CRAIGHOUSE

e

Monografía Matemática NS

Magdalena Eterovic

Codigo Alumno: 0635-013

Número de Palabras: 3674

Indice

Resumen

El número irracional e vale aproximadamente 2,71828182845, y junto a los números 1, 0, π, i es uno de los números más importantes en matemáticas. En esta monografía, hacemos lo siguiente. Primero, definimos conseptualmente el valor del número e como aquél número a tal que

$$a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x$$

También mostramos que e se puede calcular equivalentemente como

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

E incluso como

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Luego, demostramos por contradicción que el número e es irracional, es decir, suponemos que e se puede escribir como un cuosiente de dos números naturales y llegamos a una situación absurda. Finalmente, mostramos algunas aplicaciones de este número, tales como la resolución de ciertas ecuaciones diferenciales, la definición de funciones hiperbólicas y la determinación de la ecuación de la catenaria.

I. Introducción

Probablemente muchos hemos escuchado sobre el famoso número e. e es un número irracional y su valor es aproximadamente e = 2,71828182845…. Junto con el 0, el 1, la constante π y la unidad imaginaria i, e es uno de los números más importantes en matemáticas. En esta monografía responderemos las siguientes preguntas: ¿Por qué este número es tan importante? ¿De dónde viene? ¿Qué representa?

Leonhard Euler (1707-1783), matemático suizo, fue quien le dio el nombre al número e.

Tal vez la definición más conocida del número e es que es la base de los logaritmos naturales Pero ¿qué quiere decir que e sea la base de los logaritmos naturales? Primero, veamos brevemente el origen de los logaritmos.

Los logaritmos fueron inventados por el matemático escocés John Napier (1550-1617). Napier quería facilitar el cálculo de las funciones trigonométricas, por la vía de reemplazar las operaciones de multiplicación y división por sumas y restas. Para evitar introducir fracciones, Napier eligió el valor 10^7 para el radio del círculo; y como base para sus potencias, eligió $1\text{-}10^{-7}$ = 0.9999999. Entonces un número *N* puede escribirse como

$$N = 10^7\,(1\text{-}10^{-7})^L$$

En que el exponente *L* es el *logaritmo naperiano* de *N*. Napier acuñó la palabra *logaritmo* a partir de las palabras griegas *logos*, que significa "razón", y *arithmos*, que significa "número". Es interesante observar que:

$$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \approx \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \qquad \text{(como veremos más adelante)}$$

Es decir, aunque Napier no se lo propuso, él prácticamente obtuvo un sistema de logaritmos en base $1/e$.

Que *e* sea la base de los logaritmos naturales significa que el logaritmo natural de un número *x* es la potencia a la que habría que elevar *e* para obtener *x*; es decir, el logaritmo natural de *x* es *r* si y sólo si $e^r = x$. Estos logaritmos en base *e* se llaman "naturales" porque aparecen frecuentemente en matemáticas; por ejemplo, cuando diferenciamos una función logarítmica:

$$\frac{d}{dx}\log_b(x) = \frac{\log_b(e)}{x} = \frac{1}{\ln(b)x} \quad \text{(esto también lo veremos más adelante).}$$

En todo caso, el calificativo de "natural" le fue dado por Mergoli y Mercator antes de que Newton (1643-1727) y Leibniz (1646-1716) desarrollaran el cálculo.

II. Definición

Hay varias formas de definir conceptualmente el valor del número *e*, y todas son, naturalmente, equivalentes entre ellas. Para partir por una de éstas, analizemos el siguiente problema: derivar la función $y = a^x$ con respecto a *x*. Lo primero que debemos hacer es recordar el concepto de derivada: geométricamente hablando, la derivada de la función $f(x)$ en $x = a$, es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = a$. Analíticamente, esta definición puede escribirse como:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad [1]$$

Armado con esta herramienta, una forma de definir el valor de *e* es la siguiente. Como dijimos antes, *e* es la base de los logaritmos naturales, es decir, *e* está relacionado con los logaritmos. Si *e* está relacionado con los logaritmos, entonces *e* también esta relacionado con las funciones de la forma a^x, inversas de los logaritmos.

Así, si queremos derivar $y = a^x$ usando la definición anterior, obtenemos:

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{a^x\cdot a^h-a^x}{h} \text{ (por propiedad de las potencias)}$$

Si se saca factor común a^x, esta expresión queda:

$$a^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

Aquí nos enfrentamos con el verdadero problema, ¿cómo calculamos este límite? Desde el punto de vista práctico, lo mejor que nos podría pasar es que este límite fuese igual a 1, es decir, que la derivada de a^x fuese igual a a^x. Pero esto no es necesariamente cierto para cualquier valor de *a*. Entonces, definamos *e* como aquel número real que cumple esta condición:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1 \quad [2]$$

Otra forma de enteder esto es que la derivada de e^x es e^x. Con este límite hemos logrado obtener una definición para el número *e*. Sin embargo, en la práctica, no es fácil calcularlo. ¿Qué podemos hacer?

Primero, veamos si existe un número *e* que satisfaga el límite anterior. Para ello, calculamos el valor del limite sustituyendo *e* por distintos número enteros y, en cada caso, evaluando la expresión para valores cada vez más pequeños de *h*. La siguiente tabla sugiere que *e* efectivamente existe, y debe ser mayor que 2 y menor que 3.

h	$\frac{2^h-1}{h}$	$\frac{3^h-1}{h}$
1	1	2
0.5	0.828...	1.464
0.2	0.743...	1.228
0.1	0.717...	1.161
0.05	0.705...	1.129
0.01	0.695...	1.104

Aún estamos muy lejos de tener el valor exacto de *e*. Veamos cómo podemos aprovechar el hecho de que la derivada de e^x es e^x para esto.

Definamos la función $\ln x$ como la función logarítmica con base *e* (ya veremos que no solo tiene sentido hacer esta definición, sino que también es muy útil). A continuación, demostraremos que la derivada del $\ln x$ es 1/*x*. Consideremos la función

$$y=\log_a x$$

Esto significa que

$$a^y = x$$

Además, sabemos que en general podemos expresar *a* como

$$z^{(\log_z a)}$$

Para cualqueir valor de *z*, por lo tanto

$$z^{(\log_z a)y} = x$$

Entonces, reemplazando *z* por *e* queda

$$e^{y(\ln a)} = x$$

Ahora derivamos parcialmente esta igualdad con respecto a *x*; en el lado derecho obtenemos 1, mientras que en el lado izquierdo aplicando la regla de la cadena queda

$$e^{y(\ln a)} \cdot \ln a \cdot y'$$

Es decir,

$$e^{y(\ln a)} \cdot \ln a \cdot y' = 1$$

Este es *e* el que definimos en [2], porque estamos usando el hecho que la derivada de e^x es e^x. Si ahora despejamos *y'* obtenemos

$$y' = \frac{1}{e^{y(\ln a)} \cdot \ln a} = \frac{1}{a^y \cdot \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Es decir, la derivada de la función

$$y = \log_a x \text{ es } \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Finalmente, si sustituimos *a* por *e*, entonces $y = \ln x$ y la expresión anterior queda

$$y' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x} \quad [3]$$

Así hemos demostrado que la derivada del $\ln x$ es $\frac{1}{x}$. ¿Y para qué nos sirve esto? Haber calculado la derivada del logaritmo natural de esta forma, nos ayudará a calcular el valor de *e*. Si usamos la definición de derivada para calcular la derivada del logaritmo natural en el punto *x*=1, e igualamos esta expresión con el valor que nos dio a nosotros, obtendremos la siguiente igualdad:

$$1 = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h}$$

Esto porque ln1 = 0. Ahora, por propiedad de los logaritmos, esto es igual a

$$1 = \lim_{h\to 0} \ln(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

Como las funciones logarítmicas son contínuas, entonces:

$$1 = \ln \lim_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

Reemplazando $n = \dfrac{1}{h}$, esta expresión queda

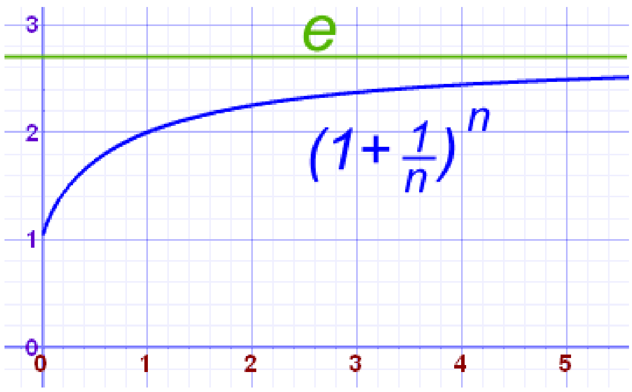
$$1 = \ln \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Aplicando la función inversa del logaritmo (que es la exponencial, es decir, e^x) a ambos lados nos queda

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad [4]$$

Finalmente, hemos encontrado una forma de calcular el valor de *e*. La siguiente tabla muestra cómo cambia el valor de este límite a medida que aumenta el valor de *n*:

n	$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$
10	2,5937...
100	2,7048...
1000	2,7169...
∞	2,7182...



Notemos que de la misma forma que definimos e como un límite, podríamos definir la función e^x como:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad [5]$$

Ahora que tenemos esta definición, buscaremos otras formas de definir el número, que nos permitirán entender otras propiedades de e, y también encontrar formas que quizás converjan más rápido.

Definamos primero el siguiente término:

$$t_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Usando el teorema del binomio, expresaremos t_n como una sumatoria:

$$t_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k} = 1 + x + \sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k-1)x^k}{k!n^k}$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{x^3}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{x!}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Como vemos en esta última expansión, cada término de la forma $\frac{x^n}{n!}$ (excepto los dos primeros) están multiplicados por números menores que 1. Como n es natural, entonces términos de la forma $\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$ son necesariamente menores que 1. Además, el producto de términos menores que 1, también genera un producto menor que 1. Entonces, esta última expansión tendrá que ser necesariamente menor o igual que la siguiente sumatoria:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

Tal como lo hicimos para t_n, démosle nombre a esta sumatoria:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Hemos encontrado así una sumatoria que acota superiormente a t_n. Ahora, definamos un número natural *m*, que sea menor o igual que *n*, y generemos una sumatoria parecida a la de t_n y que se vea así:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{x^m}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m}{n}\right)$$

Esta sumatoria tiene una cantidad de términos menor o igual que t_n, por lo tanto, el resultado de esta sumatoria debe ser menor o giual que t_n. Hemos, entonces, encontrado una cota inferior para t_n. Unamos esta condición junto con la cota superior que habíamos encontrado y expresémoslo como una desigualdad:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{x^m}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m}{n}\right) \le t_n \le s_n$$

Habiendo hecho esto, tomemos límite cuando *n* tiende a infinito de las tres expresiones. Además, recordemos la definición de e^x que tenemos.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{x^m}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m}{n}\right)\right) \le \lim_{n\to\infty} t_n \le \lim_{n\to\infty} s_n$$

$$\leftrightarrow 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^m}{m!} \le e^x \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Pongámosle un nombre a la suma que está en el lado izquierdo, llamémosla s_m.

$$s_m \le e^x \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Ahora, tomemos límite cuando *m* tiende a infinito en estas expresiones. Nótese que al hacer esto, s_m generará el mismo resultado que se obtuv con s_n en el paso anterior, ya que ambas sumatorias tienen la misma fórmula general. Es decir:

$$\lim_{m\to\infty} s_m \le \lim_{m\to\infty} e^x \le \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \;\leftrightarrow\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \le e^x \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Por teorema del emparedado o de la compresión, nos queda que otra definición para *e* es:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad [6]$$

Esta definición también nos da otra alternativa para tratar de calcular el valor de e. La definición no es demasiado asombrosa ya que esa sumatoria representa la serie de Taylor de la función e^x. Brook Taylor (1685-1731) buscó la forma de poder aproximar cualquier tipo función infinitamente derivable a una serie de potencias. De esta forma se podría dar una solución aproximada a varios problemas que existen en el cálculo. La ecuación de la serie de Taylor de una función $f(x)$ alrededor de un punto $x = a$ (esto significa que la aproximación es más exacta alrededor de este punto) es:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

En que $f^{(n)}(a)$ representa la derivada n-ésima de $f(x)$ evaluada en el punto $x = a$. Si quisiéramos calcular la serie de Taylor de la función e^x alrededor del punto $x = 0$ diríamos:

$$\begin{aligned} &f(x) = e^x; \quad f(0) = 1 \\ &f'(x) = e^x; \quad f'(0) = 1 \\ &f''(x) = e^x; \quad f''(0) = 1 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Ahora escribiríamos la suma:

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

La serie de Taylor de la función e^x alrededor de $x = 0$ converge para todo x. Desmostrémoslo usando el criterio de D'Alambert. Tomemos la sumatoria que está sobre este párrafo, la cual tiene como término general $a_n = \frac{x^n}{n!}$. El criterio dice que si $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, entonces la serie converge. Veamos:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{n+1} / (n+1)!}{x^n / n!} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 < 1$$

Como el resultado del límite nos dio 0, que es siempre menor que 1, independientemente del x escogido, entonces la sumatoria converge para todo x, lo que significa que podemos aproximar la función e^x para cualquier x usando la sumatoria, no solo alrededor del $x = 0$.

Ya que tenemos e expresado como un límite, [4], y ahora también como una sumatoria, [6], parece lógico que e debiese poder expresarse en términos de una integral. Como dijimos anteriormente, la derivada del logaritmo natural de x es $\frac{1}{x}$ [3]. A partir de este hecho, encontramos otra forma de tratar de calcular el valor de e. La idea del logaritmo natural del que hablamos antes proviene de una propiedad especial de la función $\frac{1}{x}$, o, mejor dicho, del área bajo la curva definida por esta función. Supongamos que definimos el área bajo esta curva, entre los puntos 1 y a, como ln(a); es decir,

$$\ln(a) = \int_1^a \frac{1}{x}\, dx$$

¿Qué pasa si calculamos el área entre los puntos 1 y ab, es decir, ln(ab)?

$$\ln(ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{x}\, dx$$

Sabemos que esa área se puede calcular como el área entre 1 y a más el área entre a y ab; es decir, ln(ab) es igual a ln(a) más el área entre a y ab:

$$\ln(ab) = \ln(a) + \int_a^{ab} \frac{1}{x} dx$$

Pero ahora, ¿cuánto vale el área entre a y ab? Para resolver este problema, usaremos la técnica llamada cambio de variables. Supongamos que definimos

$$t = \frac{x}{a}$$

Entonces,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{at} \qquad \text{y} \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{a} \Rightarrow dt = \frac{1}{a} dx$$

Como, además, cuando x vale a, t vale 1, y cuando x vale ab, t vale b, tenemos que

$$\int_a^{ab} \frac{1}{x}\, dx = \int_1^b \frac{1}{t}\, dt = \ln(b)$$

Esto por la definición que hicimos más arriba de la función ln.

Por lo tanto, hemos concluido que ln(ab) = ln(a) + ln(b); y ésta es justamente una propiedad de los logaritmos —la posibilidad de convertir las multiplicaciones en sumas.

Pero, ¿cuál sería la base de estos logaritmos? La base de un logaritmo es un número que tiene la propiedad de que el logaritmo en esa base de ese mismo número es 1. Por ejemplo, el logaritmo en base 10 de 10 es 1, y el logaritmo en base 2 de 2 es 1. Por lo tanto, la base de estos logaritmos naturales es un número a tal que ln(a) = 1. En este caso, se define e como el único valor de a tal que ln(a) = 1; es decir, e es un número tal que el área bajo la curva $1/x$ entre $x = 1$ y $x = e$ es igual a 1.

Nuevamente, nos encontramos con que tenemos una defición de e a partir de la cual no es fácil calcular el valor de e.

III. Irracionalidad

Hasta ahora hemos encontrado distintas definiciones y formas de calcular e. Cuando tratamos de obtener su valor, nos damos cuenta que ninguna de las definciones se puede expresar directamente como un valor conocido, y que en las aproximaciones que hemos hecho, no hay un patrón en las cifras decimales. Esto nos da razón para pensar que e es irracional. A continuación demostraremos este hecho.

Utilizando la propiedad [6] que dice que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$, podemos demostrar la irracionalidad de e por contradicción (*reduction ad absordum*) de la siguiente forma.

Supongamos que e es un número racional, entonces e se puede escribir como el cuociente de dos número naturales

$$\exists \;\; a \wedge b \;\in \aleph \;\ni\; e = \frac{a}{b}$$

Definamos ahora un número x de la siguiente forma:

$$x = b!\left(e - \sum_{n=0}^{b}\frac{1}{n!}\right) = a(b-1)! - \sum_{n=0}^{b}\frac{b!}{n!}$$

Es facil ver que x es un número entero, porque $a(b-1)!$ es un producto de enteros (que da por resultado un entero) y, como es $b \geq n$, $\frac{b!}{n!}$ es siempre entero, y por lo tanto $\sum_{n=0}^{b}\frac{b!}{n!}$ es una suma de números enteros, que también es un número entero. Así, x es la resta de dos números enteros, y por lo tanto es entero.

Ahora, trataremos de acotar el valor de x. En primer lugar, sabiendo que $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, podemos sustituir este valor en la definición de x:

$$x = b!\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\right) = b! \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Vemos así que x es claramente mayor que 0.

Por otra parte, nótese que en esta última expresión n tiene valores estrictamente mayores que b. En estas condiciones, se da que:

$$\frac{b!}{n!} = \frac{1}{(b+1)(b+2)\cdots n} \leq \frac{1}{(b+1)^{n-b}}$$

Por lo tanto

$$x = \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^k}$$

Esta última sumatoria es la suma de una serie geométrica infinita de razón $1/(b+1)$, cuyo valor es:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^k} = \frac{1}{b+1}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{b+1}}\right) = \frac{1}{b}$$

Como por suposición b es un número natural, $1/b$ es menor o igual que 1, y como x es menor que la suma de la serie geométrica infinita, entonces x es estrictamente menor que 1. En consecuencia, tenemos que x es un número entero que es a la vez mayor que 0 y menor que 1; esta es una contradicción que invalida nuestra suposición de que e es un número racional.

IV. Aplicaciones

Cuando uno tiene ecuaciones diferenciales lineales homogéneas a coeficientes constantes, se utiliza la propiedad de que $\left(e^x\right)' = e^x$ para resolverlas, de la siguiente forma: si tenemos la siguiente ecuación

$$c_n \cdot y^n + c_{n-1} \cdot y^{n-1} + \cdots + c_1 y' + c_0 y = 0$$

Una solución fácil de encontrar es una de la forma $y = e^{\alpha x}$. Al hacer esto, nos quedará un polinomio para α. Por esta razón, este método para solucionar este tipo de ecuaciones diferenciales es preferiblemente usable para los órdenes del 1 al 4, ya que no existe una fórmula general que nos determine soluciones de polinomios de mayor grado. Veamos un par de ejemplos numéricos para entender mejor esta aplicación

Si tenemos que

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

Como dijimos antes, reemplazamos y con $e^{\alpha x}$, entonces, nos quedaría que

$$y = e^{\alpha x}$$
$$y' = \alpha e^{\alpha x}$$
$$y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$$

$$\alpha^2 e^{\alpha x} + 3\alpha e^{\alpha x} + 2e^{\alpha x} = 0$$

Podemos dividir la ecuación por $e^{\alpha x}$, ya que la función es estrictamente positiva, y nos quedaría

$$\alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0$$

Es decir, una ecuación cuadrática que se podría escribir de la siguiente forma:

$$(\alpha + 1)(\alpha + 2) = 0$$

Así que los valores para α serían -1 y -2, es decir, las dos soluciones de la ecuación diferencial son:

$$y = e^{-x}$$
$$y = e^{-2x}$$

¿Qué pasa en los casos particulares? Cualquier ecuación diferencial lineal homogénea de orden n a coeficientes constantes, tiene n soluciones linealmente independientes. Vemos en el ejemplo anterior que la ecuación era de orden 2 y nos quedaron dos soluciones linealmente independientes. Pero existen casos que no son tan agradables. Por ejemplo, ¿qué hubiese pasado si los valores de α hubiesen sido iguales? En ese caso, si la ecuación es de orden 2, el método de reducción de orden dice que las soluciones serían $e^{\alpha x}$; $xe^{\alpha x}$. En el caso que α sea un número imaginario, es decir, $\alpha = a + ib$, las soluciones son de la forma $e^{ax}\cos(bx)$; $e^{ax}\sin(bx)$, lo que se demuestra usando el teorema de De Moivre, que veremos más adelante.

Las ecuaciones diferenciales que hemos discutido hasta ahora son homogéneas y a coeficientes constantes. Pero ¿qué pasa si esto no se cumple? En el caso de las ecuaciones de primer orden, la misma propiedad que nos permitió resolver los casos anteriores nos puede ayudar a resolver este caso. Analicemos entonces una ecuación diferencial de primer orden no homogénea a coeficientes no constantes.

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

Hay un tipo de ecuaciones diferenciales de primer orden a coeficientes no constantes, no homogénea y que no son lineales, cuyo método de solución es bastante directo. Las ecuaciones diferenciales de variables separables tienen la siguiente forma:

$$y' \cdot g(y) = r(x)$$

Estas ecuaciones diferenciales a veces se pueden resolver simplemente integrando a ambos lados (esto ocurre cuando las funciones $g(y)$ y $r(x)$ son integrables). Pero la ecuación diferencial lineal que nosotros estamos tratando no tiene esta forma. Sin embargo, nos podemos preguntar si acaso existe algún término por el que podríamos multiplicar la ecuación de tal forma que justo nos quede una ecuación diferencial de variables separables. Busquemos este término. Para buscarlo, supongamos primero que existe y que se llama $I(x)$. Si multiplicamos la ecuación por $I(x)$, nos queda:

$$I(x) \cdot y' + I(x) \cdot p(x) \cdot y = I(x) \cdot q(x)$$

Si nosotros queremos que quede una ecuación de variables separables, debería verse algo así

$$\left(I(x) \cdot y\right)' = I(x) \cdot g(x)$$

Podemos igualar ambas ecuaciones y nos queda:

$$\left(I(x) \cdot y\right)' = I(x) \cdot y' + I(x) \cdot p(x) \cdot y$$

Desarrollamos el lado izquierdo de la igualdad como derivada del producto:

$$I'(x) \cdot y + y' \cdot I(x) = I(x) \cdot y' + I(x) \cdot p(x) \cdot y$$

Se nos elimina el término $I(x) \cdot y'$ a ambos lados de la ecuación.

$$I'(x) \cdot y = I(x) \cdot p(x) \cdot y$$

Se nos elimina la función y, y luego despejamos $p(x)$ y nos queda

$$\left(\frac{I'(x)}{I(x)}\right) = p(x)$$

Esto que tenemos ahora es una ecuación diferencial de variables separables para $I(x)$. Integramos a ambos lados:

$$\int \frac{dI(x)}{I(x)} = \int p(x)dx \quad \leftrightarrow \quad \ln(I(x)) = \int p(x)dx \quad \leftrightarrow \quad I(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Hemos encontrado un término $I(x)$, el cual se conoce con el nombre de "factor integrante", que cumple la condición. Sin embargo, esto no significa que $I(x)$ siempre exista. Hemos definido nuestro factor integrante de esta forma: $I(x) = e^{\int p(x)}$. Esto significa que el factor integrante existirá siempre que $p(x)$ tenga como antiderivada una función conocida. Aún así, hemos generado un método que nos resuelve varias de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Volvamos ahora, por un momento, a las ecuaciones diferenciales homogéneas a coeficientes constantes. Analicemos el siguiente problema:

$$y'' - y = 0$$

Resolvamos este problema con el método ya presentado para esta situación. Suponemos una solución exponencial.

$$y = e^{\alpha x}$$
$$y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$$

Reemplazamos en la ecuación y nos queda que

$$\alpha^2 e^{\alpha x} - e^{\alpha x} = 0$$

Dividimos por $e^{\alpha x}$ y nos da que

$$\alpha^2 - 1 = 0$$

es decir

$$\alpha^2 = 1 \;\rightarrow\; \alpha = \pm 1$$

Por lo tanto, las soluciones son:

$$y = e^{-x}$$
$$y = e^{x}$$

Ahora definimos las siguientes condiciones iniciales para el problema

$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 0$$

La solución general del problema es:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$$

Usamos la condición de que $y(0) = 1$ y nos queda que

$$1 = c_1 + c_2$$

Ahora usamos la otra condición $y'(0) = 0$ y nos da que

$$0 = c_1 - c_2$$
$$c_1 = c_2$$

Así obtenemos un sistema de dos ecuaciones para dos incógnitas. De donde se obtiene:

$$2c_1 = 1 \;\rightarrow\; c_1 = \frac{1}{2}$$

Y como $c_1 = c_2$

$$c_2 = \frac{1}{2}$$

Esta solución del problema tiene un nombre especial. se le conoce como coseno hiperbólico. Es decir

$$y = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

Las funciones hiperbólicas nacen de las hipérbolas, a diferencia de las funciones trigonométricas que salen de la circumferencia. Se llaman de la misma manera que las trigonométricas, solo que añadiendo la palabra “hiperbólico” al final.

Las funciones hiperbólicas principales son:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Las demás funciones hiperbólicas aparecen de las mismas relaciones que existen entre las funciones trigonométrcias. Ahora derivemos la función $\sinh x$:

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

Al igual que las funciones trigonométricas, en que la derivada del $\sin x$ es $\cos x$.

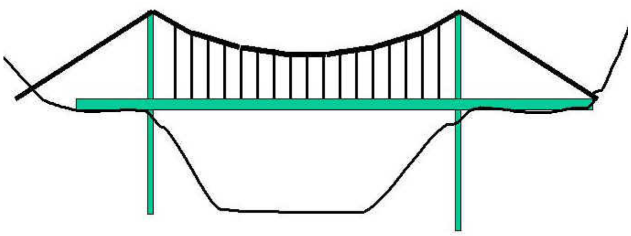
Ahora derivemos la función $\cosh x$, y obtenemos que

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

Nótese la diferencia con las funciones trigonométricas en que la derivada del $\cos x$ es $-\sin x$. De aquí podemos ver por qué ambas funciones hiperbólicas son soluciones de la ecuación diferencial que analizamos antes. Lo que determinará cuál solución es la que se usará finalmente son las condiciones inciales.

Habiendo definidio entonces las funciones hiperbólicas, surge la pregunta: ¿para qué sirven? Jakob Bernoulli (1654-1705) propuso un problema en mayo de 1690 para la comunidad matemática. El problema era encontrar la ecuación que describía la forma de una cadena que cuelga de dos puntos a igual altura. Este problema fue resuelto por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) usando el cálculo y por varios más. Esta ecuación, que hoy se llama la ecuación de la catenaria, se usa para la construcción de puentes colgantes, arcos, etc

La ecuación es $y = c + a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, en que c y a son constantes.



Cuando en la página 13 hablamos de las ecuaciones diferenciales, hubo un punto que dejamos pendiente y que era el teorema de De Moivre. Una de las más importantes aplicaciones de e es su directa relación con los números complejos, ya que este teorema nos permite expresar cualquier número complejo como el resultado de una exponencial. Cuando uno tiene un número complejo z cualquiera, lo primero es expresar este número de la forma $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, siendo r el módulo de z y θ el ángulo que forma con el eje x medido en sentido antihorario y en radianes. Esta forma de escribir los números complejos se llama a veces $r \cdot cis\theta$. El teorema de De Moivre dice lo siguiente:

$$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n e^{in\theta}$$

A continuación demostraremos este teorema. Primero, definamos al número complejo unitario (módulo = 1) como una función de θ.

$$y = (\cos\theta + i\sin\theta)$$

Ahora derivemos la función con respecto a θ.

$$\frac{dy}{d\theta} = i\cos\theta - \sin\theta = i(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Notemos que en esta última expresión aparece y en el paréntesis. Es decir:

$$\frac{dy}{d\theta} = i \cdot y$$

Esto que tenemos es una ecuación diferencial de variables separables para y. Resolvemos:

$$\frac{dy}{y} = i \cdot d\theta \quad \rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int id\theta \quad \rightarrow \quad \ln y = i\theta$$

Despejando y obtenemos:

$$y = e^{i\theta}$$

Ahora bien, si nosotros consideramos ahora que el número complejo tiene módulo r, esto lo escribiríamos así en términos de y:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = ry$$

Y por lo que acabamos de mostrar:

$$ry = re^{i\theta}$$

Si elevamos ambos lados a n, entonces:

$$r^n y^n = r^n (\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n \left(e^{i\theta}\right)^n = r^n e^{ni\theta}$$

Hemos demostrado entonces el teorema de De Moivre. Este teorema lo mencionamos cuando hablamos de las ecuaciónes diferenciales lineales homogéneas a coeficientes constantes de segundo orden. Dijimos que había que buscar una solución de la forma $e^{\alpha x}$. El caso complicado se presenta cuando α resulta ser complejo. Si es así, podemos expresar α de esta forma:

$$\alpha = a + ib$$

Reemplazamos α en nuestra solución tipo y usamos el teorema:

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax}e^{ibx} = e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx))$$

Cuando buscamos soluciones para ecuaciones diferenciales de segundo orden, buscamos dos soluciones que sean linealmente independientes. Las funciones seno y coseno son linealmente independientes. Entonces, podemos considerar la parte real de la solución que está arriba separadamente de la parte imaginaría, y cada una de estas partes aporta una solución. Es por eso que la solución general de este caso particular de ecuaciones diferenciales será:

$$y = e^{ax}(c_1\cos(bx) + c_2\sin(bx))$$

Para terminar con el teorema de De Moivre, revisemos una característica. Al hablar de θ dijimos que era un ángulo medido en radianes. Enfoquémosnos en el caso particular en que $\theta = \pi$. Usemos el teorema para este caso en que el número complejo además tiene módulo unitario.

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + 0 = -1$$

Esta identidad es bastante famosa y en particular fue catalogada por el físico norteamericano Richard Feynman (1918-1988) como la identidad más espectacular en matemáticas. En general, escribimos la identidad así:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

De esta forma, aparecen en una sola igualdad los números *e*, π, el neutro multiplicativo 1, el neutro aditivo 0 y además el componente imaginario *i*.

Conclusiones

Son varios los mitos que hay con respect al número *e*, como por ejemplo que fue descubierto y nombrado de ese modo por Leonhard Euler. Pero como hemos podido descubrir en esta monografía Euler sólo le dio el nombre a este número. Este número fue descubierto mucho antes por el mátemático escocés John Napier, inventor de los logaritmos.

El número *e* es un número que cumple con muchas propiedades y aplicaciones muy importantes en la matemática y que además es muy útil en el ámbito de la ingeniería; como por ejemplo las funciones hiperbólicas que nos ayudan en la construcción de puentes y las ecuaciones diferenciales.

Bibliografía

- Mathematics from the birth os numbers, Jan Gullberg, impreso en Estados Unidos, 1997
- e: The story of a number, Eli Maor, impreso en Estados Unidos
- Natural Logarithm, http://en.wikipedia.org/wiki/Natural_logarithm fecha en que se utilizó esta página: 21/07/08
- e – Euler's number, http://www.mathsisfun.com/numbers/e-eulers-number.html, fecha en que se utilizó está página: 21/07/08
- puente.jpg 682x721 pixceles http://mecfunnet.faii.etsii.upm.es/nematostatica/puente.jpg, fecha en que se utilizó está página
- Calculo, James Stewart, impreso en Mexico, 2004