]^2 = \left[\bar{U}\right]^2 \left(6\left(\frac{\sigma^t_{NC}}{\sigma^{t\,2}_{CC}}\delta\sigma^{\mathrm{SP}}_{CC}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\sigma^t_{CC}}\delta\sigma^{\mathrm{SP}}_{NC}\right)^2 - 4\left(\frac{\sigma^t_{NC}}{\sigma^{t\,3}_{CC}}\delta\sigma^{\mathrm{SP}}_{CC}\,\delta\sigma^{\mathrm{SP}}_{NC}\right)\right) . \tag{4.57}$$

Die Unsicherheiten U sind in Abhängigkeit von der Standard-Abweichung (Sigma), der gewöhnlichen Fehlerrechnung angegeben. Es wurde jedoch vermieden hierfür das Symbol σ zu verwenden, da es bereits zur Bezeichnung von Wirkunsquerschnitten dient.

Kapitel 5

Ergebnisse und Diskussion

Das NuTev-Experiment [4] findet eine Abweichung von der Standardmodell-Vorhersage $R^{\mathrm{SM}}_{\nu(\bar{\nu})}$ bei der Messung des R-Verhältnisses $R^{\mathrm{exp}}_{\nu(\bar{\nu})}$:

$$\delta R_{\nu(\bar{\nu})} \;=\; R^{\mathrm{exp}}_{\nu(\bar{\nu})} - R^{\mathrm{SM}}_{\nu(\bar{\nu})}. \tag{5.1}$$

Die Größe dieser Abweichung $\delta R_{\nu(\bar{\nu})}$ beträgt

$$\delta R_{\nu} = \; -0.0033 \pm 0.0007, \quad \delta R_{\bar{\nu}} = \; -0.0019 \pm 0.0016 \;\; . \tag{5.2}$$

Durch das im Zuge dieser Arbeit erstellte Programm besteht prinzipiell die Möglichkeit die Korrekturen zu $\delta R_{\nu(\bar{\nu})}$ für jeden beliebigen erlaubten MSSM-Parametersatz zu berechnen und mit der gemessenen Korrektur (5.2) zu vergleichen. Im Folgenden wird untersucht welche Auswirkung die Variation verschiedener MSSM-Parameter auf $\delta R^{1l}_{\nu(\bar{\nu})}$ aus Gleichung (4.35) hat. Dazu wird für verschiedene MSSM-Parameter-Szenarien jeweils ein Parameter variiert. Von Interesse sind dabei Bereiche im Parameterraum, bei denen die Variation eines Parameters deutliche Auswirkungen auf die Größe $\delta R^{1l}_{\nu(\bar{\nu})}$ hat. Bei den Rechnungen wurden die für das NuTeV Experiment relevanten kinematischen Schnitte an die Streuwinkel im CM-System, die im Kapitel 4.3.6 hergeleitet wurden, berücksichtigt. Die Energie des einlaufenden Neutrinos im Laborsystem wurde auf 600 GeV gesetzt, woraus sich mit der Formel (4.50) die invariante Energie des Neutrino-Partonsystems ergibt. Die Renormierungs-Skala die in die Parton-Verteilungsfunktionen [14] eingeht, wurde bei den folgenden Berechnungen konstant auf $Q^2 = 100$ GeV^2 gewählt.

5.1 Sfermion-Effekte

5.1.1 Keine Sfermion-Mischung

Zunächst soll untersucht werden, welche Effekte eine Variation der Massenskala der ersten und zweiten Generation der Sleptonen ($M_{\hat{L}\,1,1}$) und der ersten Generation der Squarks bewirkt. In Anlehnung an eine Untersuchung aus [33] wurden die Parameter des MSSM (siehe Kapitel B) auf die in Tabelle 5.1 zusammengestellen Werte gesetzt.

Parameter:	Wert:
$\tan\beta$	10
$\mathrm{Re}(\mu)$	200
$\mathrm{Im}(\mu)$	0
$A_u = \mu^* \cot\beta$	20
$A_d = \mu^* \tan\beta$	2000
$M_2 = 2M_1$	200 GeV
M_g	200 GeV
M_{A0}	100 GeV
$M_{\tilde{Q}\,2,\,3} = M_{\tilde{U}\,2,\,3}$	1000 GeV
$M_{\tilde{L}\,3} = M_{\tilde{E}\,3}$	1000 GeV
$M_{\tilde{Q}\,1} = M_{\tilde{U}\,1}$	200 ... 1000 GeV
$M_{\tilde{L}\,1,\,2} = M_{\tilde{E}\,1,\,2}$	200 ... 1000 GeV

Tabelle 5.1: *Parameter im MSSM.*
Die tiefgestellten Ziffern bei den Squark- und Slepton-Massenparametern stehen jeweils für die erste, zweite oder dritte Generation.

Die Punkte in Tabelle 5.1 deuten an, dass diese Parameter in dem angegebenen Bereich variiert wurden. Bei der Untersuchung wurde zusätzlich $M_{\tilde{L}\,1,2} = M_{\tilde{E}\,1,2} = M_{\tilde{U}\,1} = M_{\tilde{Q}\,1}$ und $M_{\tilde{L}\,3} = M_{\tilde{E}\,3} = M_{\tilde{U}\,2,3} = M_{\tilde{Q}\,2,3}$ gesetzt. Durch die Wahl von A_u und A_d wird die Sfermion-Mischungsmatrix aus Gleichung (3.8) diagonal. In Abbildung 5.1 (bzw. in 5.2) ist die Evolution der Beiträge

$$\delta R^{\mathrm{NC}}_{\nu(\bar{\nu})} := \frac{1}{\sigma^{SM}_{B\ CC\ \nu(\bar{\nu})}} \delta\sigma^{SP}_{l\ NC\ \nu(\bar{\nu})} \quad \text{und} \quad \delta R^{\mathrm{CC}}_{\nu(\bar{\nu})} := \frac{\sigma^{SM}_{B\ NC\ \nu(\bar{\nu})}}{(\sigma^{SM}_{B\ CC\ \nu(\bar{\nu})})^2} \delta\sigma^{SP}_{l\ CC\ \nu(\bar{\nu})}$$

zu δR^{1l}_{ν} (bzw. zu $\delta R^{1l}_{\bar{\nu}}$) dargestellt.

Zieht man die untere Kurve in Figur 5.1 (bzw. 5.2) von der oberen Kurve ab, so erhält man die Änderung von $\delta R^{1l}_{\nu(\bar{\nu})}$ die sich aus den Beiträgen des neutralen und des geladenen Stroms ergibt. Die Verhalten von $\delta R^{1l}_{\nu(\bar{\nu})}$, bei Änderung von $M_{\tilde{Q}\,1} = M_{\tilde{U}\,1} = M_{\tilde{L}\,1,\,2} = M_{\tilde{E}\,1,\,2}$ ist in Abbildung 5.3 dargestellt.

Die beiden Kurven in Abbildung 5.3 fallen zunächst mit $M_{\tilde{L}1,2\ \tilde{Q}1}$ ebenso wie die in sie eingehenden Beiträge stark ab, doch dann steigen sie wieder leicht an, da die beiden abnehmenden Kurven aus Abbildung 5.2 und 5.1 leicht auseinanderlaufen. Das Vorzeichen der Korrekturen $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$ ist dem aus Gleichung (5.2) entgegengesetzt und auch ihr Betrag ist um über eine Größenordnung geringer. Vergleicht man die Kurven aus Abbildung 5.3 mit den entsprechenden Kurven aus [33] so stellt man fest, dass die Werte aus Abbildung 5.3 um einen Faktor vier bis acht kleiner sind als in [33]. Da jedoch in [33] nur der Grenzfall Impulsübertrag $q^2 \to 0$, der von den kinematischen Schnitten des Experiments ausgeschlossen ist (siehe Kapitel 4.3.6), betrachtet wurde und keine Faltung mit Partonverteilungsfunk-

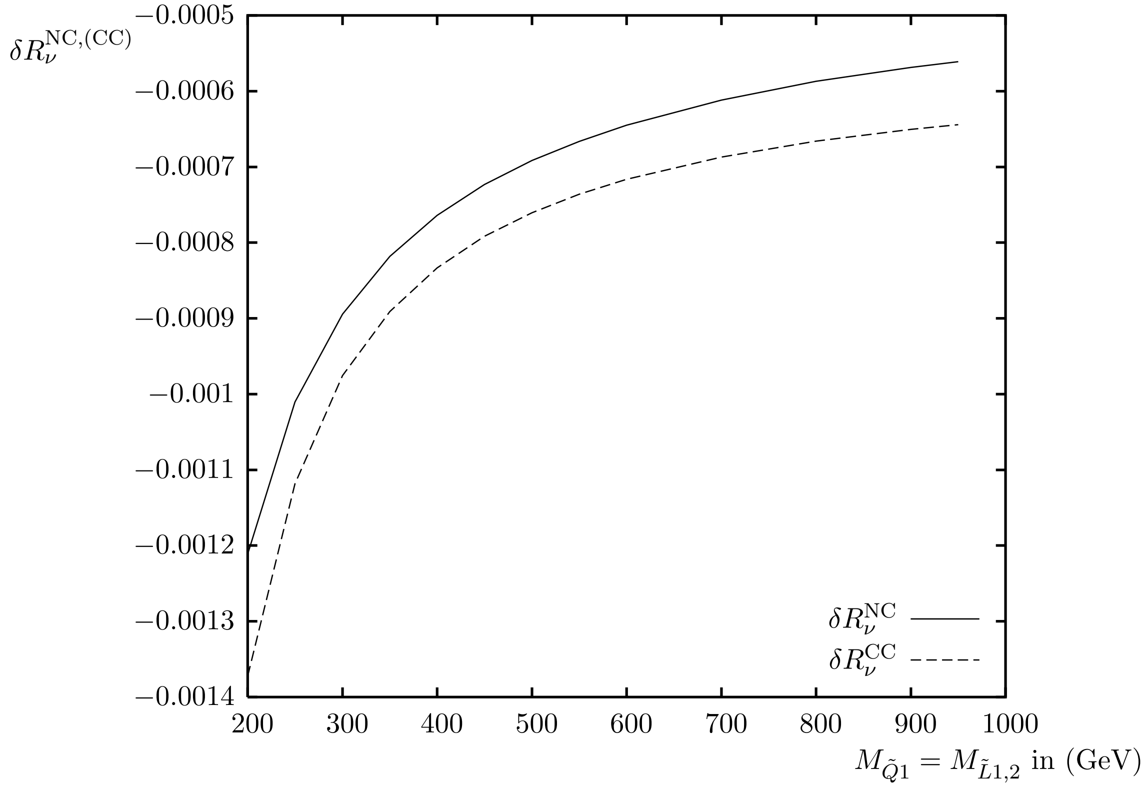


Abbildung 5.1: *NC-(obere Kurve) und CC-Beitrag (untere Kurve) zu δR_ν^{1l} in Abhängigkeit von den Squark- und Slepton-Massenparametern aus Tabelle 5.1.*

tionen ausgeführt wurde, kann auch nicht mehr als eine qualitative Übereinstimmung der Ergebnisse erwartet werden.

Als nächstes soll untersucht werden, wie das Verhalten von $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$ ist, wenn man bei den Massen-Parametern $M_{\tilde{L}_i} = M_{\tilde{Q}_i} =: M_{\tilde{Q}}$ für $(i = 1, 2, 3)$ nicht zwischen den verschiedenen Generationen unterscheidet. Abbildung 5.4 zeigt das Verhalten von $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$ bei Variation aller Sfermion-Massen-Parameter.

Die beiden Kurven in Abbildung 5.4 fallen zwar im Gegensatz zu denen in Abbildung 5.3 kontinuierlich ab, dafür starten sie aber bei einem wesentlich größeren Wert.

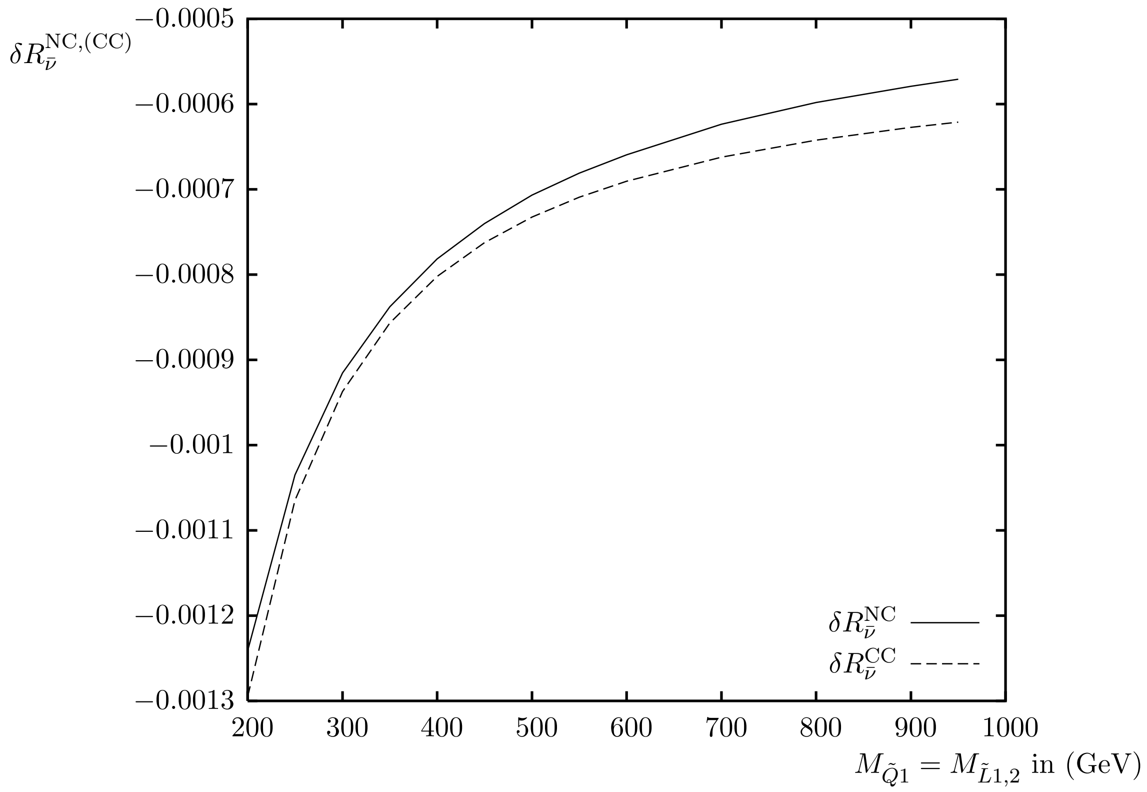


Abbildung 5.2: *NC-(obere Kurve) und CC-Beitrag (untere Kurve) zu* $\delta R_{\bar{\nu}}^{1l}$ *in Abhängigkeit von den Squark- und Slepton-Massenparametern aus Tabelle 5.1.*

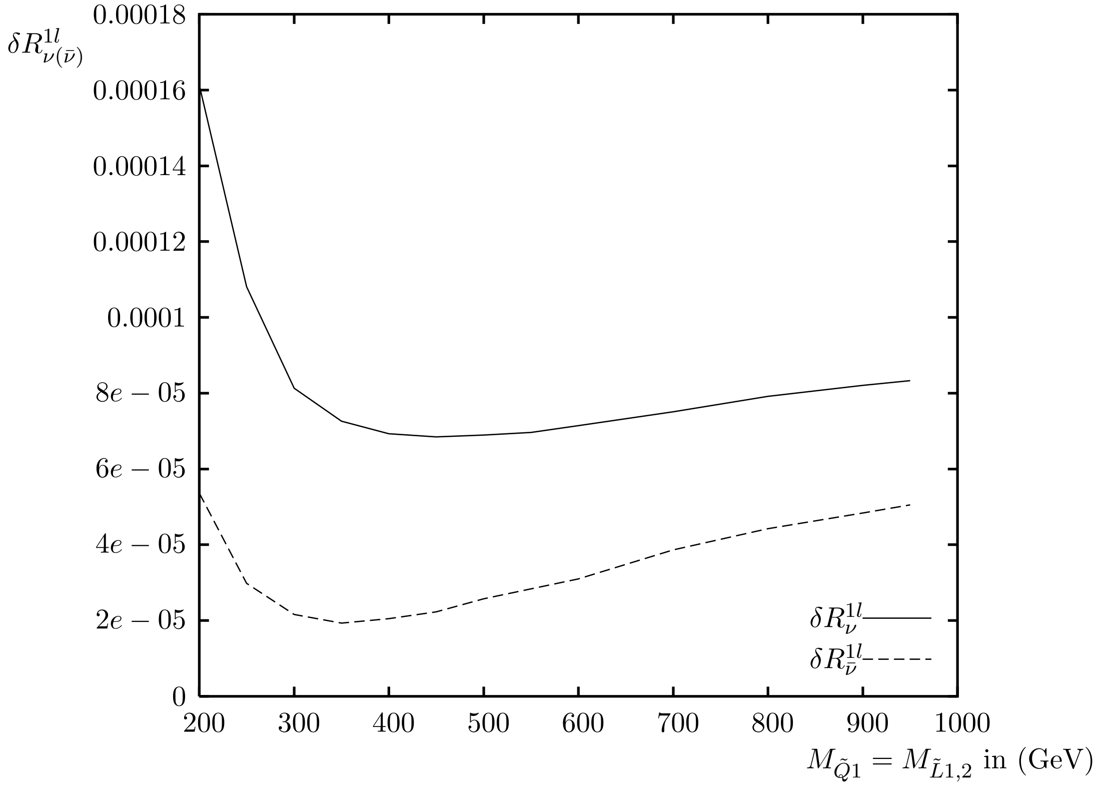


Abbildung 5.3: *Änderung von* $\delta R^{1l}_{\nu(\bar{\nu})}$ *bei einer Variation von* $M_{\tilde{Q}1} = M_{\tilde{L}1,2}$.

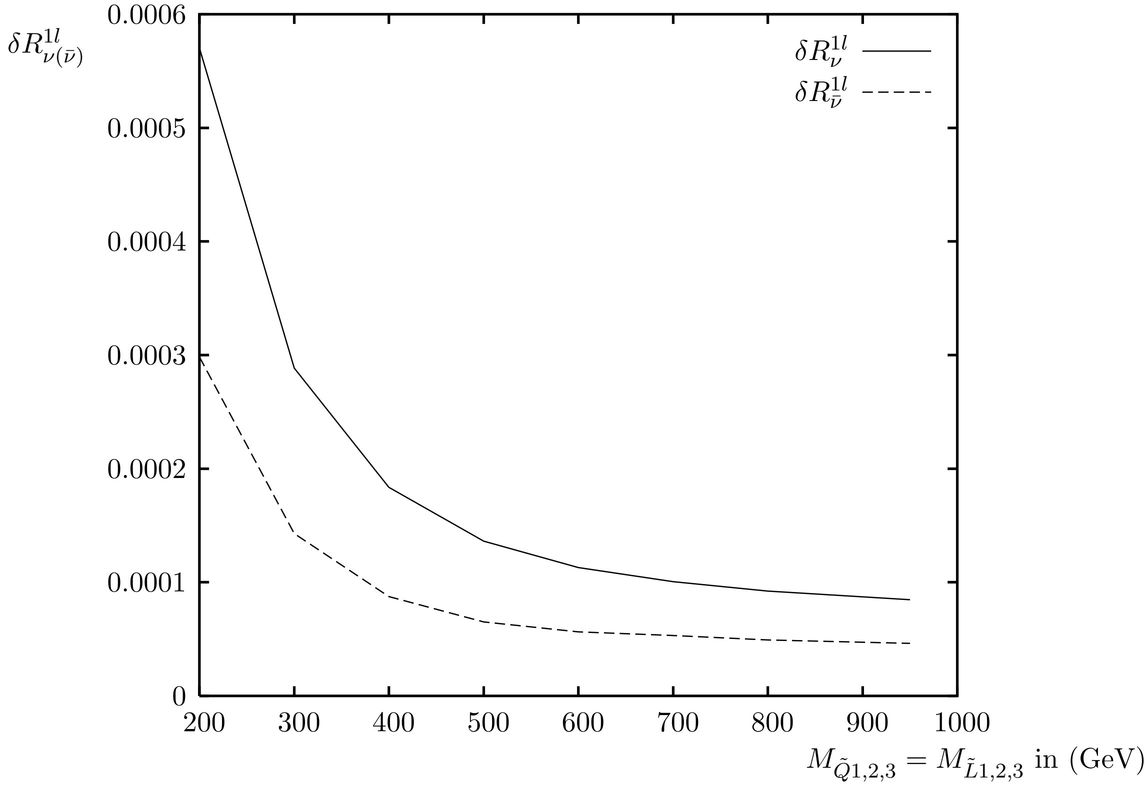


Abbildung 5.4: *Änderung von* $\delta R^{1l}_{\nu(\bar{\nu})}$ *bei einer Variation von* $M_{\tilde{Q}1,2,3} = M_{\tilde{L}1,2,3}$.

5.1.2 Starke Sfermion-Mischung

In diesem Unterkapitel soll untersucht werden, wie sich eine MSSM-Parameter-Konfiguration, die starke Sfermion-Mischung bedingt, auf $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar\nu)}$ auswirkt. In Abbildung 5.5 wurde

$$A_u = \frac{\mu}{\tan\beta} + 2M_{\tilde Q} \quad \text{und} \quad A_d = \mu \tan\beta + 2M_{\tilde Q}$$

mit $M_{\tilde L_i} = M_{\tilde Q_i} = M_{\tilde E_i} = M_{\tilde U_i} \equiv M_{\tilde Q} \equiv M_{\tilde L}$ gewählt. Die übrigen MSSM-Parameter sind identisch mit denen aus Abbildung 5.4. Bei dieser Parameterwahl wird $M^{LR}_{\tilde q}$ im nichtdiagonalen Anteil der Squark-Mischungsmatrix aus Gleichung (3.8) zu $M^{LR}_{\tilde q} = 2M_{\tilde Q}$. Zum Vergleich wurde das Ergebnis mit den Kurven aus Abbildung 5.4 unterlegt.

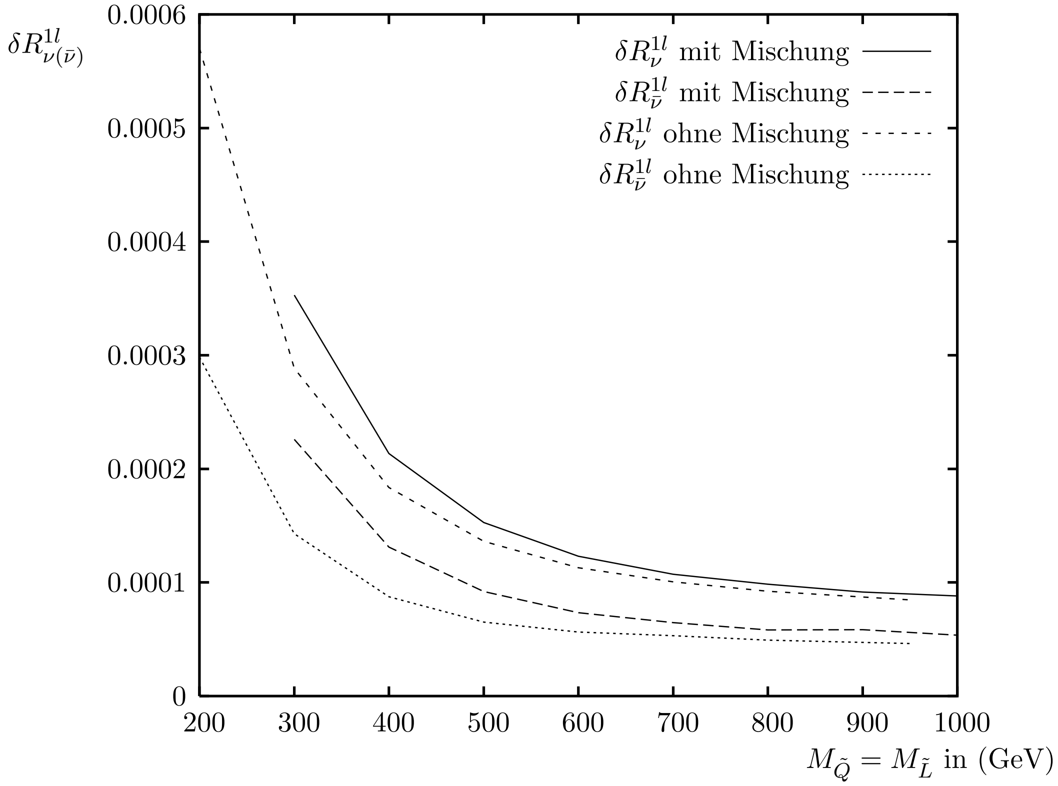


Abbildung 5.5: *Veränderung von $\delta R^{1l}_{\nu(\bar\nu)}$ unter der Variation der Sfermion-Massenparameter $M_{\tilde L_i} = M_{\tilde Q_i} = M_{\tilde E_i} = M_{\tilde U_i} \equiv M_{\tilde Q} \equiv M_{\tilde L}$ bei starker Sfermion-Mischung.*

Aus Abbildung 5.5 ist ersichtlich, dass eine starke Mischung unter den Sfermionen innerhalb einer Generation bei festem $M_{\tilde L_i} = M_{\tilde Q_i} = M_{\tilde E_i} = M_{\tilde U_i}$ ein größeres $\delta R^{1l}_{\nu(\bar\nu)}$ zur Folge hat. Für MSSM-Teilchenmassen gelten Ausschlussgrenzen, die meist aus der Beobachtung abgeleitet werden, dass bei den bisherigen Beschleuniger-Energien keine supersymmetrischen Teilchen gefunden wurden. Die Kurven mit Sfermion-Mischung in Abbildung 5.5

brechen bei $M_{\tilde{L}_i} = M_{\tilde{Q}_i} = M_{\tilde{E}_i} = M_{\tilde{U}_i} < 300$ GeV ab, da dann die Masse des leichten Top-Squarks eine solche Ausschlussgrenze nach unten durchschreitet.

5.2 Chargino-, Neutralino-, $\tan\beta$- und μ-Effekte

5.2.1 Chargino- und Neutralino-Effekte

Ausgehend von den Abbildungen 5.3, 5.1 und 5.2 werden für eine Variation von M_1 und $\tan\beta$, $M_{\tilde{L}1,2} = M_{\tilde{E}1,2} = M_{\tilde{Q}1} = M_{\tilde{U}1} = 300$ GeV gewählt, da hierfür die Einzelbeiträge zu $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$ relativ groß sind. Allgemein ist es wahrscheinlich nur dann möglich $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$ auf große negative Werte zu bringen, wenn es gelingt die CC-Korrekturen stärker zu unterdrücken als die NC-Korrekturen. Dies könnte möglicherweise durch eine geschickte Konfiguration der Chargino- und Neutralino-Massenparameter geschehen, da sich die NC-, CC-Feynmangraphen, wie im Anhang zu sehen, gerade in diesem Sektor voneinander unterscheiden. In Abbildung 5.6 ist $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$ in Abhängigkeit von dem Massenparameter M_1 zu sehen, wobei $M_2 = 200$ GeV gesetzt wurde. Für alle weiteren Parameter wurden die Werte aus Tabelle 5.1 übernommen.

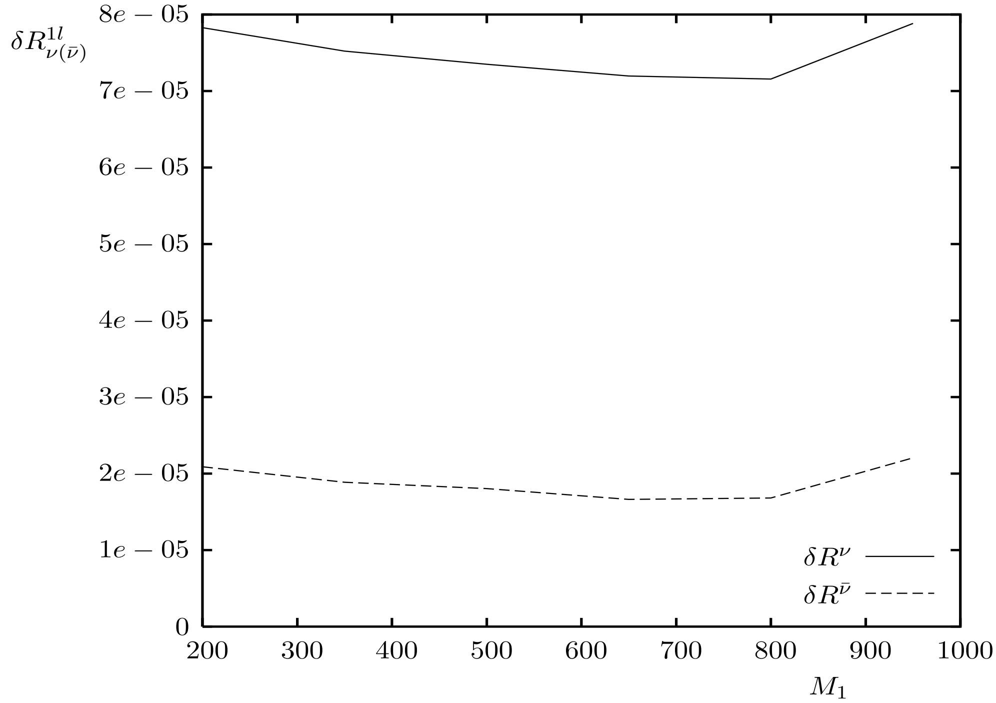


Abbildung 5.6: $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$ *in Abhängigkeit von* M_1.

Anhand von Abbildung 5.6 ist keinerlei Abhängigkeit der Größe $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$ von M_1 zu erkennen. Dies gilt auch für die in $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$ eingehenden Beiträge $\delta R^{\mathrm{NC}}_{\nu(\bar{\nu})}$ und $\delta R^{\mathrm{CC}}_{\nu(\bar{\nu})}$, die nicht extra abgebildet wurden.

5.2.2 $\tan\beta$-Effekte

In Abbildung 5.7 ist $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$ über dem Mischungsparameter $\tan\beta$ dargestellt. Es wurde $M_{\tilde{L}1,2} = M_{\tilde{E}1,2} = M_{\tilde{Q}1} = M_{\tilde{U}1} = 300$ GeV gesetzt. Die übrigen MSSM-Parameter wurden jeweils wieder so wie in Tabelle 5.1 gewählt. Es ist keine Abhängigkeit der Größe $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$ von $\tan\beta$ zu erkennen. Selbst wenn man die eingehenden Größen $\delta R^{\mathrm{NC}}_{\nu(\bar{\nu})}$ und $\delta R^{\mathrm{CC}}_{\nu(\bar{\nu})}$ betrachtet, sind diese von $\tan\beta$ unabhängig.

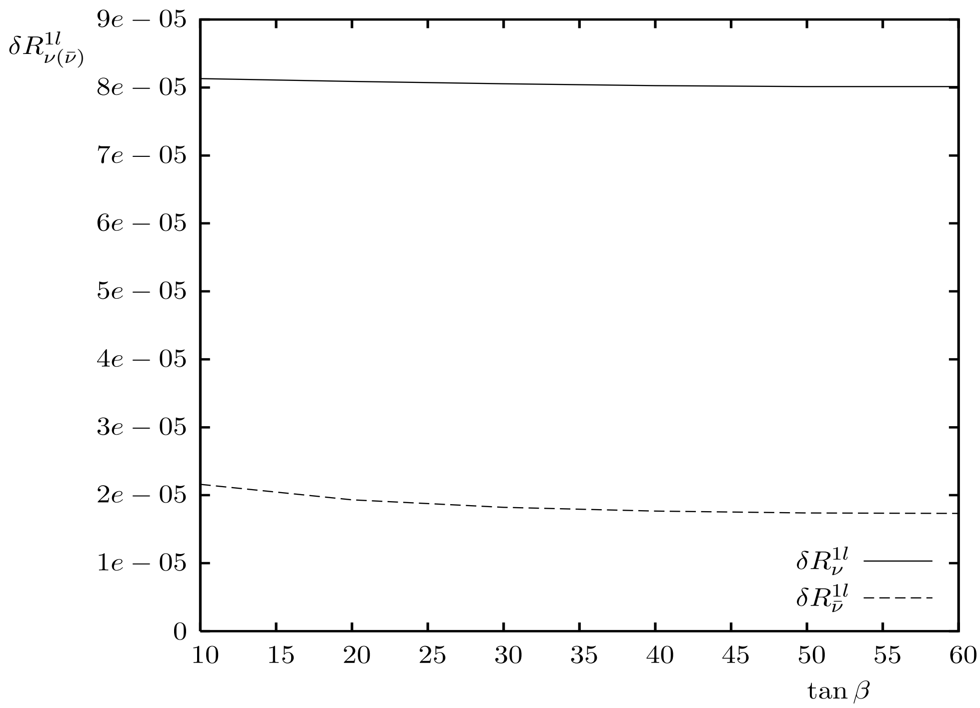


Abbildung 5.7: $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$ *in Abhängigkeit von* $\tan\beta$.

Konstruktionsbedingt hat $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$ keine Abhängigkeit von M_{A^0}. Anhand von Abbildung 5.7 ist zu erkennen, dass auch von $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$ (einem anderen Parameter des Higgssektors) unabhängig ist.

5.2.3 μ-Effekte

Nun soll noch untersucht werden, wie sich eine Variation des Higgs-Duplett-Mischungsparameters μ auf $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$ auswirkt. Der Imaginärteil von μ bleibt dabei konstant auf Null. In Abbildung 5.8 ist zu erkennen, dass sich $\delta R^{1l}_{\bar{\nu}}$ relativ wenig ändert. δR^{1l}_{ν} sinkt zwischen $\mu = 150$ GeV und $\mu = 900$ GeV zumindest um ca. 25 % ab.

Beim Betrachten der Einzelbeiträge, die in Abbildung 5.9 dargestellt sind, erkennt man, dass sich diese im Gegensatz zu $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$ relativ stark ändern. Da die Kurven fast genau

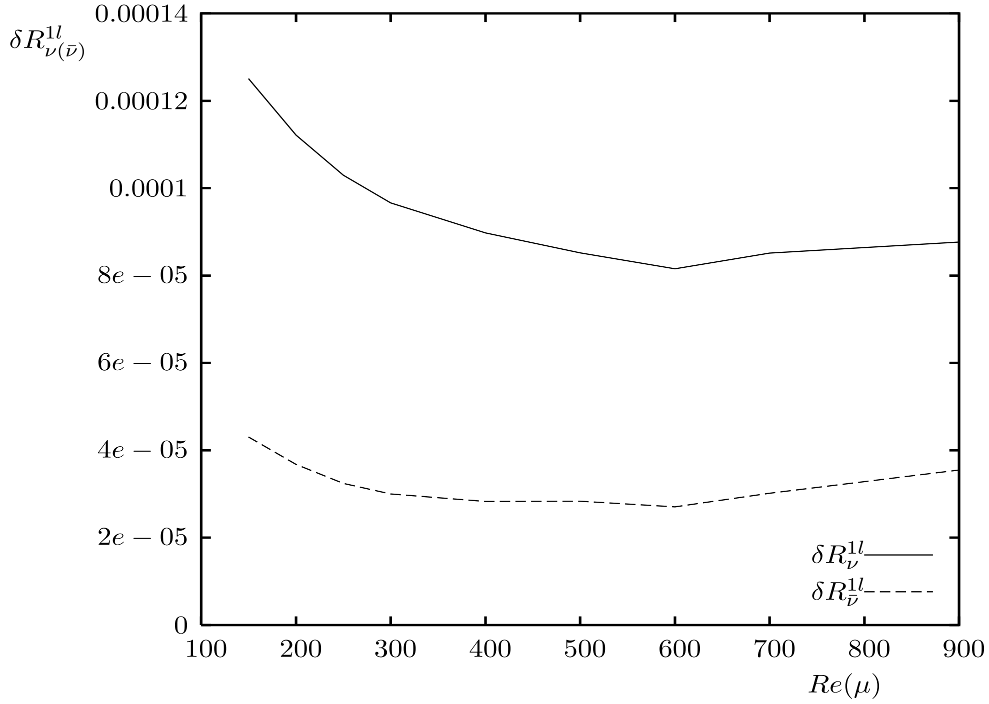


Abbildung 5.8: $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$ *in Abhängigkeit von* μ.

parallel zu einander verlaufen, kann man schließen, dass eine Änderung von μ sich auf die NC-Beiträge fast genauso auswirkt, wie auf die CC-Beiträge.

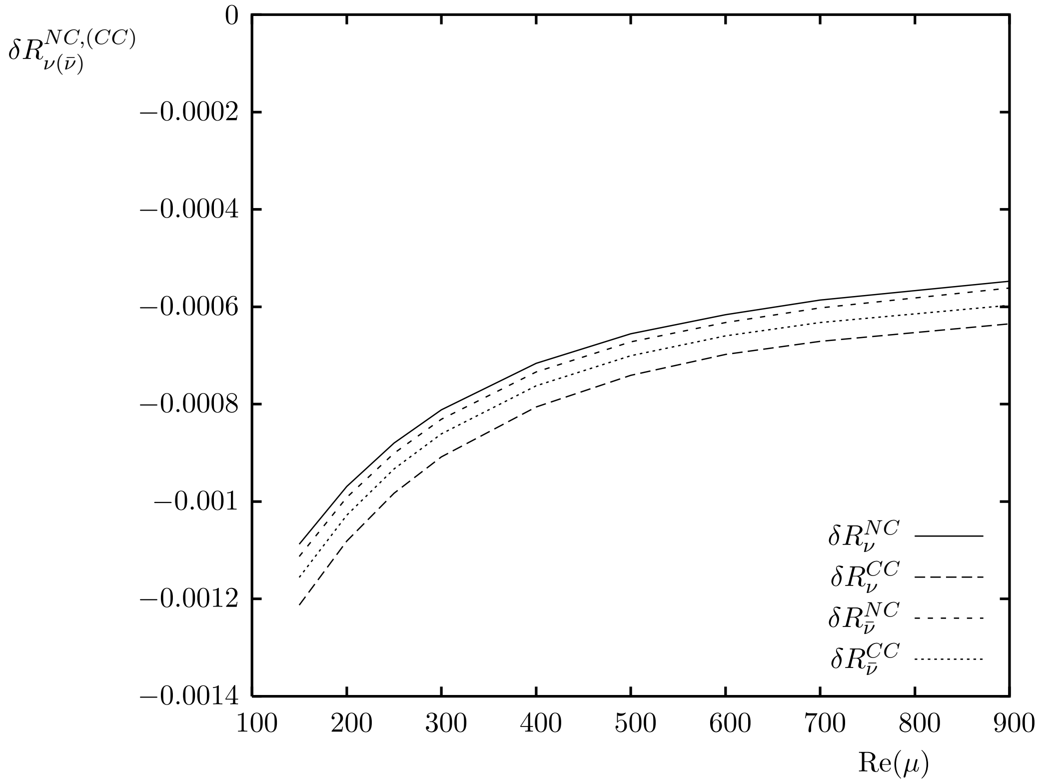


Abbildung 5.9: $\delta R^{NC}_{\nu(\bar{\nu})}$ *und* $\delta R^{CC}_{\nu(\bar{\nu})}$ *in Abhängigkeit von* μ*.*

Die numerische Unsicherheit der in Kapitel 5 berechneten Größe $\delta R^{1l}_{\nu(\bar{\nu})}$ wurde mit Hilfe der Gleichung (4.57) für die dargestellten Kurven überprüft. Dabei konnte festgestellt werden, dass die Unsicherheit immer um mindestens 10 % kleiner als der jeweilige Werte für $\delta R^{1l}_{\nu(\bar{\nu})}$ ist.

Kapitel 6

Zusammenfassung

Aus den Wirkungsquerschnitten mit neutralem und geladenem Strom für tiefinelastische Neutrino-Nukleon-Streuung kann der elektroschwache Mischungswinkel θ_W berechnet werden. Die hierzu bei dem NuTeV-Experiment gemachten Beobachtungen differieren um ca. 3 Standardabweichungen von den Ergebnissen anderer Experimente. Das Ziel dieser Arbeit war es zu untersuchen, wie sich die theoretischen Vorhersagen für die Neutrino-Nukleon-Streuung ändern, wenn man bei den Rechnungen in Ein-Schleifen-Ordnung das Minimale Supersymmetrische Standardmodell statt des Standardmodells der elektroschwachen Wechselwirkung zu Grunde legt. Berechnet wurde die von den SUSY-Beiträgen bewirkte Änderung ($\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$) gegenüber der Standardmodell-Vorhersage.

Zunächst wurde diskutiert, wie stark Higgs-Effekte in die Ein-Schleifen-Rechnung eingehen. Dabei stellte sich heraus, dass diese Effekte vernachlässigbar klein sind, wenn die Massen der schwereren MSSM-Higgsbosonen (A^0, H^0, $H^\pm$) sehr groß sind, da in diesem Fall der MSSM-Higgssektor standardmodellartig wird. Deshalb wurde bei den in dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen ein derartiges Higgs-Szenario angenommen.
Anschliessend wurde untersucht, wie sich CKM-Effekte auf die Korrektur $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$ in Ein-Schleifen-Ordnung auswirken. Mittels einer Entwicklung der CKM-Matrix in den Paschos-Wolfenstein-Parametern konnte gezeigt werden, dass die Effekte einer CKM-Matrix, die nicht der Einheitsmatrix entspricht, bei der Berechnung von $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$ vernachlässigt werden können.
Um einen möglichst guten Bezug zum NuTeV-Experiment herzustellen, wurde untersucht, wie sich Vorgaben, die bei der Messung gemacht wurden, auf die kinematischen Größen der Berechnung auswirken. Zunächst konnte die invariante Energie des Neutrino-Quark-Systems anhand der Energie des einlaufenden Neutrinos im Laborsystem abgeleitet werden.

Bei der Messung der im Detektor deponierten Energie gab es eine obere und eine untere Grenze. Diese Grenzen konnten in eine Einschränkung des Winkelbereichs im CM-System übersetzt werden.
Um UV-Divergenzen in den Ein-Schleifen-Amplituden des Streuprozesses zu beheben, wurde ein on-shell-Renormierungsschema verwendet. Da es in niedrigster Ordnung Störungstheorie keine Beiträge mit Superpartnerteilchen zur Neutrino-Parton-Streuung gibt, mussten lediglich die Propagatoren der Standardmodellteilchen die

on-shell-Renormierungsbedingungen erfüllen.

Mit diesen Vorgaben wurde unter Verwendung von FormCalc und FeynArts ein Computerprogramm geschrieben, das die differentiellen Partonwirkungsquerschnitte berechnet, diese mit den jeweiligen Partonverteilungsfunktionen faltet und daraus die Korrektur $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$ in Abhängigkeit von den gewählten MSSM-Parametern bestimmt. Mit diesem Programm wurde untersucht, wie sich unterschiedliche Parameter auf $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$ auswirken. Bei einer Variation der Sfermion-Massenparameter, ergab sich, dass mit kleineren Sfermion-Massen die supersymmetrischen Effekte am größten waren. Dennoch waren diese Effekte auch im maximalen Fall (d.h. bei $M_{\tilde{Q}} = M_{\tilde{U}} = M_{\tilde{E}} = M_{\tilde{L}} = 200$ GeV) um den Faktor 5 kleiner als die von NuTeV gefundene Abweichung. Ebenso ergibt die Unterscheidung von Szenarien mit und ohne Squarkmischung keine wesentlichen Veränderungen.

Die Variation der MSSM-Parameter $\tan\beta$ und M_1 konnte keinerlei Abhängigkeit der Größe $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$ von diesen Parametern zeigen.

Zuletzt wurde der Higgs-Duplett-Mischungsparameter μ variiert. Zwar ist für kleine $\mu = 150$ GeV $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$ deutlich größer als für größere μ, doch bleiben die Korrekturen auch in diesem Fall sehr klein. Die errechneten Korrekturen $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$ haben in allen betrachteten Fällen das falsche Vorzeichen, um die von NuTeV gemessene Diskrepanz erklären zu können. Dies könnte dazu verwendet werden gewisse MSSM-Parameterbereiche, in denen $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$ groß genug ist auszuschliessen, da sie in signifikantem Widerspruch zu dem experimentellen Resultat stehen. Doch solange der Betrag von $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$ deutlich kleiner als 0.0033 ist, können keine Rückschlüsse aus diesen Berechnungen gezogen werden.

Mit dem im Rahmen dieser Arbeit erstellten Computer-Programm, die Möglichkeit die Korrektur $\delta R^{1l}_{\nu\,(\bar{\nu})}$ für beliebige Parametersätze zu berechnen.

Anhang A

Partonmodell und perturbative Quanten-Chromodynamik

A.1 Partonmodell

Hochenergetische Stöße mit hohem Impulsübertrag zwischen Elektronen oder Neutrinos und massiven Atomkernen wurden lange Zeit als inelastisch angesehen. Doch ergaben sich in den sechziger Jahren aus Streuexperimenten Hinweise auf eine gekörnte Substruktur der Kerne. Die Streuwahrscheinlichkeiten glichen denen, die man bei der Streuung an freien Punktteilchen erwarten würde (Bjorken-Scaling). Das war der experimentelle Anstoß für *Bjorken, Paschos* und *Feynman* [13], das Partonmodell zu entwickeln.
Dieses Modell enthält eine Reihe von begründeten vereinfachenden Annahmen. Die Grundidee ist, dass man ein Proton bzw. ein Neutron als Bindungszustand von mehreren so genannten Partonen betrachtet, die sich bei inelastischen Streuprozessen wie freie Teilchen verhalten. Da ein Auseinanderfallen von Protonen und Neutronen in seine inneren Bestandteile bisher nie beobachtet wurde, nennt man die Partonen nicht frei, sondern quasifrei und schreibt ihnen eine Eigenschaft zu, die man Confinement nennt. Das Confinement besagt, dass kein Parton, das man später mit den Quarks identifiziert, allein auftreten darf, womit der Stabilität des Protons Rechnung getragen wird. Zwar zerfallen Neutronen, aber die messbaren Zerfallsprodukte sind keine freien Partonen (meistens zerfallt ein Neutron in ein Proton, ein Elektron und ein Elektron-Neutrino). Ein Protonzerfall konnte bisher noch nicht beobachtet werden. Einem quasifreien Teilchen kann man im Gegensatz zu einem quantenmechanisch gebundenen Teilchen eine klassische Aufenthaltswarscheinlichkeit zuordnen. Man nimmt nun weiterhin an, dass diese Aufenthaltswahrscheinlichkeit eine universelle Eigenschaft sowohl der Protonen als auch der Neutronen ist. Als Messgröße wird die Wahrscheinlichkeit genommen, dass das Parton einen bestimmten Impuls trägt. Dieser Impuls muss für jedes enthaltene Teilchen, die Quarks und die starken Austauschteilchen die Gluonen, bestimmt werden. Er läuft von $x = 1$, d.h. das Parton trägt den gesamten Impuls des Protons, bis $x = 0$ was bedeutet, dass das Parton nicht zum Gesamtimpuls des Protons beiträgt. Bei der graphischen Darstellung trägt man gewöhnlich die Wahrschein-

lichkeitsdichte f_q über x (siehe Abbildung A.1), oder aber zur besseren Unterscheidbarkeit $x \cdot f_q$ über x auf (siehe Abbildung A.2).

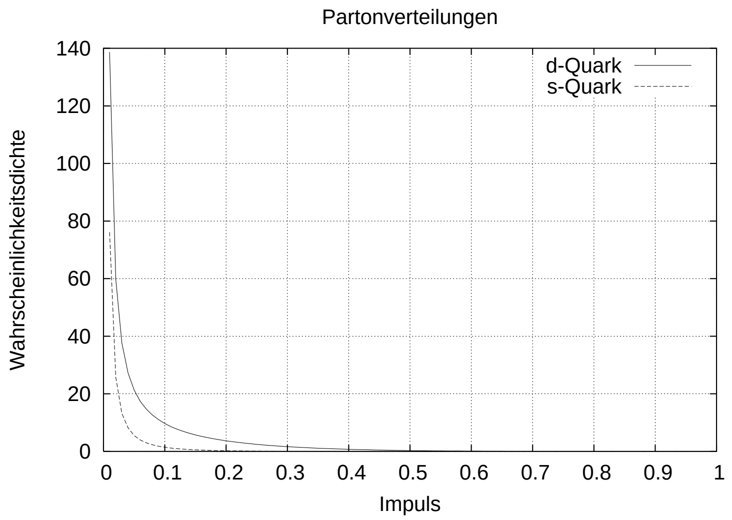


Abbildung A.1: *Die Verteilung des d- und des s-Quark-Impulses im isoskalaren Target*

Bei den Abbildungen A.1 und A.2 wird über Proton- und Neutrondaten aus [14] gemittelt, so dass sich für u- und d-Quarks dieselben Verteilungskurven ergeben.

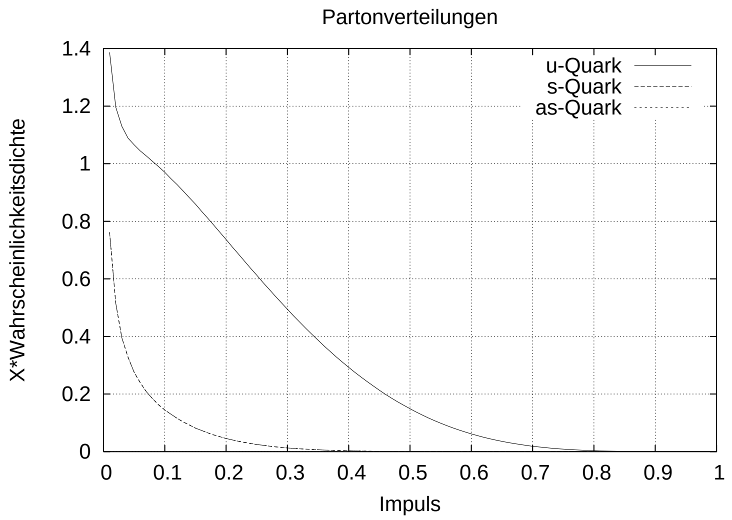


Abbildung A.2: *Die Verteilung des u- und des s-Quark-Impulses multipliziert mit dem jeweiligen Impulsanteil im isoskalaren Target*

Diese als Ausnutzen der Isosymmetrie bezeichnete Vorgehensweise ist nicht notwendig, kann aber helfen, den möglicherweise großen Rechenaufwand zu verringern. In Abbildung

A.2 deckt sich die isosymmetrische s-Quarkverteilung genau mit der $\bar{s}$-Quarkverteilung. Will man nun den Wirkungsquerschnitt eines Prozesses $f + P \to f' + X$ (Fermion streut an Nukleon mit zunächst beliebigen Endzuständen) berechnen, setzt sich dieser nach dem Partonmodell [15] aus der mit f_q gewichteten Summe über die Teilprozesse zusammen:

$$\sigma(f + P \to f' + X) = \sum_{q,q'} \int_0^1 dx \cdot f_{q/P}(x, \mu_F) \cdot \sigma_{f+q \to f'+q'}(x, S_{ges}) \qquad \text{(A.1)}$$

Die Summe geht über alle im Nukleon vorkommenden Partonen q und über sämtliche Endzustände q', die noch erlaubt sind, sobald f, f' und q festgelegt sind. Die Verteilungsdichte f_q in Formel A.1 hängt noch von der Faktorisierungs-Skala μ_F ab.

A.2 Perturbative Quanten-Chromodynamik

Die in Kapitel A.1 postulierte Eigenschaft, dass sich Quarks im Limes tiefinelastischer Streuprozesse „quasi frei“ verhalten, wird durch die so genannte „asymptotische Freiheit“ der QCD vorhergesagt. Da die Gluonen masselos sind, ist zu erwarten, dass bei der störungstheoretischen Beschreibung der starken Wechselwirkung bei größeren Abständen, d.h. bei kleineren Impulsüberträgen zusätzliche Probleme auftreten. Nach dem Faktorisierungstheorem der pertubativen Quanten-Chromodynamik (pQCD), kann man bei bestimmten Klassen von harten Prozessen die Infrarot-Divergenzen und die kollinearen Divergenzen in die Partonverteilungsfunktionen absorbieren und diese somit in Abhängigkeit von einer Faktorisierungsskala μ_F regularisieren. Man fordert also, dass diese nach Einbeziehung aller Ordungen der Störungstheorie mit den experimentell gemessenen Werten übereinstimmen soll. Damit ist auch klar, dass man zunächst die Verteilungsfunktionen $f_q(x, \mu_{F_0})$ für ein festes μ_{F_0} gemessen werden müßen. Mit Hilfe der Altarelli-Parisi-Gleichungen erhält man dann auch $f_q(x, \mu_F)$ für andere Werte von μ_F.

Neben der erwähnten Renormierung der Infrarotdivergenzen müssen auch noch Massen, Ladungen und Felder des harten Prozeßes renormiert werden, um die UV-Divergenzen zu absorbieren. Der erste Schritt beim Renormieren der beiden Typen von Divergenzen ist das Regularisieren. Dies zieht die Einführung einer willkürlichen cut-off Massenskala nach sich. Seien μ_R die Renormierungsskala und μ_F die Faktorisierungsskala, so ist klar, dass die physikalischen Observablen unabhängig von beiden sein müssen. Nimmt man an, dass die Kopplungskonstante α_S von einer dieser Größen abhängt, kann man aus der obigen Forderung Differentialgleichungen ableiten, die das Skalenverhalten von $\alpha_S(\mu_R)$ beschreiben. Solche Gleichungen nennt man im allgemeinen Renormierungsgruppengleichungen. Sie lassen sich nach folgendem Schema ableiten: Betrachtet man zum Beispiel eine experimentell zugängliche Größe wie den Wirkungsquerschnitt σ und führt einen Cut-Off μ_R ein, so kann man sich die theoretische Vorhersage als Potenzreihe in der Kopplung $\alpha_S(\mu_R)$ vorstellen.

$$\sigma^{\infty}(Var) = \sum_{1}^{\infty} a_n(Var, \mu_R) \cdot \alpha_S^n(\mu_R) \tag{A.2}$$

Var steht für alle anderen Variablen, von denen das Ergebnis noch abhängen könnte. Nun fordert man, dass die Observable von der willkürlichen Größe μ_R unabhängig ist. Das ist gleichbedeutend damit, dass die totale Ableitung von σ nach μ_R gleich Null sein muss. Wenn $\mu_F \neq 0$ ist, ist das gleichbedeutend mit:

$$\sum_{1}^{\infty} \left[\left(\frac{d}{d\mu_r^2} a_n(Var, \mu_R) \right) \cdot \alpha_S(\mu_R)^n + a_n(Var, \mu_R) \cdot \frac{d}{d\mu_r^2} \alpha_S^n(\mu_R) \right] = 0 \tag{A.3}$$

Als Lösung dieser Gleichung erhält man die „laufende Kopplungskonstante“ $\alpha_S(\mu_R)$, die es gestattet, dass σ unabhängig von μ_R ist. In der Praxis ist man bisher nicht in der Lage, diese Störungsreihe bis zu beliebiger Ordnung zu berechnen. Das bedeutet, man muss die Reihe bei einer Ordnung k, der (maschinellen und menschlichen) Grenze der Berechenbarkeit abbrechen. Nun ist jedoch $\sigma^k(Var, \mu_R)$ nicht mehr unabhängig von der Wahl von μ_R. Hier könnte man sich fragen, ob man durch eine günstige Wahl von μ_R den durch den Abbruch gemachten Fehler minimieren könnte. Dies erscheint auf den ersten Blick widersinnig, da man doch gerade noch Unabhängigkeit von μ_R gefordert hat. Dennoch ergibt die Beobachtung, dass die Koeffizienten der Störungsreihe üblicherweise Logarithmen von $\frac{M}{\mu_R}$ enthalten. M ist eine große kinematische Variable des betrachteten Prozesses. Dies ist ein Hinweis darauf, dass die Wahl von $\mu_R \approx M$ die Beiträge höherer Ordnung stark verringern könnte. Ähnliches gilt auch für die Operatorproduktentwicklung nach μ_F, welches in der vorangegangenen Diskussion ausgelassen wurde.

Anhang B

Supersymmetrie

B.1 Erweiterung der Poincaré-Algebra

Auf der Suche nach einer Theorie, die über das SM hinausgeht, versuchte man in den Sechziger Jahren Symmetrien zu finden, die nicht einfach aus dem direkten Produkt der Poincaré-Algebra mit einer anderen Symmetrie bestehen. Man suchte also eine Symmetrie, deren Generatoren (B) nicht alle mit den Generatoren der Poincaré Algebra (P_μ, $M_{\mu\nu}$) vertauschen. Mathematisch geschrieben heißt das,

$$\exists\ B \text{ mit } [P_\mu, B] \neq 0 \text{ oder } [M_{\mu\nu}, B] \neq 0. \tag{B.1}$$

Coleman und *Mandula* [17] konnten jedoch zeigen, dass die allgemeinste Lie-Algebra, die mit der S-Matrix unter physikalisch sinnvollen Voraussetzungen vertauscht, gerade lokal isomorph zu einem solchen direkten Produkt sein muss. Bei dem Beweis ihres Theorems betrachten *Coleman* und *Mandula* jedoch nur Symmetrietransformationen, die Kommutatorrelationen untereinander erfüllen, also eine Lie-Algebra im eigentlichen Sinne bilden. Tatsächlich kann man dies umgehen, indem man Generatoren Q^L_α einführt, die untereinander *Anti*-Vertauschungsrelationen erfüllen. Wenn man für diese auch noch fordert, dass $[Q^L_\alpha, P_\mu] = 0$ und dass die Vertauschungsrelationen mit der Poincaré-Algebra unverändert gleich Null bleiben, greift das Theorem von *Mandula* und *Coleman* nicht. Auch wenn die neu eingeführten Generatoren mit denen der Poincaré-Algebra vertauschen, so hat man hiermit dennoch eine weiterreichende algebraische Struktur gefunden als das einfache direkte Produkt. Die so erweiterte-Algebra heißt Z_2-graduierte Pioncaré-Superalgebra. Sie beschreibt den Weg hin zur Supersymmetrie. Noch ist die genaue Art der Antivertauschungsrelationen nicht festgelegt. Um eine physikalische Deutung zu bekommen, berücksichtigt man lediglich die Symmetrien, deren Generatoren alle mit der S-Matrix vertauschen. *Haag, Lopuszański und Sohnius* [19] haben untersucht welche Superalgebren diese Bedingung erfüllen. Sie sagen voraus, dass die allgemeinste Superalgebra, die mit einer relativistischen Quantenfeldtheorie verträglich ist von folgender Form sein muss[1].

[1]Es wird die Spinor-Notation von van der Waerden verwendet. $\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha}$; $\epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon^{\beta\alpha}$; $\epsilon^{12} = \epsilon_{12} = 1$ (ebenso für ungepunktete Indizes). $(\sigma^\mu)_{\dot\alpha\beta} = (1, \sigma_i)_{\dot\alpha\beta}$, $(\sigma^\mu)^{\dot\alpha\beta} = (1, -\sigma_i)^{\dot\alpha\beta}$. $\sigma^{\mu\nu} = 1/2 \cdot i(\bar\sigma^\mu\sigma^\nu - \bar\sigma^\nu\sigma^\mu)$.

$$\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] &= 0, \\
[P_\mu, M_{\rho\sigma}] &= i(g_{\mu\rho}P_\sigma - g_{\mu\sigma}P_\rho), \\
[M_{\mu\nu}, M_{\rho\lambda}] &= i(g_{\nu\rho}M_{\mu\lambda} - g_{\nu\lambda}M_{\mu\rho} - g_{\mu\rho}M_{\nu\lambda} + g_{\mu\lambda}M_{\nu\rho}).
\end{aligned} \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}
[P_\mu, Q^L_\alpha] &= [P_\mu, \bar{Q}^L_{\dot\alpha}] = 0, \\
[M_{\mu\nu}, Q^L_\alpha] &= +1/2\ (\sigma_{\mu\nu})^\beta_\alpha Q^L_\beta, \\
[M_{\mu\nu}, \bar{Q}^L_{\dot\alpha}] &= +1/2\ (\bar\sigma_{\mu\nu})^{\dot\beta}_{\dot\alpha} \bar{Q}^L_{\dot\beta}, \\
[B_r, P_\mu] &= [B_r, M_{\mu\nu}] = 0, \\
[B_r, Q^L_\alpha] &= -(s_r)^L{}_B Q^B_\alpha, \\
[B_r, \bar{Q}^{\dot\alpha}_L] &= +\bar{Q}^{\dot\alpha}_B (s_r)_L^B, \\
[B_r, B_s] &= i c^k_{rs} B_k, \\
\{Q^L_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta M}\} &= (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} P_\mu \delta^L_M, \\
\{Q^L_\alpha, Q^M_\beta\} &= \epsilon_{\alpha\beta} Z^{[LM]} \quad ;, \quad Z^{[LM]} = a^{[LM]r} B_r, \\
\{\bar{Q}_{\dot\alpha L}, \bar{Q}_{\dot\beta M}\} &= -\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} Z^\dagger_{[LM]} \ , \quad Z^{\dagger[LM]} = a^{*\,r}_{[LM]} B_r.
\end{aligned} \tag{B.3}$$

In Gleichung B.2 ist die Poincaré- und in Gleichung B.3 die Supersymmetrie-Algebra definiert, zusammen bilden sie die Super-Poincaré-Algebra. Die Spinor-Indizes α und β von Q laufen von eins bis zwei und bezeichnen zweikomponentige Weylspinoren entsprechend der $(\frac{1}{2}, 0)$-Darstellung der Lorentz-Gruppe. Ähnlich verhält es sich mit $\dot\alpha$ und $\dot\beta$, nur dass diese die Komponenten der $(0, \frac{1}{2})$-Darstellung der Lorentz-Gruppe sind. Die Indizes μ und ν laufen in der übliche Lorentz-Notation von Null bis drei. Die B_r repräsentieren sämtliche Lorentz-skalare Ladungen, von denen lediglich gefordert wird, dass es endlich viele sind und dass ihr Kommutator die Strukturfunktionen c^k_{rs} der kompakten Liegruppe ergibt. Die $(s_r)_L^B$ sind die N-dimensionalen Darstellungen der Generatoren der Liegruppe. Die Matrizen $a^{[LM]r}$ sind noch durch Bedingungen eingeschränkt, die sie mit den $(s_r)_L^B$ verknüpfen. Diese Bedingungen folgen aus der Forderung, dass $[Z^{[LM]}, G] = 0$ für sämtliche Generatoren (G) der Supersymmetriealgebra gelten soll [17]. Aufgrund der Eigenschaft, dass sie mit allen G's vertauschen, nennt man die $Z^{[LM]}$ auch zentrale Ladungen.
Man unterscheidet Supersymmetrien anhand der Anzahl n der unabhängigen Superladungen Q^L $(L = 1, ..., N)$. Die einfachste Version einer supersymmetrischen Theorie ist also die mit $N = 1$.

B.2 $(N = 1)$-Supersymmetrie

Das Studium der irreduziblen Darstellungen der Super-Poincarégruppe auf dem Raum der Teilchenzustände zeigt, dass es massive Teilchenmultipletts, deren Spin $s = \frac{1}{2}$ nicht überschreitet, nur für $(N = 1)$-Supersymmetrie geben kann [18]. Aus diesem Grund sind

Die σ_i sind Pauli-Matrizen.

supersymmetrische Theorien mit renormierbaren Kopplungen an massive Materie nur für $N = 1$ möglich. Deshalb ist diese „einfachste“ Supersymmetrie-Algebra nicht nur ihrer Überschaubarkeit wegen von besonderem Interesse. Die Gleichungen in (B.3) vereinfachen sich in diesem Fall erheblich.

$$
\begin{aligned}
[P_\mu, Q_\alpha] &= [P_\mu, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = 0, \\
[M_{\mu\nu}, Q_\alpha] &= +1/2\ (\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta, \\
[M_{\mu\nu}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] &= +1/2\ (\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \bar{Q}_{\dot{\beta}}, \\
[B_r, P_\mu] &= [B_r, M_{\mu\nu}] = 0, \\
[B_r, Q_\alpha] &= -(s_r) Q_\alpha, \\
[B_r, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] &= +\bar{Q}^{\dot{\alpha}}(s_r), \\
[B_r, B_s] &= i c_{rs}^k B_k, \\
\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} &= (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu, \\
\{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 0, \\
\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} &= 0.
\end{aligned}
\tag{B.4}
$$

Wegen der Antisymmetrie von $a^{*\,r}_{[LM]}$ in den Indizes L und M werden die zentralen Ladungen $Z^{\dagger[LM]}$ und $Z^{[LM]}$ im Fall von $(L, M \epsilon \{1\})$ gleich Null.
Bei der fünften und sechsten Gleichung in (B.4) reduziert sich $(s_r)^L_B$ auf die eindimensionale Darstellung (s_r), also auf eine relle Zahl. Wenn diese Zahl ungleich Null ist, kann man die beiden Gleichungen durch das reelle s_r teilen und erhält für $R_r = \frac{B_r}{s_r}$:

$$
\begin{aligned}
[R_r, Q_\alpha] &= -Q_\alpha \\
[R_r, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] &= +\bar{Q}^{\dot{\alpha}}
\end{aligned}
\tag{B.5}
$$

Die auf s_r normierten R_r nennt man R-Generatoren.
Ist der Kommutator von allen Generatoren B_r der inneren Symmetrien mit den SUSY-Generatoren Q, $\bar{Q}$ gleich null, so spricht man von erhaltener R-Parität oder R-Symmetrie.

B.3 Superfelder

Ebenso wie die Größe einer Translation P^μ durch den dazugehörigen Raumparameter x_μ angegeben wird, haben auch die Symmetrietransformationen Q_α und $\bar{Q}^{\dot{\alpha}}$ die Parameter θ^α und $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$. Das sind die Grassmann-Zahlen, die antivertauschen, also fermionischen Charakter haben:

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = \{\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\} = \{\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \theta^\alpha\} = 0. \tag{B.6}$$

Wie man mit Grassmann-Zahlen Analysis betreibt, kann man in kompakter Form zum Beispiel in [?] nachlesen. Aus Gleichung (B.6) folgt mit (B.4)

$$\begin{aligned}\theta^\alpha Q_\alpha \cdot \theta^\beta Q_\beta &= \theta^\alpha\theta^\beta Q_\alpha Q_\beta + \theta^\alpha[Q_\alpha,\theta^\beta]Q_\beta \\ &= \theta^\beta\theta^\alpha Q_\beta Q_\alpha + \theta^\alpha[Q_\alpha,\theta^\beta]Q_\beta \\ &= \theta^\beta Q_\beta \cdot \theta^\alpha Q_\alpha + \theta^\alpha[Q_\alpha,\theta^\beta]Q_\beta - \theta^\beta[Q_\alpha,\theta^\beta]Q_\alpha\end{aligned} \tag{B.7}$$

.

Will man nun, dass θ und Q nach der Kontraktion miteinander vertauschen, so muss man

$$\theta^\alpha[Q_\alpha,\theta^\beta]Q_\beta = \theta^\beta[Q_\alpha,\theta^\beta]Q_\alpha \tag{B.8}$$

fordern, was z.B. für $[Q_\alpha,\theta^\beta] \;=\; k\;\delta^\beta_\alpha$ erfüllt ist.
Aus (B.4) folgt ebenfalls

$$[\theta^\alpha Q_\alpha, \bar\theta_{\dot\beta}\bar Q^{\dot\beta}] = 2\theta^\alpha(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta}\bar\theta_{\dot\beta}P^\mu. \tag{B.9}$$

Wenn die $\theta^\alpha Q_\alpha$ die Vertauschungsrelationen (B.8) und (B.9) erfüllen, ist es möglich mit ihnen verallgemeinerte Translationen zu definieren:

$$G(x_\mu,\theta^\alpha,\bar\theta_{\dot\beta}) = e^{i(x_\mu P^\mu+\theta^\alpha Q_\alpha+\bar\theta_{\dot\beta}\bar Q^{\dot\beta})} \tag{B.10}$$

Die Variablen x_μ, θ^α und $\bar\theta_{\dot\alpha}$ bilden die Koordinaten des Superraumes mit den Elementen $z = (x_\mu,\theta^\alpha,\bar\theta^{\dot\alpha})$. Da die Grassmann-Zahlen θ^α und $\bar\theta_{\dot\alpha}$ einen Spinorindex tragen, hat der Superraum jeweils vier unabhängige reellwertige fermionische und bosonische Koordinaten. Die Translationen (B.10) wirken auf Superfelder Φ, die aufgrund der Nilpotenz[2] der Grassmann-Zahlen in der Form

$$\begin{aligned}\Phi(x,\theta,\bar\theta) \;=\; & f(x) + \theta^\alpha\phi_\alpha(x) + \bar\theta_{\dot\alpha}\bar\xi^{\dot\alpha}(x) + (\theta\theta)m(x) + (\bar\theta\bar\theta)n(x) \\ & + \theta^\alpha(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}v_\mu(x) + \theta\theta)\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\lambda^{\dot\alpha}(x) + (\bar\theta\bar\theta)\theta^\alpha\psi_\alpha(x) + (\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta)d(x)\end{aligned} \tag{B.11}$$

dargestellt werden können. Infinitesimale Translationen von Φ erhält man aus einer Taylorentwicklung erster Ordnung der Abbildung

$$e^{i(x_\mu P^\mu+\theta^\alpha Q_\alpha+\bar\theta_{\dot\beta}\bar Q^{\dot\beta})}\Phi(z)e^{-i(x_\mu P^\mu+\theta^\alpha Q_\alpha+\bar\theta_{\dot\beta}\bar Q^{\dot\beta})} = \Phi(z'). \tag{B.12}$$

Auf der Suche nach einer Operatordarstellung der Translationen (B.12) fordert man

[2]Die Nilpotenz folgert daraus dass die die Erzeugenden ξ_a von Grassmann-Zahlen Z_G untereinander antivertauschen, was gleichbedeutend mit $\xi_a \cdot \xi_a = 0$ ist. Deshalb kann eine Grassmann-Zahl mit vier Erzeugenden immer als
$Z_{G_4} = A_a\xi^a + ... + D_{abcd}\xi^a\xi^b\xi^c\xi^d$ geschrieben werden. Es gilt also auch: $Z_{G_4}^4 = 0$. Diese Eigenschaft nennt man Nilpotenz.

$$\Phi(z') = e^{-i(x_\mu \hat{P}^\mu + \theta^\alpha \hat{Q}_\alpha + \bar{\theta}_{\dot{\beta}} \hat{\bar{Q}}^{\dot{\beta}})} \Phi(z), \tag{B.13}$$

woraus man nach einer Entwicklung erster Ordnung der e-Funktionen mittels Koeffizientenvergleich[3] eine Darstellung der Supersymmetrie-Generatoren als Differentialoperatoren auf dem Superraum erhält,

$$\begin{aligned} \hat{P}^\mu &= i\partial^\mu \\ \hat{Q}_\alpha &= +i(\partial_\alpha + i(\sigma_\mu \bar{\theta})_\alpha \partial^\mu) \\ \hat{\bar{Q}}^{\dot{\alpha}} &= -i(\partial_{\dot{\alpha}} - i(\theta\sigma_\mu)_{\dot{\alpha}} \partial^\mu) \ . \end{aligned} \tag{B.14}$$

Die Studie der Inversen der Abbildungen B.13 und B.12 führt auf die Operatoren $\hat{D}_\alpha$ und $\hat{\bar{D}}_{\dot{\alpha}}$:

$$\begin{aligned} \hat{D}_\alpha &= \partial_\alpha - i(\sigma_\mu \bar{\theta})_\alpha \partial^\mu \ , \\ \hat{\bar{D}}_{\dot{\alpha}} &= -\partial_{\dot{\alpha}} + i(\theta\sigma_\mu)_{\dot{\alpha}} \partial^\mu \ . \end{aligned} \tag{B.15}$$

Für diese Operatoren gelten folgende Relationen[21]:

$$\{\hat{D}_\alpha, \hat{Q}_\alpha\} = \{\hat{D}_\alpha, \hat{\bar{Q}}_{\dot{\alpha}}\} = \{\hat{\bar{D}}_{\dot{\alpha}}, \hat{Q}_\alpha\} = \{\hat{\bar{D}}_{\dot{\alpha}} . \hat{\bar{Q}}_{\dot{\alpha}}\} = 0, \tag{B.16}$$

$\hat{D}$ wird die erweiterte kovariante Ableitung genannt.

B.3.1 Chirales Superfeld

Das allgemeine (lorentz-) skalare Superfeld aus Gleichung (B.11) hat 8 unabhängige komplexwertige (d.h. 16 reelle) Komponenten, die eine ungerade Anzahl von Grassmann-Zahlen θ haben und deshalb fermionisch sind. Die übrigen 8 Komponenten von Φ haben eine gerade Anzahl von Grassmann-Zahlen, weshalb sie bosonischen Charakter haben. Das allgemeine skalare Superfeld spannt einen Darstellungsraum der Supersymmetriegruppe auf. Durch Aufstellung supersymmetrisch kovarianter Zusatzbedingungen kommt man zu niedrigdimensionaleren irreduzieblen Darstellungen. Vereinfacht gesagt, um die große Anzahl von 32 reellen Freiheitsgraden zu verringern und das Feld zu klassifizieren, werden supersymmetrisch kovariante Bedingungen gestellt. Felder, die die Bedingung

$$\hat{\bar{D}}_{\dot{\alpha}} \Phi \ = \ 0 \quad \text{bzw.} \quad \hat{D}_\alpha \Phi^\dagger \ = \ 0 \tag{B.17}$$

[3] Die Identität lässt sich nachweisen wenn man wie in [21] die Campell-Baker-Haussdorff-Formel in B.12 verwendet und das Ergebnis mit B.14 in B.13 eingesetzt vergleicht.

erfüllen, nennt man chirale- bzw. antichirale Superfelder[4]. Die allgemeine Lösung der ersten Bedingung aus (B.17) an das allgemeine skalare Superfeld (B.11) lautet komponentenweise geschrieben:

$$\begin{aligned}\phi(z) = A(x) - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A(x) - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^\mu\partial_\mu A(x) \\ + \theta^\alpha\sqrt{2}\psi_\alpha(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) + \theta\theta F(x).\end{aligned} \tag{B.18}$$

Neben den skalaren Feldern $A(x)$ und $F(x)$ enthält Φ noch den linkshändigen Spinor $\psi_\alpha(x)$ als fermionischen Anteil. Bildet man das komplex konjugierte $\Phi^\dagger$, so stellt sich heraus, dass man mit diesem Feld die allgemeine Lösung der Antichiralitätsbedingung hat.

Dank der Nilpotenz der Grassmann-Algebra und der Vertauschungseigenschaften der erweiterten Pauli-Matrizen[5] zeigt sich, dass jedes Produkt chiraler Superfelder wieder ein chirales Superfeld ergibt.

B.3.2 Vektor-Superfeld

Das sogenannte Vektor-Superfeld $V(z)$ erfüllt die Bedingung

$$V^\dagger(z) \;=\; V(z). \tag{B.19}$$

Auch hier lässt sich die Lösung der Bedingungsgleichung (B.19) in Komponentenschreibweise darstellen,

$$\begin{aligned}V(x,\theta,\bar{\theta}) = {} & C(x) + i\theta\chi(x) - \bar{\theta}\bar{\chi}(x) \\ & + \tfrac{i}{2}\theta\theta(M(x) + iN(x)) - \tfrac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}(M(x) - iN(x)) \\ & - \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu(x) \\ & + i\theta\theta\bar{\theta}(\bar{\lambda}(x) + \tfrac{i}{2}\bar{\sigma}^\nu\partial_\nu\chi(x)) - \bar{\theta}\bar{\theta}\theta(\lambda(x) + \tfrac{i}{2}\sigma^\nu\partial_\nu\bar{\chi}(x)) \\ & + \tfrac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(D(x) + \tfrac{1}{2}\partial^\mu\partial_\mu C(x)) \;\; .\end{aligned} \tag{B.20}$$

Die Komponentenfelder C, D, M, N und v_μ in (B.20) müssen alle reell sein, damit die Bedingung (B.19) erfüllt ist. Seinen Namen erhält das Multiplett von dem auftretenden Vektorfeld v_μ. Es wurden auffallend komplizierte Ausdrücke für die zu den Komponenten $\theta\theta\bar{\theta}$, $\bar{\theta}\bar{\theta}\theta$ und $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ gehörenden Felder verwendet. Dies liegt darin begründet, dass in dieser Schreibweise die Felder unter der verallgemeinerten supersymmetrischen Eichtransformation für Vektorfelder

[4] Der Name Chirale Superfelder bezieht sich auf die Chiralitätsbedingung (B.17) während die Bezeichung Skalares-Superfeld daher rührt, dass das Feld keinen äußeren Lorentzindex trägt.

[5] $(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_\alpha^{\ \beta} \;=\; 2(g^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta}$

$$V \to V + \Phi + \Phi^\dagger \tag{B.21}$$

die Felder λ und D unverändert bleiben. Das Feld Φ $(\Phi^\dagger)$ ist ein beliebiges (anti)chirales Superfeld wie in Gleichung (B.18). Die einzelnen Komponentenfelder von (B.20) transformieren sich nach

$$\begin{aligned}
C &\to C + A + A^\dagger \\
\chi &\to \chi - i\sqrt{2}\psi \\
M + iN &\to M + iN - 2iF \\
v_\mu &\to v_\mu - i\partial_\mu(A - A^\dagger) \\
\lambda &\to \lambda \\
D &\to D.
\end{aligned} \tag{B.22}$$

Es ist möglich, durch eine spezielle Wahl von $\mathrm{Re}(A)$, ψ und F in (B.22) die Felder C, χ, M und N auf Null zu transformieren. Zwar bricht man dadurch zum Teil die Supereichinvarianz, doch es bleibt immer noch die nützliche Eichfreiheit $v_\mu \to v_\mu - i\partial_\mu(A - A^\dagger)$ erhalten. Diese spezielle Wahl der Transformation (B.22) ist die Wess-Zumino Eichung [21]. Sie ist wegen der Vereinfachung, die sie mit sich bringt, von besonderer Bedeutung. Aus dem Vektor-Superfeld (B.20) lässt sich ein chirales Superfeld W_α konstruieren, dessen niedrigste Grassmann-Komponente Spin $\frac{1}{2}$ hat.

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{\hat{D}}_{\dot{}}\bar{\hat{D}}^{\dot{}}\hat{D}_\alpha V \tag{B.23}$$

W_α ist ein chirales Superfeld, das heisst, es erfüllt die Gleichung (B.17), was sich mit Hilfe der Vertauschungseigenschaften (B.16) und der Definition der W_α nachrechnen lässt. Im Unterschied zum allgemeinen chiralen Superfeld trägt seine niedrigste Komponente bereits einen Spinorindex. Es ist bemerkenswert, dass dieses Feld lediglich von den eichinvarianten Komponenten-Feldern D, λ_α und $v_{\mu\nu} = \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu$ abhängt. Da in der Komponentenfeld-Entwicklung von W_α die aus der Elektrodynamik bekannte Feldstärke $v_{\mu\nu} = \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu$ auftaucht, bezeichnet man W_α als supersymmetrische Feldstärke.

B.4 Allgemeine supersymmetrische Lagrangedichte

In diesem Kapitel soll kurz skizziert werden, wie die Felder aus den Kapiteln (B.3.1, B.3.2) in die Lagrangedichte eingebaut werden. Von einer Lagrangedichte fordert man, dass die Wirkung $S = \int \mathrm{d}^4 x \mathcal{L}$ invariant unter den Symmetrietransformationen ist. Die Transformationen sind in dem hier betrachteten Fall die Supersymmetrietransformationen. Invarianz ist nach dem Gaußschen Satz dann gegeben, wenn sich die Lagrangedichte bei einer Supersymmetrietransformation nur um eine totale Divergenz ändert. Es wird dabei noch gefordert, dass alle Felder im Unendlichen genügend stark abfallen, um das das Oberflächenintegral über die Felder dort verschwinden zu lassen. Das geforderte Transformationsverhalten weisen zum Beispiel die Felder $F(x)$ aus (B.18) und $D(x)$ aus (B.20) auf. Die Lagrangedichte kann sich also folgendermaßen zusammensetzen:

$$\mathcal{L}_{\text{Susy}} = (\mathcal{L}_{\text{chiral}}\big|_{\theta\theta} + \mathcal{L}_{\text{antichiral}}\big|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}) + \mathcal{L}_{\text{Vektor}}\big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \qquad \text{mit} \quad F(x) = \phi(z)\big|_{\theta\theta} \quad \text{und} \quad D(x) = V(z)\big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}. \tag{B.24}$$

Die Lagrangedichte soll analog zum Standardmodell kinetische Terme und Potentialterme enthalten,

$$\mathcal{L} \;=\; \mathcal{L}_{\text{kin}} \;+\; \mathcal{L}_{\text{pot}}. \tag{B.25}$$

Aus der Forderung nach Renormierbarkeit wird das Superpotential auf ein Polynom maximal dritten Grades in den Feldern eingeschränkt,

$$W(\Phi) := c_i\Phi_i + \frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3!}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k \quad . \tag{B.26}$$

An die Komponenten des Superpotentials $\mathcal{L}_{\text{ pot}}$ stellt man die Bedingung

$$\mathcal{L}_{pot} = W(\Phi)|_{\theta\theta} + \text{h.c.} \,. \tag{B.27}$$

Da die chiralen Felder Φ untereinander vertauschen, kann man die Indizes von m_{ij}, g_{ijk} als vollkommen symmetrisch annehmen.
Bildet man das Produkt eines chiralen Superfeldes $\Phi(z)$ mit dem dazugehörigen antichiralen Superfeld $\Phi(z)^\dagger$ erhält man ein reelles Superfeld. Den zu D proportionalen Term erhält man, wenn man aus dem komponentenweise geschriebenen Produkt $\Phi(z)^\dagger\Phi(z)$ (B.18) nur den Anteil nimmt, der zu $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ proportional ist. Man erhält dann die kinetischen Terme für Materiefelder

$$L_{\text{kinMat}}(x) := \Phi(z)^\dagger\Phi(z)|_{\theta\theta} = \left[(\partial_\mu A^*)(\partial^\mu A) + \frac{i}{2}(\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi) + \frac{i}{2}(\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}) + F^*F\right]. \tag{B.28}$$

$L_{\text{kinMat}}(x)$ enthält kinetische Terme für die der Spin $s = 0$ und die Spin $s = \frac{1}{2}$ Komponenten des chiralen Superfeldes Φ.

Wie zuvor in Paragraph B.3.2 erwähnt, ist das Feld W_α nur von den Größen D, λ_α und $v_{\mu\nu} = \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu$ abhängig. Daraus ergibt sich, dass W_α invariant unter supersymmetrischen Eichtransformationen (B.22) ist. Allein ist W_α jedoch nicht lorentzinvariant, weshalb man die invariante Kombination $W_\alpha W^\alpha$ bildet. Dir Chrialitätseigenschaft geht durch die Produktbildung nicht verloren. Bei chiralen Superfeldern ist die F-Komponente für die Lagrangedichte von Bedeutung. In Komponentenschreibweise ergibt sich

$$(W^\alpha W_\alpha)|_{\theta\theta} \;=\; 2i(\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}) - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{i}{4}F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} + D^2\,. \tag{B.29}$$

Der dritte Term in (B.29) entfällt, da man für die Lagrangedichte immer den jeweils komplex konjugierten Term addiert. Deshalb ergibt sich

$$L_{\text{kinEich}}(x) \;=\; (\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D^2. \tag{B.30}$$

$L_{\text{kinEich}}(x)$ enthält die kinetischen Terme für die Spin $s = \frac{1}{2}$ und die Spin $s = 1$ Komponente des Vektor-Superfeldes $V(z)$. Das sind die kinetischen Terme für die Eichfelder und ihre Superpartner, die Gauginos (λ).

Der Sachverhalt verkompliziert sich, wenn man die Transformationen (B.21) auf nichtabelsche Transformationen analog zu denen in Kapitel 2 ausweitet. Eine detaillierte Diskussion wird hier nicht ausgeführt (siehe z.B. [21]). Die kinetischen Terme für Materiefelder (B.28) ergeben sich dann zu

$$L_{\text{kinMat}}(x) := \Phi^\dagger e^V\,\Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}. \tag{B.31}$$

Die kinetischen Terme der Eichfelder (B.30) enthalten eine Spur über Produkte von Darstellungsmatrizen der nichtabelschen Eichgruppe

$$L_{\text{kinEich}}(x) \;=\; \frac{1}{4k}\,\mathrm{Tr}((W^\alpha W_\alpha)|_{\theta\theta} + (\bar{W}^{\dot{\alpha}}\bar{W}_{\dot{\alpha}})|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}). \tag{B.32}$$

Insbesondere ist in (B.32) für W_α die im nichtabelschen Fall gültige Form

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\hat{\bar{D}}\hat{\bar{D}}e^{-V}\hat{D}_\alpha e^V\;,$$

zu verwenden. Durch Konjugieren erhält man

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4}\hat{D}\hat{D}((\hat{\bar{D}}_{\dot{\alpha}}e^{-V})e^V)\;.$$

Wie zuvor gehen in die Lagrangedichte lediglich die zu $\theta\theta$ und $\bar{\theta}\bar{\theta}$ proportionalen Komponenten ein, was durch die Schreibweisen $|_{\theta\theta}$ und $|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}$ ausgedrückt wurde. Das Superpotential muss im nichtabelschen Fall nicht umgeschrieben werden und behält die Form (B.26) bei. Zu ihm wird jedoch noch sein konjugiertes (h.c.) addiert, da die gesamte Lagrangedichte hermitesch sein muss. Addiert man die beiden kinetischen Terme zu dem Superpotentialterm, so erhält man die allgemeine supersymmetrische und renormierbare Lagrangedichte.

$$L = \left[\bar{\phi} e^V \phi\right]\Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \frac{1}{4k}\,\mathrm{Tr}\big(\left[W^\alpha W_\alpha\right]\Big|_{\theta\theta} + \mathrm{h.c.}\big) + \left(W(\phi)\Big|_{\theta\theta} + \mathrm{h.c.}\right) \tag{B.33}$$

Nun wird (B.33) wiederum durch seine einzelnen Komponenten ausgedrückt, was aber hier nicht im Detail vorgeführt wird (siehe [21]). Dann kann man mit Hilfe des Lagrangeformalismus die Bewegungsgleichungen der einzelnen Felder ermitteln. Für die beiden Felder F und D aus (B.18) und (B.20) ergibt die Ableitung $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu D)} = 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu F)}$, das heißt, diese Felder besitzen keinen kinetischen Term und sind somit keine dynamischen Größen, weshalb sie mit Hilfe der nach ihnen aufgelösten Bewegungsgleichung aus (B.33) eleminiert werden können.

Anhang C

Renormierung

Die Lagrangedichte das SM oder MSSM enthält eine bestimmte Anzahl freier Parameter, die experimentell bestimmt werden müssen. In niedrigster Ordung der Störungstheorie (Tree-Level) haben die Größen, die in der Lagrangedichte des jeweiligen Modells stehen, eine intuitiv klare Bedeutung. Sie stehen für Massen, Kopplungen, Mischungswinkel oder Ladungen. Geht man jedoch zu höheren Ordnungen der Störungstheorie über, existiert dieser direkte Zusammenhang nicht mehr. Schlimmer noch, die ursprünglichen Parameter in der Lagrangedichte (sogenannte „nackte" Parameter) unterscheiden sich von den physikalisch messbaren Größen duch UV-divergente (dh. unendliche) Beiträge. Die UV-Divergenzen rühren von den Integralen über alle Impulskonfigurationen in den, in höherer Ordnung auftretenden Schleifendiagrammen her. Diese divergenten Integrale müssen regularisiert werden. Dies kann zum Beispiel dadurch geschehen, dass man eine willkürliche Energieobergrenze (Cutoff Λ) für alle Impule in den Schleifendiagrammen einführt, oder indem man die Dimensionalität (D) des Integrals analytisch nach unten fortsetzt ($D = 4-\epsilon$). In beiden Fällen wird ein Regularisierungsparameter ($\Lambda \text{oder} \epsilon$) eingeführt und die Integrale divergieren jeweils für einen gewissen Wert des Parameters ($\Lambda \to \infty \text{oder} \epsilon \to 0$). Durch diese Vorgehensweise werden die Relationen zwischen den Parametern der Lagrangedichte und den physikalischen Größen abhängig vom Regularisierungs-Parameter.

C.1 Das Renormierungs-Schema von Passarino, Veltman und Consoli

In einer renormierbaren Quantenfeldtheorie, wie dem MSSM oder dem SM, heben sich die Cutoff-Parameter bei der Berechnung physikalisch messbarer Größen gegenseitig weg.
Eine Möglichkeit endliche Vorhersagen aus einer renormierbaren Theorie herauszupräparieren, besteht in folgender Vorgehensweise:

- Man berechne die physikalischen Größen in Abhängigkeit von den nackten Parametern und einem Cutoff.

- Man verwende so viele der daraus resultierenden Gleichungen wie man nackte Parameter hat und drücke nun die nackten Parameter durch physikalische Größen aus.

- Zuletzt ersetze man auch in den verbleibenden Ausdrücken die nackten Parameter durch physikalische Größen, indem man die zuvor gewonnenen Relationen verwedet.

Nun hat man Vorhersagen für physikalische Observablen, die von anderen experimentell bestimmten physikalischen Größen abhängen. Hierbei heben sich die UV-Divergenzen in jeder Ordnung Störungstheorie weg. Dies Art und Weise zu renormieren wurde von *Passarino, Veltman* und *Consoli* [39] eingeführt und hierauf basiert auch das so genannte „star“ Renormierungsverfahren von Kennedy und Lynn [40].

C.2 Der Counterterm-Formalismus

Eine Alternative dazu ist der Counterterm-Ansatz. Dabei werden die UV-divergenten nackten Parameter durch endliche renormierte Parameter und divergente Renormierungskonstanten (Counterterme) ausgedrückt. Die Counterterme werden durch Renormierungsbedingungen festgelegt. Diese Bedingungen können frei gewählt werden, sie bestimmen jedoch, sobald sie einmal festgelegt sind, die Relationen zwischen den physikalischen Parametern und den renormierten Parametern. Die Vorgehensweise bei der Counterterm-Renormierung ist folgende:

- Man wähle einen Satz von unabhängigen Parametern.

- Man zerlege die nackten Parameter in renormierte Parameter und in Renormierungskonstanten

- Man drücke die physikalischen Größen durch die renormierten Parameter aus.

- Man setze experimentell bestimmte Werte für die renormierten Parameter ein und berechne daraus weitere physikalisch nachprüfbare Vorhersagen.

Nach den ersten drei Schritten ist ein Renormierungsschema festgelegt. Man kann die Renormierungsbedingungen und somit das Renormierungsschema so wählen, dass die endlichen renormierten Parameter in allen Ordungen Störungstheorie gleich den physikalischen Parametern sind. Ein Vorteil dieser Wahl liegt darin, dass die renormierten Paramter die Bedeutung (Massen, Ladungen) zurückerhalten, die die jeweiligen nackten Parameter in niedrigster Ordnung Störungstheorie hatten.
Im SM sind alle Parameter der Theorie mit Ausnahme von M_H experimentell bekannt. Insbesondere wird die elektromagnetische Kopplungskonstante α durch den Compton-Wirkungsquerschnitt im Thomsonlimes bestimmet, der exakt in allen Ordnungen der Störungstheorie bekannt ist. Dieses von *Ross* und *Taylor* [36] eingeführte, sogenannte „on-shell“

Schema wird bei der Berechnung von Vorhersagen der elektroschwachen Theorie oft verwendet. In dieser Arbeit wurde die Counterterm-Methode angewandt, die in den hier verwendeten Programmen, *FeynArts* und *FormCalc*, bereits größtenteils automatisiert ist.
Im allgemeinen muss man bei Schleifenrechnungen zum MSSM auch die Parameter des MSSM renormieren. Bei den hier betrachteten Prozessen treten Superpartner lediglich innerhalb von Schleifen auf, weshalb die Propagatoren der Superpartner auf 1 Schleifen-Niveau keine weiteren UV-divergenten Beiträge enthalten können. Es genügt also, wenn man die Parameter der auftretenden SM-Teilchen renormiert. In den auftretenden Selbstenergien der SM-Teilchen sind jedoch, wie in Kapitel 4.3 begründet, Superpartnerteilchen zu berücksichtigen.
Durch das Renormieren der Parameter werden die Elemente der Streumatrix (S-Matrix) endlich. Um jedoch auch endliche Greenfunktionen zu erhalten, muss man auch die nackten Felder in der Lagrangedichte durch renormierte Felder ersetzen. Dies macht es möglich, die Lagrangedichte in eine renormierte- und einen Counterterm-Lagrangedichte aufzuspalten. Man spricht in diesem Zusammenhang von Feldrenormierung.

C.2.1 Renormierungskonstanten

In diesem Kapitel werden analog zu *Denner* [41] die renormierten Parameter und Felder anhand der nackten Größen definiert. Die nackten Parameter und Felder wurden jeweils mit einer tiefgestellten 0 versehen. Man definiert für die Parameter-Renormierung

$$\begin{aligned} e_0 &= Z_e e = (1+\delta Z_e)e, \\ M^2_{W,0} &= M^2_W + \delta M^2_W, \\ M^2_{Z,0} &= M^2_Z + \delta M^2_Z, \\ M^2_{H,0} &= M^2_H + \delta M^2_H, \\ m_{f,i,0} &= m_{f,i} + \delta m_{f,i}. \end{aligned} \tag{C.1}$$

Nach Kapitel 4.3 wurde von der Definition der Renormierungskonstanten der CKM-Matrix abgesehen. δM_H^2 wird wegen der unterdrückten und vernachlässigbaren Kopplung an die leichten Fermionen nicht benötigt.

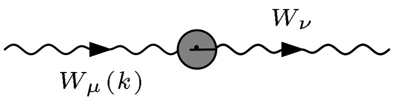
Nach [41] definiert man die Feld-Renormierung wie folgt:

$$\begin{aligned} W_0^{\pm} &= Z_W^{\frac{1}{2}} W^{\pm} = (1+\tfrac{1}{2}\delta_{ZW})W^{\pm}, \\ \begin{pmatrix} Z_0 \\ A_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Z_{ZZ}^{\frac{1}{2}} & Z_{ZA}^{\frac{1}{2}} \\ Z_{AZ}^{\frac{1}{2}} & Z_{AA}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{2}\delta Z_{ZZ} & \frac{1}{2}\delta Z_{ZA} \\ \frac{1}{2}\delta Z_{AZ} & 1+\frac{1}{2}\delta Z_{AA} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_0 \\ A_0 \end{pmatrix}, \\ H_0 &= Z_H^{\frac{1}{2}} H = (1+\tfrac{1}{2}\delta Z_H)H, \\ f_{i,0}^L &= Z_{ij}^{\frac{1}{2},f,L} f_j^L = (\delta_{ij}+\tfrac{1}{2}\delta Z_{ij}^{f,L}) f_j^L, \\ f_{i,0}^R &= Z_{ij}^{\frac{1}{2},f,R} f_j^R = (\delta_{ij}+\tfrac{1}{2}\delta Z_{ij}^{f,R}) f_j^R. \end{aligned} \tag{C.2}$$

Aus der ursprünglichen Wahl der Eichung gehen noch unphysikalische Geist- und Higgs-Felder hervor, die hier jedoch nicht benötigt werden, da sie weder in die Greenfunktionen noch in die S-Matrix eingehen. Wie bereits erwähnt, ermöglicht es die Feld- und Parameter-Renormierung, die ursrpüngliche Lagrangedichte $\mathcal{L}_0$ in eine renormierte Lagrangedichte $\mathcal{L}$ und eine Counterterm-Lagrangedichte $\delta\mathcal{L}$ aufzuteilen. Für $\mathcal{L}$ gelten dieselben Feynmanregeln wie für $\mathcal{L}_0$, wohingegen für $\delta\mathcal{L}$ gesondert Feynmanregeln abgeleitet werden müssen. Diese Feynmanregeln spiegeln sich in den Counterterm-Diagrammen wieder.

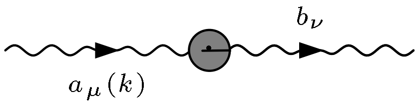
C.2.2 Renormierungsbedingungen

Es gibt zwei Typen von Renormierungsbedingungen. Einerseits die Bedingungen, durch welche die renormierten Parameter festgelegt werden, und andererseits die Bedingungen, durch welche die renormierten Felder festgelegt werden. Wie bereits erwähnt wird hier das „on-shell"-Schema angewandt. Von nun an werden renormierte Größen im Unterschied zu den unrenormierten Größen mit einen $\hat{}$ versehen. Man benötigt die renormierten Ein-Teilchen-irreduziblen N-Punkt-Funktionen:



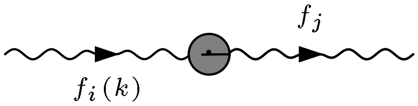
$$= \hat{\Gamma}^{W}_{\mu\nu}(k)$$

$$= -ig_{\mu\nu}(k^2 - M_W^2) - i(g_{\mu\nu} - \tfrac{k_\mu k_\nu}{k^2})\hat{\Sigma}^W_T(k^2) - i\tfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}\hat{\Sigma}^W_L(k^2), \tag{C.3}$$



$$= \hat{\Gamma}^{ab}_{\mu\nu}(k)$$

$$= -ig_{\mu\nu}(k^2 - M_W^2)\delta^{ab} - i(g_{\mu\nu} - \tfrac{k_\mu k_\nu}{k^2})\hat{\Sigma}^{ab}_T(k^2) - i\tfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}\hat{\Sigma}^{ab}_L(k^2),$$



$$= \hat{\Gamma}^{ab}_{\mu\nu}(k)$$

$$\begin{aligned} &= i\delta_{ij}(p^\mu\gamma_\mu - m_{f,i}) \\ &\quad + i(p^\mu\gamma_\mu\omega_-\hat{\Sigma}^{f,L}_{ij}(p^2) + p^\mu\gamma_\mu\omega_+\hat{\Sigma}^{f,R}_{ij}(p^2)) + (m_{f,i}\omega_- + m_{f,j}\omega_+)\hat{\Sigma}^{f,S}_{ij}(p^2)). \end{aligned}$$

Hier wurden die Feynmanregeln der 't Hooft-Feynman-Eichung verwendet und es gilt $a,\ b = A,\ Z$, mit $M_A^2 = 0$. Der Index L steht für longitudinale und der Index T für transversale Polarisation. Man fordert nun, dass die transversalen Propagatoren ihren Pol bei der physikalischen Masse (m) des jeweiligen Teilchens haben, was gleichbedeutend damit ist, dass die Zweipunktfunktionen für $p^2 = m^2$ gleich Null sind. Man fordert des Weiteren, dass die Propagator-Matrizen der Fermionen ebenfalls on-shell-Bedingungen erfüllen. Die Massenmatrizen sollen im Fall, dass die äußeren Teilchen auf der Massenschale liegen, diagonale Gestalt annehmen und die Residuen der renormierten Propagatoren sollen eins sein. Mathematisch formuliert lauten diese Bedingungen:

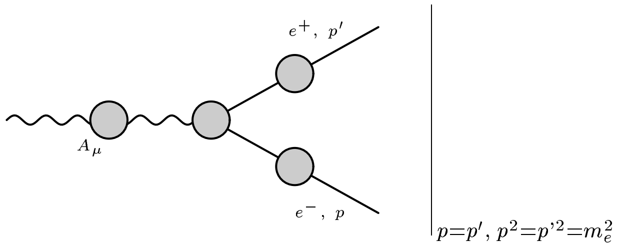
$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{Re}\,\hat{\Gamma}^{W}_{\mu\nu}(k)\epsilon^{\nu}(k)|_{k^2=M_W^2} = 0, & \\
\mathrm{Re}\;\hat{\Gamma}^{ZZ}_{\mu\nu}(k)\epsilon^{\nu}(k)|_{k^2=M_Z^2} = 0, & \mathrm{Re}\;\hat{\Gamma}^{AZ}_{\mu\nu}(k)\epsilon^{\nu}(k)|_{k^2=M_Z^2} = 0, \\
\hat{\Gamma}^{AZ}_{\mu\nu}(k)\epsilon^{\nu}(k)|_{k^2=0} = 0, & \hat{\Gamma}^{AA}_{\mu\nu}(k)\epsilon^{\nu}(k)|_{k^2=0} = 0, \\
\lim_{k^2\to M_W^2}\;\frac{1}{k^2-M_W^2}\mathrm{Re}\;\hat{\Gamma}^{W}_{\mu\nu}(k)\epsilon^{\nu}(k) = -i\epsilon_{\mu}(k), & \\
\lim_{k^2\to M_W^2}\;\frac{1}{k^2-M_W^2}\mathrm{Re}\;\hat{\Gamma}^{ZZ}_{\mu\nu}(k)\epsilon^{\nu}(k) = -i\epsilon_{\mu}(k), & \lim_{k^2\to M_W^2}\;\frac{1}{k^2}\mathrm{Re}\;\hat{\Gamma}^{AA}_{\mu\nu}(k)\epsilon^{\nu}(k) = -i\epsilon_{\mu}(k), \\
\mathrm{Re}\,\hat{\Gamma}^{f}_{ij}(p)u_i(p)|_{p^2=m^2_{f,j}} = 0, & \mathrm{Re}\,\bar{u}_i(p)\hat{\Gamma}^{f}_{ij}(p)|_{p^2=m^2_{f,j}} = 0, \\
\lim_{p^2\to m^2_{f,i}}\;\frac{p^{\mu}\gamma_{\mu}+m_{f,i}}{p^2-m^2_{f,i}}\tilde{\mathrm{Re}}\hat{\Gamma}^{f}_{ii}(p)u_i(p) = iu_i(p), & \lim_{p^2\to m^2_{f,i}}\;\bar{u}_i(p)\tilde{\mathrm{Re}}\hat{\Gamma}^{f}_{ii}(p)\frac{p^{\mu}\gamma_{\mu}+m_{f,i}}{p^2-m^2_{f,i}} = i\bar{u}_i(p).
\end{array}
\tag{C.4}
$$

$\epsilon^{\nu}(k)$ sind Polarisationsvektoren und $u_i(p)$ bzw.$\bar{u}_i(p)$ Spinoren der äußeren Felder. Re nimmt den reellen Anteil des gesamten Terms. Setzt man Gleichung (C.3) in Gleichung (C.4) ein und verwendet die Klein-Gordon-Gleichung, bzw. die Dirac-Gleichung, so erhält man Bedingungen für die Selbstenergiefunktionen:

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}^{W}_{T}(M_W^2) = 0, & \\
\mathrm{Re}\;\hat{\Sigma}^{ZZ}_{T}(M_Z^2) = 0, & \mathrm{Re}\;\hat{\Sigma}^{AZ}_{T}(M_Z^2) = 0, \\
\hat{\Sigma}^{AZ}_{T}(0) = 0, & \hat{\Sigma}^{AA}_{T}(0) = 0, \\
\mathrm{Re}\,\frac{\partial\hat{\Sigma}^{W}_{T}(k^2)}{\partial k^2}|_{k^2=M_W^2} = 0, & \\
\mathrm{Re}\,\frac{\partial\hat{\Sigma}^{ZZ}_{T}(k^2)}{\partial k^2}|_{k^2=M_Z^2} = 0, & \mathrm{Re}\,\frac{\partial\hat{\Sigma}^{AA}_{T}(k^2)}{\partial k^2}|_{k^2=0} = 0,
\end{array}
\tag{C.5}
$$

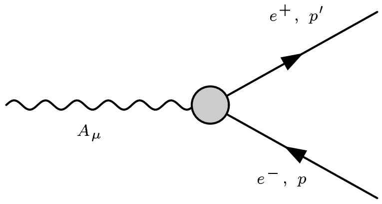
$$
\begin{aligned}
m_{f,i}\,\mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}^{f,L}_{ij}(m^2_{f,i}) + (m^2_{f,i})\,\mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}^{f,S}_{ij} &= 0, \\
m_{f,i}\,\mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}^{f,R}_{ij}(m^2_{f,i}) + (m^2_{f,i})\,\mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}^{f,S}_{ij} &= 0, \\
\mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}^{f,R}_{ij}(m^2_{f,i}) + \mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}^{f,L}_{ij}(m^2_{f,i}) + 2m^2_{f,i}\frac{\partial}{\partial p^2}(\mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}^{f,R}_{ij}(m^2_{f,i}) & \\
+ \mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}^{f,L}_{ij}(m^2_{f,i}) + \mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}^{f,S}_{ij}(m^2_{f,i}))|_{p^2=m^2_{f,i}} &= 0.
\end{aligned}
$$

In Gleichung (C.5) kommen keine longitudinalen Selbstenergien der Eichbosonen mehr vor, da diese unphysikalisch sind. Einige dieser Relationen müssen untereinander Ward-Identitäten erfüllen. Die Ward-Identitäten sind also eine Möglichkeit zu überprüfen, ob die Gleichungen (C.5) richtig abgeleitet wurden.
Die elektrische Ladung wird -wie eingangs erwähnt- im Thomson-Limes definiert. Der Thomson-Limes ist der Niederenergie-Limes der Elektron-Photon-Streuung. Bei Compton-Streuung, das heißt bei Impulsübertrag Null und wenn die äußeren Teilchen auf ihrer Massenschale liegen, gilt:



$$= ie\bar{u}(p)\gamma_\mu u(p). \tag{C.6}$$

Aufgrund der Wahl der Feldrenormierungsbedingungen in Gleichung (C.5) verschwinden die Korrekturen der äußeren Beine und die Bedingung (C.6) vereinfacht sich zu einer Bedingung für die Vertexfunktion $\hat{\Gamma}_\mu^{ee\gamma}(p,p')$,



$$= \hat{\Gamma}_\mu^{ee\gamma}(p,p'). \tag{C.7}$$

Die Bedingung lautet:

$$\bar{u}(p)\hat{\Gamma}_\mu^{ee\gamma}(p,p)u(p)\big|_{p^2=m_e^2} = ie\bar{u}(p)\gamma_\mu u(p). \tag{C.8}$$

C.2.3 Explizite Form der Renormierungskonstanten

Setzt man die Definitionen der Renormierungskonstanten aus Gleichung (C.2) bei den vorkommenden Selbstenergieen ein und verwendet anschließend die Renormierungsbedingungen (C.5), so erhält man die Renormierungskonstanten in Abhängigkeit von den unrenormierten Selbstenergieen. Für die Eichboson-, Feld- und Massen-Renormierungskonstanten sind dies

$$\begin{aligned}
\delta M_W^2 &= \mathrm{Re}\,\Sigma_T^W(M_W^2), & \delta Z_W &= -\,\mathrm{Re}\left.\frac{\partial \Sigma_T^W(k^2)}{\partial k^2}\right|_{k^2=M_W^2}, \\
\delta M_Z^2 &= \mathrm{Re}\,\Sigma_T^{ZZ}(M_W^2), & \delta Z_Z &= -\,\mathrm{Re}\left.\frac{\partial \Sigma_T^{ZZ}(k^2)}{\partial k^2}\right|_{k^2=M_Z^2}, \\
\delta Z_{AZ} &= -2\mathrm{Re}\,\frac{\Sigma_T^{AZ}(M_Z^2)}{M_Z^2}, & \delta Z_{ZA} &= -2\mathrm{Re}\,\frac{\Sigma_T^{ZA}(0)}{M_Z^2}, \\
\delta Z_{AA} &= \left.\frac{\partial \Sigma_T^{AA}(k^2)}{\partial k^2}\right|_{k^2=0}.
\end{aligned} \tag{C.9}$$

Im fermionischen Sektor erhält man mit derselben Vorgehensweise analog zu Gleichung (C.10) die Massen- und Feld-Renormierungskonstanten für die Fermionen.

$$\begin{aligned}
\delta m_{f,i} &= \tfrac{m_{f,i}}{2}\,\mathrm{Re}(\Sigma_{ii}^{f,L}(m_{f,i}^2)+\Sigma_{ii}^{f,R}(m_{f,i}^2)+\Sigma_{ii}^{f,S}(m_{f,i}^2)),\\
\delta Z_{ij}^{f,L} &= \tfrac{2}{m_{f,i}^2-m_{f,j}^2}\,\mathrm{Re}(m_{f,i}^2\Sigma_{ii}^{f,L}(m_{f,i}^2)+m_{f,i}^2 m_{f,j}^2\Sigma_{ii}^{f,R}(m_{f,i}^2)\\
&\quad +(m_{f,i}^2+m_{f,j}^2)\Sigma_{ii}^{f,S}(m_{f,i}^2)),\ i\neq j,\\
\delta Z_{ij}^{f,R} &= \tfrac{2}{m_{f,i}^2-m_{f,j}^2}\,\mathrm{Re}(m_{f,i}^2\Sigma_{ii}^{f,R}(m_{f,i}^2)+m_{f,i}^2 m_{f,j}^2\Sigma_{ii}^{f,L}(m_{f,i}^2)\\
&\quad +(2m_{f,i}m_{f,j})\Sigma_{ii}^{f,S}(m_{f,i}^2)),\ i\neq j,\\
\delta Z_{ii}^{f,L} &= -\mathrm{Re}\,\Sigma_{ii}^{f,L}(m_{f,i^2})-m_{f,i}^2\tfrac{\partial}{\partial p^2}\mathrm{Re}(\Sigma_{ii}^{f,L}(m_{f,i^2})+\Sigma_{ii}^{f,R}(m_{f,i^2})+\Sigma_{ii}^{f,S}(m_{f,i^2}))|_{p^2=m_{f,i}^2},\\
\delta Z_{ii}^{f,R} &= -\mathrm{Re}\,\Sigma_{ii}^{f,R}(m_{f,i^2})-m_{f,i}^2\tfrac{\partial}{\partial p^2}\mathrm{Re}(\Sigma_{ii}^{f,L}(m_{f,i^2})+\Sigma_{ii}^{f,R}(m_{f,i^2})+\Sigma_{ii}^{f,S}(m_{f,i^2}))|_{p^2=m_{f,i}^2}.
\end{aligned} \tag{C.10}$$

Es wird nochmal betont, dass es sich hier in beiden Fällen wirklich um Konstanten handelt, da die unrenormierten Selbstenergien, die die Renormierungskonstanten definieren, an einem festen Punkt (z.B. $k^2 = M^2$) ausgewertet werden.

Wenn man wiederum von der CKM-Matrix-Renormierung absieht, bleibt nur noch δZ_e zu bestimmen. Dieses wird von dem $ff\gamma$-Vertex (Fermion, Fermion, Photon) festgelegt. Die renormierte Vertexfunktion lässt sich in

$$\hat{\Gamma}_{ij,\mu}^{\gamma ff}(p,p') \;=\; -ie\delta_{ij}Q_f\gamma_\mu + ie\Lambda_{ij,\mu}^{\gamma ff}(p,p') \tag{C.11}$$

zerlegen. Da die äußeren Fermionen auf ihrer Massenschale liegen („on-shell“ sind) kann $\Lambda_{ij,\mu}^{\gamma ff}$ noch weiter zerlegt werden,

$$\Lambda_{ij,\mu}^{\gamma ff}(p,p') = \delta_{ij}(\gamma_\mu\hat{\Lambda}_V^f(k^2) - \gamma_\mu\gamma_5\hat{\Lambda}_A^f(k^2) + \frac{(p+p')_\mu}{2m_f}\hat{\Lambda}_S^f(k^2) + \frac{(p-p')_\mu}{2m_f}\gamma_5\hat{\Lambda}_P^f(k^2))\ . \tag{C.12}$$

Um nun die renormierten Größen durch die unrenormierten ausdrücken zu können, muss man auf die Renormierungsbedingung (C.7) zurückgreifen. Aus ihr ergibt sich eine Bedingung für den Fall, dass $p = p'$ und $f = e$ gilt.

$$\begin{aligned}
0 &= \bar{u}(p)\hat{\Lambda}_{ii,\mu}^{\gamma ff}(p,\ p)u(p)\\
&= \bar{u}(p)\gamma_\mu u(p)\left[-Q_f(\delta Z_e+\delta Z_{ii}^{f,V}+\tfrac{1}{2}\delta Z_{AA})+\Lambda_V^f(0)+\Lambda_S^f(0)+v_f\tfrac{1}{2}\delta Z_{ZA}\right]\\
&\quad -\bar{u}(p)\gamma_\mu\gamma_5 u(p)\left[-Q_f\delta Z_{ii}^{f,A}+\Lambda_A^f(0)+a_f\tfrac{1}{2}\delta Z_{ZA}\right]\ .
\end{aligned} \tag{C.13}$$

In Gleichung (C.13) ist

$$\delta Z_{ii}^{f,V} \;=\; \frac{1}{2}(\delta Z_{ii}^{f,L}+\delta Z_{ii}^{f,LR}), \quad \delta Z_{ii}^{f,A} \;=\; \frac{1}{2}(\delta Z_{ii}^{f,L}-\delta Z_{ii}^{f,LR}), \tag{C.14}$$

und v_f, v_a sind die Vektor- und Axialvektor-Kopplungen des Z-Bosons an das Fermion f. Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von γ_μ und $\gamma_\mu\gamma_5$ müssen zwei Bedingungen erfüllt sein, damit Gleichung (C.13) gültig ist:

$$\begin{aligned} 0 &= -Q_f(\delta Z_e + \delta Z_{ii}^{f,V} + \tfrac{1}{2}\delta Z_{AA}) + \Lambda_V^f(0) + \Lambda_S^f(0) + v_f\tfrac{1}{2}\delta Z_{ZA}, \\ 0 &= -Q_f\delta Z_{ii}^{f,A} + \Lambda_A^f(0) + a_f\tfrac{1}{2}\delta Z_{ZA}. \end{aligned} \tag{C.15}$$

Mit Hilfe einer Ward-Identität [37, 38], aus der auch die zweite Gleichung in (C.15) folgt, kann man aus der ersten Gleichung in (C.15) unter Verwendung der Relation $v_f - a_f = -Q_f\frac{\sin\theta_W}{\cos\theta_W}$ eine Bestimmungsgleichung für die Renormierungskonstante δZ_e ableiten:

$$\delta Z_e = -\frac{1}{2}\delta Z_{AA} - \frac{\sin\theta_W}{2\cos\theta_W}\delta Z_{ZA} = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial\Sigma_T^{AA}(k^2)}{\partial k^2}\right|_{k^2=0} - \frac{\sin\theta_W}{\cos\theta_W}\frac{\Sigma_T^{AZ}}{M_Z^2} \ . \tag{C.16}$$

Der in Gleichung (C.16) vorkommende Mischungswinkel ist im on-shell-Schema wie in Gleichung (2.11) als

$$\sin^2\theta_W = s_W^2 = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2} \tag{C.17}$$

definiert. Allerdings sind die in Gleichung (C.17) auftauchenden Massen der Eichbosonen renormierte Massen. Somit ist diese Definition prozessunabhängig und in jeder Ordnung Störungstheorie gültig. Da man jedoch meistens ausgehend von einer unrenormierten Annahme für einen Parameter zu einer Aussage über die Korrekturen aufgrund der Schleifeneffekte gelangen will, definiert man sich

$$c_{W,0} = c_W + \delta c_W, \quad s_{W,0} = s_W + \delta s_W, \tag{C.18}$$

Damit die Interpretation von θ_W als Mischungswinkel in jeder Ordnung Störungstheorie Sinn mach, fordert man

$$c_{W,0}^2 + s_{W,0}^2 = 1 = s_W^2 + c_W^2 \ . \tag{C.19}$$

Mit den Definitionen (C.17) und (C.1) kann man z.B. $\frac{\delta c_W}{c_W}$ durch M_W^2 und δM_W^2 ausdrücken. Wenn man anschließend diesen Ausdruck nach δM_W^2 entwickelt und alle Potenzen mit der Ordnung $\delta > 1$ weglässt, erhält man $\frac{\delta c_W}{c_W}$ gültig in erster Ordnung Störungstheorie:

$$\frac{\delta c_W}{c_W} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta M_W^2}{M_W^2} - \frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\Sigma_T^W(M_W^2)}{M_W^2} - \frac{\Sigma_T^{ZZ}(M_W^2)}{M_Z^2}\right) \ . \tag{C.20}$$

Hieraus kann man unter Verwendung der Bedingungen (C.19) auch $\frac{\delta s_W}{s_W}$ in erster Ordnung Störungstheorie ableiten.

$$\frac{\delta c_W}{c_W} = -\frac{c_W^2}{s_W^2}\frac{\delta c_W}{c_W} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\left(\frac{\Sigma_T^W(M_W^2)}{M_W^2} - \frac{\Sigma_T^{ZZ}(M_W^2)}{M_Z^2}\right)\,. \tag{C.21}$$

Nun sind die in Gleichung (C.1) definierten Renormierungskonstanten durch Selbstenergien ausgedrückt und somit können Prozesse in Ein-Schleifen-Ordung berechnet werden.

C.2.4 Selbstenergien

Für die Berechnung der MSSM-Effekte in Gleichung (4.35) sind nur Korrekturen relevant, die aus Schleifen kommen, die Superpartnerteilchen enthalten. Deshalb ist es ausreichend, in den Selbstenergien welche die Renormierungskonstanten definieren, ebenfalls nur Superpartnerteilchen zu erlauben. Die in den folgenden Abbildungen vorkommenden Superpartner-Teilchen sind:

- Neutralinos $\tilde{\chi}_i$ mit ($i = 1$, ..., 4),
- Charginos $\tilde{\chi}_i$ mit ($i = 1$, 2),
- Squarks $\tilde{u}_i$, $\tilde{d}_i$ mit ($i = 1$, 2, 3),
- Sleptonen $\tilde{\nu}_i$, $\tilde{e}_i$ mit ($i = 1$, 2, 3).

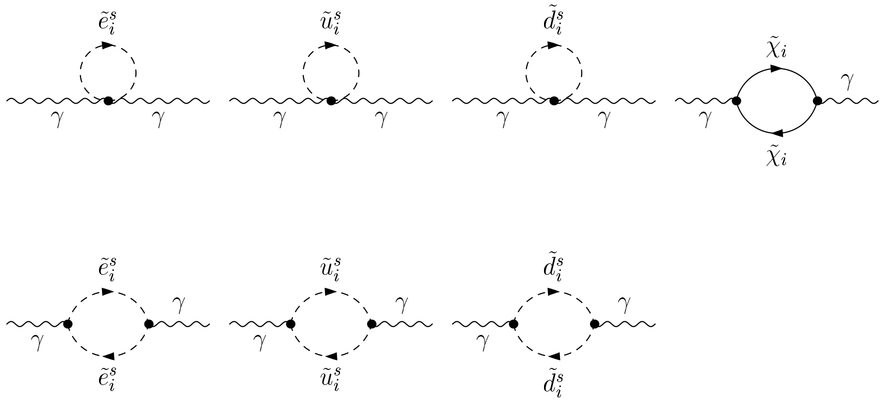


Abbildung C.1: *Superpartner-Anteil der Photon Selbstenerie*

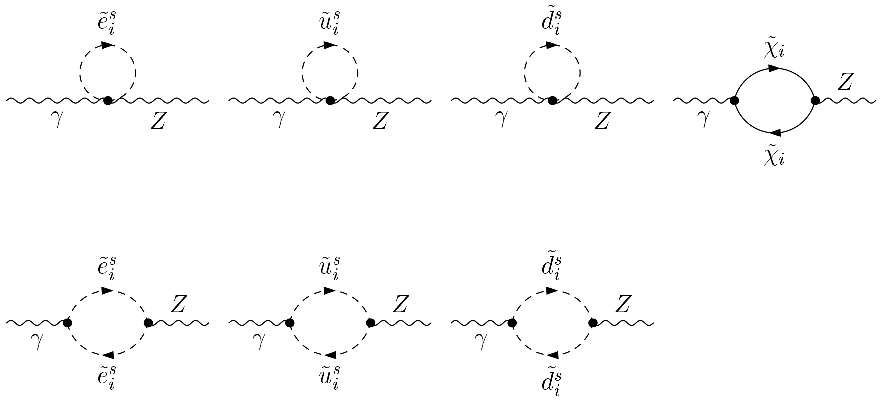


Abbildung C.2: *Superpartner-Anteil der Selbstenerie des Photon-Z-Propagators*

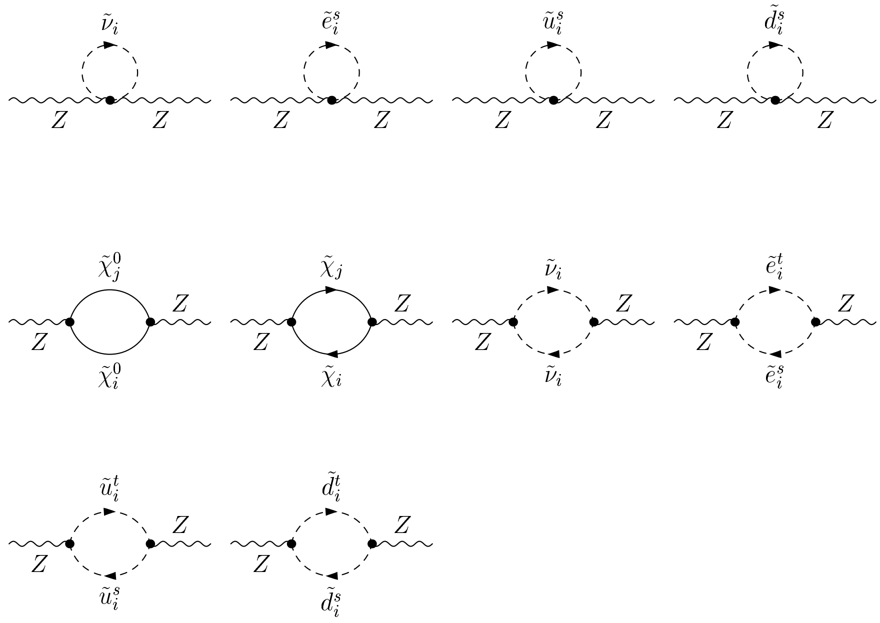


Abbildung C.3: *Superpartner-Anteil der Selbstenerie des Z-Propagators*

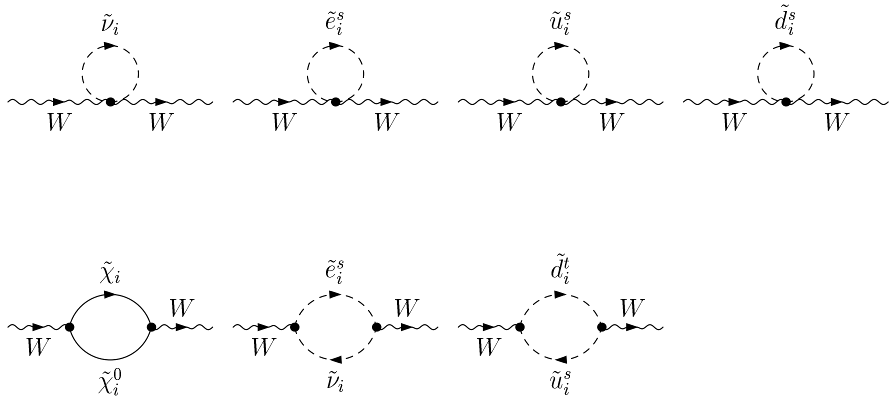


Abbildung C.4: *Superpartner-Anteil der Selbstenerie des W-Propagators*

C.3 Divergenzstruktur der Ein-Schleifen-Integrale

Die sowohl in der Amplitude der unrenormierten Feynmangraphen, als auch in der Countertermamplitude auftretenden divergenten Ein-Schleifen-Integrale nehmen bei dimensionaler Regularisierung die allgemeine Form

$$T^N_{\mu_1...\mu_P}(p_1,...,P_{N-1},m_0,...,m_{N-1}) = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2}\int \mathrm{d}^D q \frac{q_{\mu_1}...q_{\mu_P}}{D_0...D_{N-1}}, \tag{C.22}$$

an, wobei

$$D_0 = q^2 - m_0^2 + i\epsilon, \quad D_i = (q+p_i)^2 - m_i^2 + i\epsilon, \quad i = 1,...,N-1 \,. \tag{C.23}$$

Es ist üblich die Notation $T^1 \equiv A$, $T^2 \equiv B$ ... einzuführen. Bei dimensionaler Regularisierung wird die Dimension des Integrals stetig durch einen kleinen Parameter ϵ so verändert, dass das Ergebnis des Integrals eine endliche Grösse ist, die von ϵ abhängt. Definiert man $D = 4-\epsilon$ so hat man die Integrale $T^N_{\mu_1...\mu_P}$ regularisiert. Die skalaren Funktionen $A(m)$ und $B_0(p^2,m_1,m_2)$ können analytisch in $D = 4-\epsilon$ Dimensionen berechnet werden. Der Faktor μ stellt sicher, dass das die Wirkung (das D-dimensionale Integral über die Lagrangedichte) auch nach der Veränderung der Dimension keine Einheit trägt. Die Funktionen $B_\mu(p^2,m_1,m_2)$ bzw. $B_{\mu\nu}(p^2,m_1,m_2)$ sind Tensorintegrale erster bzw zweiter Stufe, die nach Lorentz-Kovarianten entwickelt werden können.

$$\begin{aligned} B_\mu(p^2,m_1,m_2) &= p_\mu B_1(p^2,m_1,m_2), \\ B_{\mu\nu}(p^2,m_1,m_2) &= g_{\mu\nu}B_{00}(p^2,m_1,m_2) + p_\mu p_\nu B_{11}(p^2,m_1,m_2). \end{aligned} \tag{C.24}$$

Die Entwicklung des dimensional regularisierten Integralausdrucks für $A_0(m)$ und $B_0(p^2,m_1,m_2)$ mit der verallgemeinerten Raumdimension $D = 4-\epsilon$ um $\epsilon = 0$ ergibt:

$$\begin{gathered} A_0(m) = m^2(\Delta + \ln\tfrac{\mu^2}{m^2}) + \mathcal{O}(\epsilon) \\ B_0(p^2,m_1,m_2) = \Delta - \textstyle\int \mathrm{d}x \ln\dfrac{p^2x^2 - x(p^2+m_1^2-m_2^2)+m_1^2}{\mu^2} + +\mathcal{O}(\epsilon) \end{gathered} \tag{C.25}$$

Die Größe Δ wir in Gleichung (C.28) erklärt. Die skalaren Koeffizientenfunktionen $B_1(p^2,m_1,m_2)$, $B_{00}(p^2,m_1,m_2)$ und $B_{11}(p^2,m_1,m_2)$ können durch die Funktionen $A(m)$ und $B_0(p^2,m_1,m_2)$ ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} B_1(p^2,m_1,m_2) &= \tfrac{1}{2p^2}\left[A(m_1) - A(m_2) + (m_2^2-m_1^2-p^2)B_0(p^2,m_1,m_2)\right] \,, \\ B_{00}(p^2,m_1,m_2) &= \tfrac{1}{D-1}\left[\tfrac{1}{2}A(m_2) + m_1^2B_0(p^2,m_1,m_2) - \tfrac{m_2^2-m_1^2-p^2}{2}B_1(p^2,m_1,m_2)\right] \,, \\ B_{11}(p^2,m_1,m_2) &= \tfrac{1}{p^2}\left[\tfrac{1(D-2)}{2(D-1)}A(m_2) - \tfrac{1}{D-1}m_1^2B_0(p^2,m_1,m_2)\right. \\ &\qquad \left. + \tfrac{D}{D-1}\tfrac{m_2^2-m_1^2-p^2}{2}B_1(p^2,m_1,m_2)\right] \,. \end{aligned} \tag{C.26}$$

Nach der Renormierung darf das Ergebniss für eine berechnete physikalische Größe jedoch keinerlei Abhängigkeit von dem Regularisierungsparameter ϵ haben. Um dies zu überprüfen, entwickelt man die skalaren Funktionen nach ϵ und kontrolliert ob sich die in ϵ divergenten Terme gegenseitig wegheben. In den Amplituden aus Anhang D kommen neben den in Gleichung (C.25) definierten Funktionen noch

$$\begin{aligned} B_1(m^2) &= -\frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0)\ , \\ B_{00}(p^2, m_1^2, m_2^2) &= (\tfrac{m_1^2+m_2^2}{2} - \tfrac{p^2}{6})\frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0)\ , \\ \frac{\partial B_{00}(p^2, m_1^2, m_2^2)}{\partial p^2} &= -\frac{1}{6\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0)\ , \end{aligned} \tag{C.27}$$

vor. Bei den in dieser Arbeit berechneten Amplituden wurde die Größe

$$\Delta = \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \tag{C.28}$$

und μ (siehe Gleichung (C.25)) über einen Wertebereich von $10^0 - 10^7$ variiert. Dabei ist γ_E die als Euler-Konstante bekannte Zahl, die der Ableitung der Gammafunktion $\Gamma(x)$ im Punkt $x = 1$ bis auf das Vorzeichen entspricht.

$$\gamma_E = -\Gamma'(1) = 0.577... \tag{C.29}$$

Es konnte festgestellt werden, dass die berechneten Streuamplituden innerhalb der numerischen Genauigkeit von Δ und μ unabhängig sind.

Anhang D

Feynman-Diagramme

In diesem Kapitel werden die in 4.6.1 aufgelisteten Feynman-Diagramme dargestellt. Um eine kompaktere Darstellungzu ermöglichen, wurden die Diagramme, die sich nur durch die Art der äusseren Quarks unterscheiden, zusammengefasst, wobei zu berücksichtigen ist, dass nur das Quark auslaufen darf, das nach Kapitel 4.1 zu dem einlaufenden Quark passt.

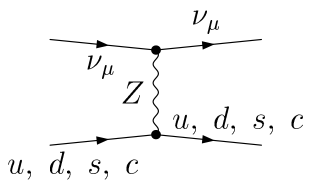


Abbildung D.1: *Bornsche Näherung für Neutrino-Parton-Prozesse mit neutralem Strom.*

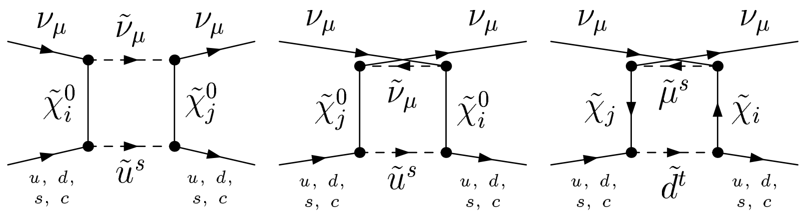


Abbildung D.2: *Box-Diagramme für Neutrino-Parton-Prozesse mit neutralem Strom.*

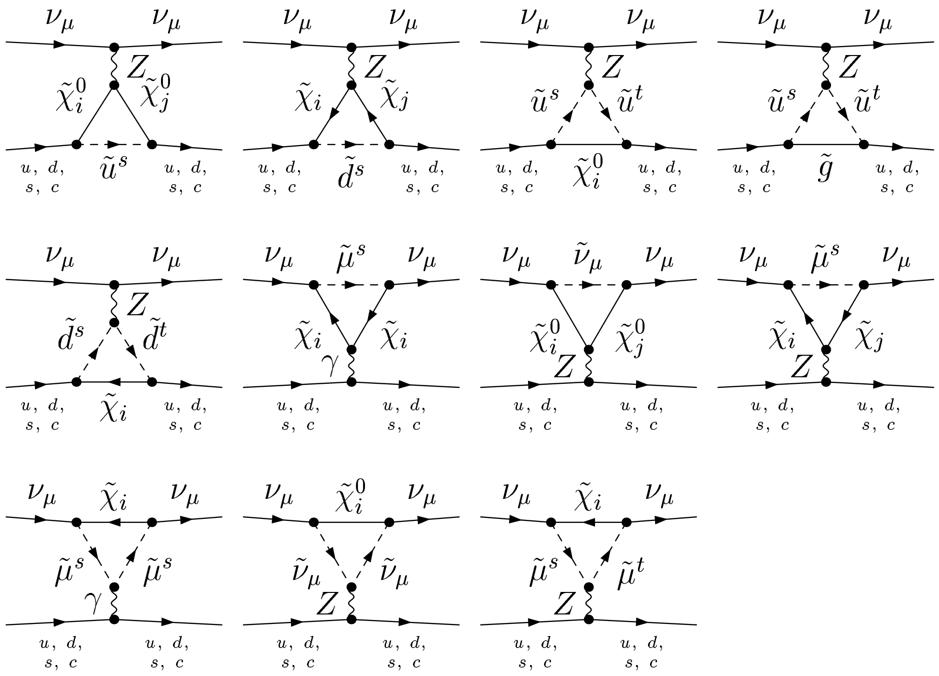


Abbildung D.3: *Dreiecks-Diagramme für Neutrino-Parton-Prozesse mit neutralem Strom.*

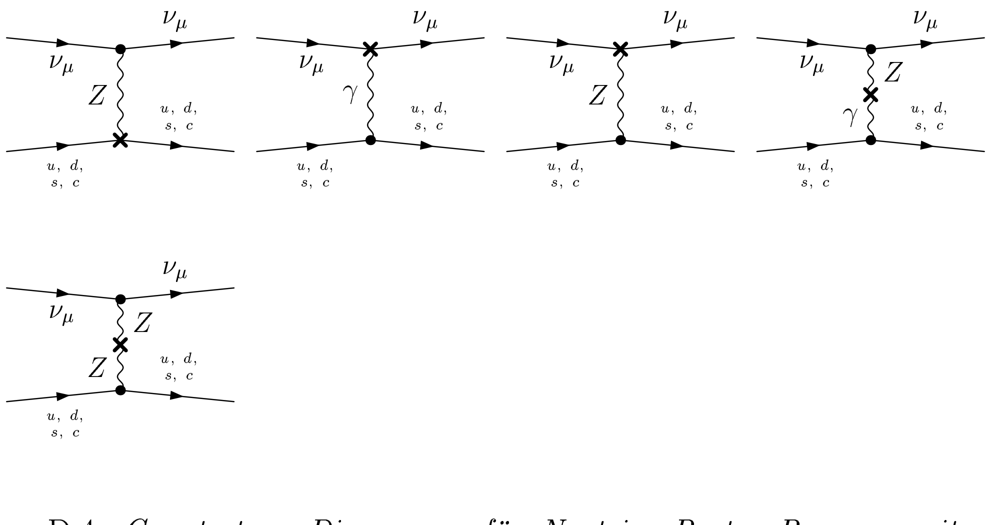


Abbildung D.4: *Counterterm-Diagramme für Neutrino-Parton-Prozesse mit neutralem Strom.*

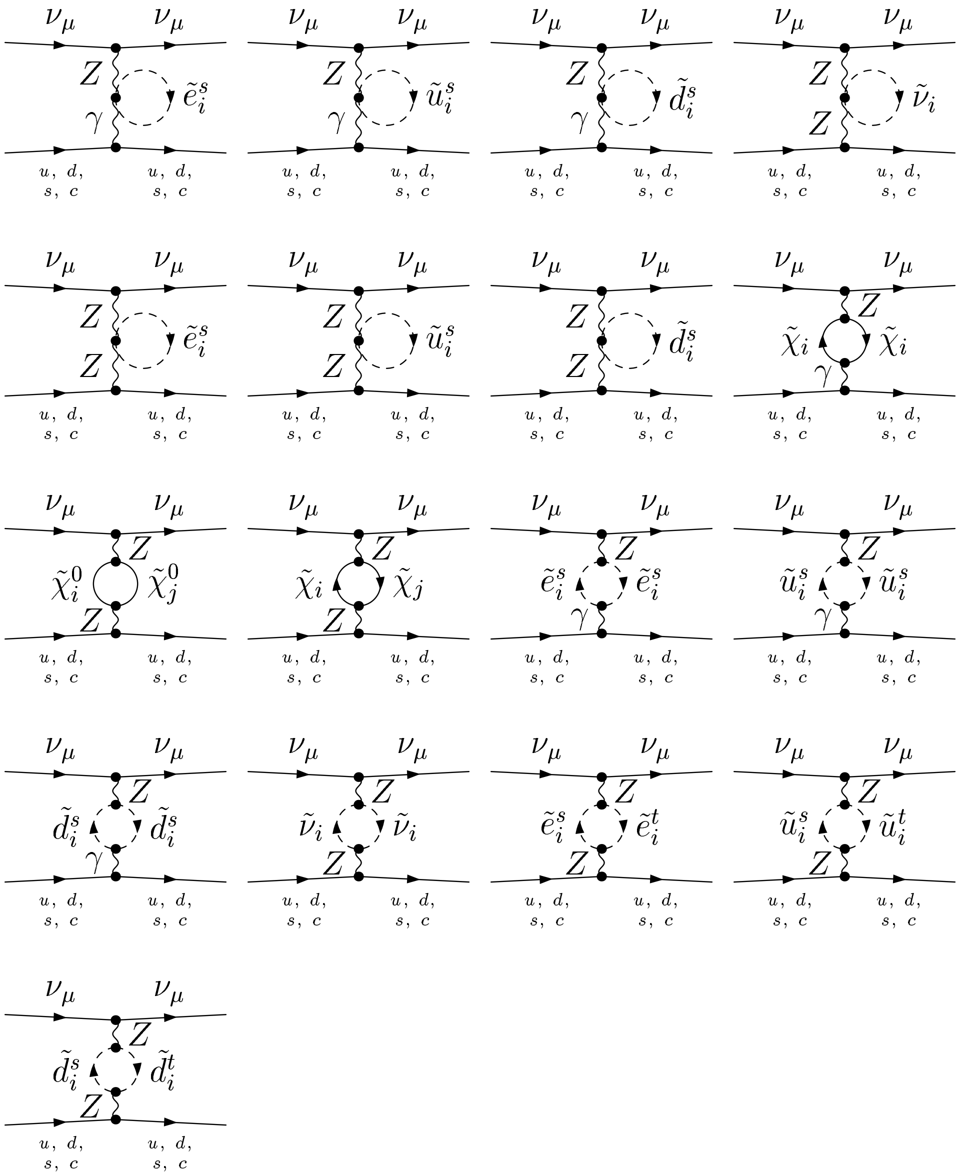


Abbildung D.5: *Selbstenergie-Diagramme für Neutrino-Parton-Prozesse mit neutralem Strom.*

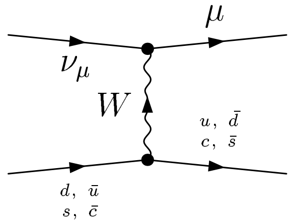


Abbildung D.6: *Bornsche Näherung für Neutrino-Parton-Prozesse mit geladenem Strom.*

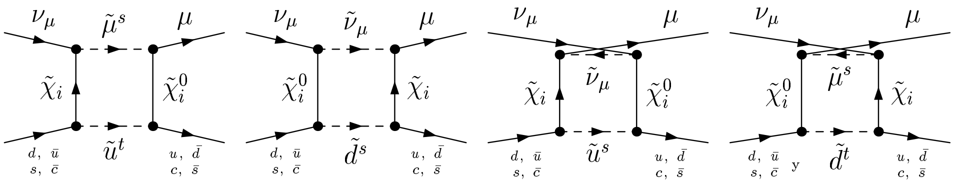


Abbildung D.7: *Box-Diagramme für Neutrino-Parton-Prozesse mit geladenem Strom.*

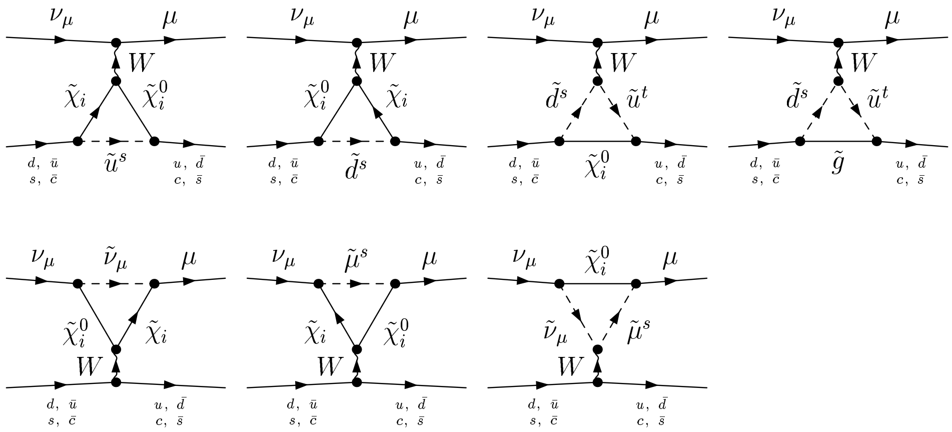


Abbildung D.8: *Dreiecks-Diagramme für Neutrino-Parton-Prozesse mit geladenem Strom.*

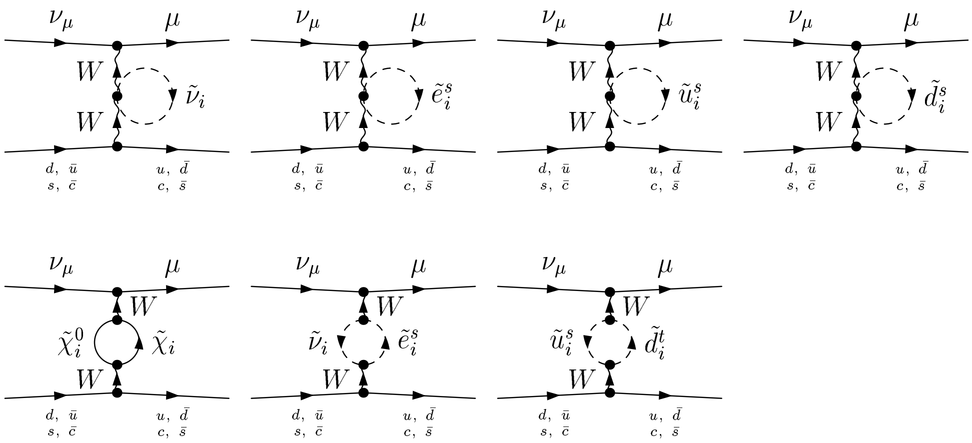


Abbildung D.9: *Selbstenergie-Diagramme für Neutrino-Parton-Prozesse mit geladenem Strom.*

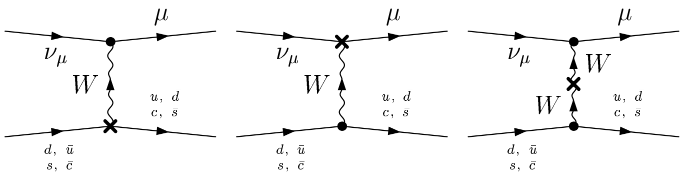


Abbildung D.10: *Counterterm-Diagramme für Neutrino-Parton-Prozesse mit geladenem Strom.*

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] S.L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22***(1961)(579);*
S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19** *(1967) (19);*
A. Salam, in: Proceedings of the 8th Nobel Symposium*, Editor N. Svartholm, Stockholm, (1968).*

[2] M. E. Peskin, D. V. Schröder, An Introduction to Quantum Field Theory, *Addison Wesley (1996).*

[3] C. M. Yang R. and M. Mills, Phys. Rev. **96** *(1954) 191.*

[4] G.P. Zeller, et al. (NuTeV Collaboration), Phys. Rev. Lett. **88** *(2002) 091802.*

*[5] S.Davidson et al., hep-ph/***0112302***, JHEP* **0202** *(2002) 037.*

[6] C.H. Llewellyn-Smith, Nucl. Phys. **B228** *(1983) 205.*

[7] W. J. Marciano, A. Sirlin, Phys. Rev. **D22** *(1980) 2695, erratum ibid,* **D31***, (1980) 213.*

[8] NuTeV Homepage at Fermilab Electroweak Results **http://www-e815.fnal.gov/***.*

[9] Super-Kamiokande Collaboration, Y. Fukuda et al., Phys. Rev. Lett. **81***(1998) 1562, hep-ex/***9807003***.*

*[10] The LEP Collaborations ALEPH, DELPHI, L3, OPAL, the LEP Electroweak Working Group and the SLD Heavy Flavor and Electroweak Groups, CERN-EP/2001-021, hep-ex/***0103048***;*
A. Gurtu, Plenarvortrag ICHEP 2000, Osaka (erscheint in den Proceedings).

*[11] M. W. Grünewald, hep-ex/***0304023***.*

[12] P. Wells, Int. Europhysics Conference oh High Energy Physics, Aachen, (2003).

[13] J.D.Bjorken, E.A. Paschos, Phys. Rev. **B152** *(1969) 1975.*

[14] A. D. Martin, W. J. Stirling, R. G. Roberts, Phys. Lett. **356B** *(1995) 89.*

[15] *D.E. Soper, hep-ph/***9702203***.*

[16] *E. A. Paschos, L. Wolfenstein, Phys. Rev.* **D7** *(1973) 91.*

[17] *S. Coleman, J. Mandula, Phys. Rev.* **159***(1967) 1251.*

[18] *M.F. Sohnius, Phys. Rep.* **128** *(1985) 39.*

[19] *R. Haag, J.T. Lopuszański, M. F. Sohnius, Nucl. Phys.* **B88** *(1975) 257.*

[20] *L. Giradello, M.T. Grisaru, Nucl. Phys.* **194** *(1982) 65.*

[21] *J.Wess, J.Bagger* Supersymmetry and Supergravity, *Princeton University Press, 1983.*

[22] *H.E. Haber, hep-ph/***9306207***.*

[23] *H. Haber, G. Kane, Phys. Rep.* **117** *(1985).*

[24] *H.E. Haber,* Introductory Low-Energy Supersymmetry, *World Scientific, 1993.*

[25] *J. Gunion, H. Haber, Nucl. Phys.* **B 272** *(1986) 1.*

[26] *T. Hahn, C. Schappacher, Computer Physics Communications,* **143** *(2002) 54.*

[27] *S. P. Martin, in:* Perspectives on Supersymmetry, *Hrsg. G. L. Kane, World Scientific, (1998).*

[28] *J.F. Gunion, H.E. Haber, G. Kane, S. Dawson,* The Higgs Hunter's Guide, *Addison-Wesley Publishing Company, 1990.*

[29] *M. Kobayashi, T. Maskawa, Prog. Theor. Phys.* **49** *(1973) 652.*

[30] *N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett.* **10***,(1963) 531.*

[31] *L. Wolfenstein, Phys. Rev. Lett.* **51***, (1983) 1945.*

[32] *A. Denner, Fortschr. Phys.* **41** *(1993) 307.*

[33] *A. Kurylov, M.J. Ramsey-Musolf, S. Su, hep-ph/***0301208***.*

[34] *T. Hahn, Computer Physics Communications,* **140** *(2001) 418.*

[35] *T. Hahn, M. Pérez-Victoria hep-ph/***9807565***.*

[36] *D. A. Ross, J. C. Taylor, Nucl. Phys.* **B51** *(1997) 25.*

[37] *M. Böhm, W. Hollik, H. Spiesberger, Fortschr. Phys.* **34** *(1986) 687.*

[38] *J. C. Ward. Phys. Rev.* **78***(1950) 1824.*

[39] *G. Passarino, M. Veltman, Nucl. Phys.* **160** *(1979) 151;*
M. Consoli, Nucl. Phys. **160** *(1979) 208;*
M. Veltman, Phys. Lett. **91 B** *(1980) 95;*
M. Green, M. Veltman, Nucl. Phys. **169** *(1980) 137; Erratum:Nucl. Phys.* **B175** *(1980) 25.*

[40] *D. C. Kennedy, B. W. Lynn, Nucl. Phys.* **322** *(1989) 1;*
B. W. Lynn, SLAC-PUB 5077 (1989) und SU-ITP-867 (1989);
D. C. Kennedy, Nucl. Phys. **B 351** *(1991) 81;*
M. Kuroda, G. Moultaka, D. Schildknecht, Nucl. Phys. **B 350** *(1991) 25.*

[41] *A. Denner, Fortschr. Phys.* **41** *(1993) 4.*

Danksagung

Ich bedanke mich bei Herrn Prof. W. Hollik, der mir diese interessante Aufgabe als Thema der Diplomarbeit gegeben und sich viel Zeit für mich genommen hat.
Herrn Prof. M. Lindner gilt mein Dank für die Übernahme der offiziellen Betreuung.

Ganz herzlich bedanke ich mich bei allen, die viel Zeit für mich aufgewendet haben oder denen ich viel Zeit gestohlen habe:
Oliver Brein bin ich sehr dankbar für all seine Tips, Hilfen und Anregungen. Er war mir in Fragen zu physikalischen Hintergründen, Fortran-Untiefen und beim Durchlesen des Manuskripts eine unerläßliche Hilfe.
Mein Dank gilt auch Thomas Hahn, Ina Gruber, Heidi Rzehak und meiner Mutter für das Korrekturlesen von Teilen dieser Arbeit.
Stefan Dittmaier, Thomas Hahn und Thomas Fritzsche haben mir oft bei Fragen zu physikalischen Zusammenhängen weitergeholfen. Wenn es darum ging, schnellen Rat zu bekommen, war mein Zimmergenosse Mathias Keil der ideale Ansprechpartner.
Besonderer Dank gebührt aber allen Mitgliedern des Instituts, die hier stets eine lockere Arbeitsatmosphäre geschaffen haben.

Der größte Dank geht an meine Eltern, die durch ihr Vertrauen und ihre stete Unterstützung mein Studium überhaupt erst möglich gemacht haben.

Ich versichere, diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Benjamin Koch
München, den 14. August 2003