

Revista *Joven Matemático*, Edición 1. Publicada de forma electrónica el día 31 de Octubre de 2010. Próxima edición: 31 de Marzo de 2011.

La revista cuenta con el patrocinio del Núcleo Milenio "Teoría Matemática de Sistemas Magnéticos Cuánticos y Clásicos".

*Contacto:*

joven.matematico@gmail.com

*Suscripción:*

Personas e instituciones interesadas en recibir copias electrónicas de ediciones futuras pueden suscribirse enviando un correo a la dirección de contacto, indicando el nombre, ciudad, país, y afiliación en el caso de estudiantes y profesores.

*Información para autores:*

Los editores invitan a alumnos y profesores a enviar artículos para su publicación en esta revista, previa revisión por parte del equipo editorial. Los temas que pueden incluir los artículos son muy

variados, siendo los únicos requisitos el incluir contenidos de índole matemática, y el que estén escritos en lengua española. Estos pueden ser sobre historia de las matemáticas, matemática aplicada, física matemática, enseñanza de las matemáticas, y cualquiera de los campos de las matemáticas puras. El nivel de los artículos debe ser apto para estudiantes avanzados de carreras universitarias afines a matemática, aunque también son bienvenidos artículos de tipo introductorio a temas más especializados.

Para ser considerados para publicación en el próximo número, los artículos deben ser enviados al correo de contacto antes del 15 de Febrero de 2011. Artículos recibidos después de esta fecha serán considerados para publicación en ediciones posteriores. Los artículos deben ser enviados en formato  $\text{\TeX}$ , con el correspondiente archivo PDF adjunto.

*Equipo editorial:*

Rafael Benguria

*Departamento de Física, P. Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile*

rbenguri@puc.cl

Sebastián García Sáenz

*Departamento de Física, P. Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile*

sgarciasaenz@gmail.com

Ricardo Repenning

*Facultad de Ingeniería, P. Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile*

ricardo.repenning@gmail.com

Felipe Soto Arévalo

*Facultad de Ingeniería, P. Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile*

felipe.soto.arevalo@gmail.com

Francisco Vial

*École Polytechnique, París, Francia*

fvialp@gmail.com



## Nuestra historia

Rafael Benguria

*Departamento de Física, P. Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile*

En el prólogo de su autobiografía, *Enigmas of Chance*, el destacado matemático polaco Mark Kac (1914–1984), hace un interesante relato de como llegó a ser un matemático (el prólogo de dicha autobiografía, *How I became a Mathematician* fue previamente publicado en la revista *Rehovot* del Instituto Weizmann de Israel, en 1981). En este prólogo, Mark Kac relata como, siendo un estudiante de último año de colegio (1930) en su Polonia natal, se le ocurrió una novedosa manera de resolver la ecuación algebraica de tercer grado, diferente al clásico método de Cardano. En su solución usaba la simetría de las ecuaciones algebraicas bajo transformaciones bilineales. Mark Kac, le mostró su solución a su profesor de matemáticas, quién mostró mucho interés y quién le sugirió enviarla a publicación a la revista *Mlody Matematik* (en castellano, *Joven Matemático*).



MARK KAC (1914-1984)

Cual no sería la sorpresa de Mark Kac, cuando casi al finalizar su último año académico (en Mayo de 1931), el Consejero del Ministerio de Educación Polaco, y Editor de *Mlody Matematyk* visitó su colegio y pidió verlo. El Consejero en cuestión era el matemático polaco Antoni Rusiecki (1892–1956), quién fundó y editó esta revista, en el período entre las dos guerras mundiales en Polonia. La visita de Rusiecki a Mark Kac, le cambió la vida a este último y fue el comienzo de su carrera de matemático. Al terminar el colegio, Mark Kac fue a estudiar a la Universidad Jan Kasimir de Lvov, donde fue estudiante de Hugo Steinhaus y compañero de Stephan Banach. La Universidad de Lvov, entonces en Polonia, fue el centro del desarrollo del Análisis Funcional en el período entre las dos guerras. Los Matemáticos de Lvov se juntaban periódicamente en el Café Escocés de la ciudad. A partir de Julio de 1935, Banach, Mazur y otros matemáticos empezaron a registrar el contenido de sus discusiones matemáticas en un cuaderno que se guardaba en el mismo Café Escocés.



Guardando las debidas proporciones, a principios del segundo semestre de 2008, con un grupo de alumnos universitarios de distintos departamentos, facultades y universidades de Santiago, pero con un interés común en matemáticas, nos empezamos a juntar periódicamente en el Café Tavelli de Providencia. Poco a poco fue surgiendo un grupo que coloquialmente llamamos *Mat-Tavelli*. Además de juntarse a tomar onces en El Tavelli, los miembros del grupo discuten entre ellos problemas de matemáticas, resuelven problemas de revistas como el American Mathematical Monthly, Mathematics Magazine y varias otras, mantienen una página WEB, e intercambian ideas sobre sus distintos intereses profesionales. A principios de 2010, surgió la idea de ir un poco más allá, y de crear una revista electrónica, el *Joven Matemático* (como su predecesora *Mlody Matematyk*) al nivel de licenciatura. Creemos que de esta manera podemos llegar a una audiencia más amplia y así prestar un pequeño servicio a los jóvenes de habla hispana con interés en matemática.

Tengo el agrado de presentarles el primer número de el *Joven Matemático*, publicado por el Grupo *Mat-Tavelli*. Esta revista electrónica aparecerá dos veces al año (fines de Octubre y fines de Marzo de cada año). Aprovecho de felicitar a los miembros del grupo, que han desarrollado esta idea con mucha dedicación y trabajo, y espero que la revista tenga una acogida favorable.



RAFAEL BENGURIA

## Contenidos

Editorial	1
El problema de la Reina Dido: panorama sobre los problemas de la isoperimetría	3
Una introducción a ecuaciones de diferencia finita	9
De la radiografía a la tomografía: una introducción matemática	15
Problemas y Soluciones	22
Noticias	30



# El problema de la Reina Dido: panorama sobre los problemas de la isoperimetría†

Mark S. Ashbaugh<sup>1</sup>, y Rafael D. Benguria<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of Mathematics, U. Missouri, Columbia, MO, ashbaughm@missouri.edu.

<sup>2</sup> Departamento de Física, P. Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile, rbenguri@puc.cl.

† Este artículo es una traducción del original en inglés, de los mismos autores, publicado en la página WEB de la conferencia “From Carthage to the World: The Isoperimetric Problem of Queen Dido and its Mathematical Ramifications”, realizada en Cártago, Túnez, entre el 24 y 29 de Mayo de 2010. Una traducción al francés, realizada por Jacqueline Fleckinger-Pellé, puede encontrarse en el mismo sitio de la conferencia. Agradecemos las contribuciones y comentarios de Lennie Friedlander, Evans Harrell, Lotfi Hermi y Frank Morgan. El trabajo de RB está financiado por la Iniciativa Científica Milenio (ICM, Chile), Proyecto P07-027-F.



El tema de la *isoperimetría* tiene una historia larga e interesante, tanto por su impacto en la imaginación de la gente y de la sociedad en general como por el ímpetu que ha dado al estudio de varias ideas matemáticas.

La *isoperimetría* empezó con el problema al que se vio enfrentada la Reina Dido, que fue encontrar la forma de la frontera que se debía poner en el suelo (utilizando tiras hechas con la piel de un buey) con el objeto de encerrar una superficie de área máxima. Si uno supone una línea de costa recta, entonces la respuesta, que manifiestamente ha sido encontrada por la Reina Dido, es disponer estas tiras en la forma de un semicírculo.

Uno encuentra el problema de la Reina Dido en el escrito ilustrado que ha hecho Lord Kelvin en 1893, que incluye varias extensiones del problema original. Si uno toma en cuenta que el precio del terreno puede variar, o que la línea costera puede ser irregular, uno puede llegar a varios problemas más complicados. En una exposición mucho más reciente, Hildebrandt y Tromba, en su libro *The Parsimonious Universe: Shape and Form in the Natural World* (publicado originalmente con el título *Mathematics and Optimal Form*), dan una cuenta mucho más detallada de problemas isoperimétricos y de su recurrencia a lo largo de la historia. En particular, es interesante comprobar cuantas ciudades amuralladas en la Edad Media fueron construidas de



modo de tener un perímetro aproximadamente circular, o ver en general que el crecimiento de muchas ciudades les ha dado una forma casi circular

Desde el punto de vista matemático, encontramos en los *Elementos* de Euclides (alrededor del 300 AC) la demostración que entre todos los rectángulos del mismo perímetro el que encierra la mayor área es el cuadrado. También, varios autores desde la antigüedad especularon sobre las propiedades optimales de los paneles de abeja. En dos dimensiones, Carl F. Gauss demostró que la manera de disponer círculos idénticos de modo que tengan la mayor densidad corresponde a un ordenamiento hexagonal, en el cual los círculos son tangentes entre sí, y sus centros se ubican en los vértices de una red hexagonal (panal de abejas). El problema análogo, el empaquetamiento de esferas de mayor densidad fue resuelto recién en el 2001, por Thomas Hales. La solución, conjeturada por J. Kepler en 1611, consiste en planos paralelos de esferas, en que en cada plano los centros de las esferas se arreglan en una red hexagonal, y al pasar de un plano a otro las esferas están intercaladas de modo que cada esfera del plano siguiente se encuentra en el centro del triángulo formado por tres esferas vecinas del plano anterior, tal como se arreglan típicamente las naranjas en pilas en los estantes de un supermercado ó en la feria libre).

Entre los antiguos griegos que trabajaron en el problema isoperimétrico se encuentran Zenodoro (c. 200–c. 140 AC), quién escribió un ensayo, ahora perdido, *Sobre las figuras isoperimétricas*, y Ptolomeo (c. 90–c. 168 DC). Gracias a Theon de Alejandría (c. 335–c. 405 DC), quién escribió un comentario sobre el trabajo de Ptolomeo, es que ahora sabemos de los resultados de Zenodoro. Al-Kindi, un matemático árabe, e hijo de uno de sus reyes, escribió en el siglo IX, *Un tratado de figuras isoperimétricas y de isopifanías*, es decir de sólidos de superficie dada. Existe también un tratado perdido de Al-Hasan ibn al Haytham (965–c. 1039 DC). Abu Ja'far al-Khazin, comentando sobre el *Almagesto* de Ptolomeo en el siglo X, generalizó los trabajos anteriores. Johannes de Sacrobosco (John of Holywood, c. 1195–c. 1256 DC), un escolar y astrónomo inglés, escribió el *Tractatus de Sphaera*. Un comentario sobre este trabajo de Sacrobosco, relacionado especialmente con la isoperimetría, se puede encontrar en la monografía *Dos nuevas ciencias* de Galileo, publicado en 1638.

El estudio matemático del Problema Isoperimétrico y de problemas relacionados realmente comenzó a despegar con el surgimiento del cálculo, cuando Newton, Leibniz, los Bernoulli, y otros desarrollaron sistemáticamente maneras de atacar problemas de optimización basadas en el cálculo. Luego de pocos años empezaron a atacar problemas de Cálculo de Variaciones (i.e., los problemas de encontrar un camino óptimo, o de encontrar la forma de una curva óptima dentro de una familia de curvas). Por ejemplo, el problema de la *braquistócrona* fue formulado por Johann Bernoulli y resuelto por Newton, y los dos hermanos Bernoulli (Jakob y Johann) entre otros. En la misma época se propuso y resolvió el problema de encontrar la forma de una cadena colgante (*la catenaria*). Así mismo, Newton consideró el problema de encontrar la forma óptima de un proyectil de modo que ofrezca la menor resistencia al aire (i.e., la cuestión del diseño óptimo del cono de un cohete ó misil), pero sin llegar a conclusiones definitivas. Otros, incluyendo al presidente de EE. UU., Thomas Jefferson, consideraron otros problemas, como el diseño óptimo de las reja del arado.

En el siglo que siguió a los desarrollos tempranos del cálculo por Newton, Leibniz, los hermanos Bernoulli, y otros, el Cálculo de Variaciones fue llevado a un estado relativamente avanzado, especialmente desde el punto de vista de las soluciones directas de estos problemas, por Euler y Lagrange. La solución explícita del problema isoperimétrico clásico pudo ser derivada en esos términos (usando Teoría Variacional con una ligazón), y muchos otros problemas pudieron ser formulados y resueltos. Euler y Lagrange habían mostrado que, en realidad, toda la Mecánica podía ser caracterizada de un modo variacional, y que varios problemas de la Física y de las Matemáticas podían ser entendidos desde un punto de vista de diversos principios variacionales y de optimización (recordemos, entre otros, el Principio de Tiempo Mínimo de Fermat, o más generalmente el Principio de Mínima Acción de D'Alembert y Maupertuis, problema para el cual la formulación definitiva fue dada por Euler). Casi un siglo mas tarde, Jacobi y Hamilton también hicieron contribuciones importantes en esta área, especialmente en lo que concierne a la Mecánica.



En el siglo XIX Jakob Steiner atacó el problema isoperimétrico clásico usando herramientas geométricas directas, las cuales fueron muy sugerentes e instructivas, y condujeron a muchos desarrollos posteriores. Alrededor de esta época, sin embargo, Karl Weierstrass se dió cuenta que podía haber problemas sutiles al atacar ciertos problemas de optimización puesto que podría darse el caso que no existan funciones extremales. Desde entonces se ha reconocido que el problema de existencia es por donde uno debiera empezar al considerar muchos problemas de geometría y del cálculo de variaciones. Esto condujo a varios resultados de existencia y de unicidad, y en general a lo que actualmente se conoce como el *Método Directo del Cálculo de Variaciones*, en el cual uno trata de demostrar existencia directamente usando sucesiones minimizantes (ó maximizantes según sea el caso) y varias herramientas matemáticas (desarrolladas por Weierstrass, Schwarz, Poincaré, Hilbert y varios de sus contemporáneos, y también por matemáticos actuales).

Un desarrollo muy fructífero que sucedió al iniciarse el siglo XX fue la observación de Hurwitz que el problema isoperimétrico clásico podía ser resuelto completamente en términos de series de Fourier y de algunas de sus propiedades básicas (e.g., la desigualdad de Wirtinger). El uso de análisis de Fourier en el contexto de la desigualdad isoperimétrica clásica, fue luego extendido a problemas análogos en dimensiones superiores, para lo cual los esféricos armónicos juegan el papel de las series de Fourier. Este campo es presentado elegantemente, desde una perspectiva moderna, en la monografía de Groemer, *Geometric Aspects of Fourier Series and Spherical Harmonics*.

Asimismo, en el siglo XIX, el físico belga, J. Plateau experimentó con pompas de jabón y conjeturó que cualquier lazo de alambre (i.e., cualquier curva cerrada suave) puede ser el borde de una película de jabón de superficie mínima (i.e., de curvatura media nula). En 1936, J. Douglas obtuvo una de las dos primeras medallas Fields por demostrar que cada lazo limita un disco mínimo inmerso. Sin embargo, la solución de Douglas admite auto intersecciones de un tipo tal que nunca ocurre en las películas de jabón reales. Solamente luego de la introducción de la Teoría Geométrica de la Medida, con contribuciones de L. C. Young, E. de Giorgi, E.R. Reifenberg, H. Federer, W. Fleming, F. Almgren, J. Taylor, R. Hardt, L. Simon, y otros, se pudo establecer la existencia de cierto tipo de películas de jabón. Todavía es un problema abierto determinar si toda curva de Jordan suave limita una película de jabón de superficie mínima (i.e., si es el borde de “un conjunto mínimo  $(M, 0, \delta)$ ”).

En 1844, Schwarz demostró que una pompa de jabón esférica corresponde a la forma de encerrar un volumen máximo con una superficie dada. La pregunta siguiente es determinar que forma adopta una pompa de jabón doble (i.e., que encierra dos regiones contiguas), de superficie dada y que encierra volumen máximo. Varios años de progreso por matemáticos (incluyendo alumnos de pregrado) culminaron en 2002 con la demostración de la *Conjetura de la doble pompa de jabón* hecha por M. Hutchins, F. Morgan, M. Ritoré, y A. Ros.

Desde el punto de vista de ingeniería y diseño, quizás el primer problema de interés práctico fue considerar *la forma de la columna más resistente*, un problema formulado por Lagrange en 1773, pero resuelto completamente mucho después. Hacia la mitad del siglo XIX, T. Clausen fue capaz de sobrepasar las dificultades encontradas por Lagrange y avanzar hacia la solución de dicho problema. Sin embargo, algunas de las dificultades quedaron abiertas hasta hace poco. Para tener una idea de la situación actual de este problema recomendamos leer el artículo publicado por Steve Cox en la revista *Mathematical Intelligencer*, “The shape of the ideal column”. Algunas de las contribuciones recientes más pertinentes sobre este problema han sido hechas por J. Keller, I. Tadjbakhsh, M. Overton y S. Cox. Este problema tiene relación con el problema de pandeo de columnas y de problemas similares que pueden ser planteados para barras horizontales sometidas a distintas cargas. También tiene relación con problemas análogos para placas y para otras estructuras que tienen mayor complejidad geométrica.

También a mediados del siglo XIX, J.C.B. St. Venant propuso el problema de encontrar la forma de la sección transversal de una barra o columna uniforme de modo que ofrezca la mayor resistencia a la torsión



(este problema se conoce actualmente como el problema de la mayor rigidez torsional). St. Venant conjeturó que para un área dada de la sección transversal de la columna, suponiendo además que se trata de una región simplemente conexa (manteniendo todos los demás parámetros físicos fijos) la forma que ofrece la mayor rigidez torsional es la forma circular. Este problema fue resuelto finalmente por George Pólya en 1948 (en el sentido original formulado por St. Venant). A partir de entonces ha habido muchos otros trabajos sobre el problema de torsión, ya que también es de interés considerar regiones que no son simplemente conexas y muchas otras variaciones del problema original.

Pocos años después que St. Venant consideró el problema de torsión, Lord Rayleigh propuso (y formuló conjeturas sobre) los tres problemas isoperimétricos siguientes: (1) determinar la forma de un tambor que minimiza el tono fundamental entre todos los tambores de área dada (manteniendo fijos los demás parámetros físicos); (2) en electrostática, entre todos los cuerpos de volumen finito dado que ocupan una región simplemente conexa, determinar la forma de un condensador que minimiza la capacidad; (3) determinar la forma de una placa empotrada de área dada que minimiza el tono fundamental. En los tres casos, Lord Rayleigh conjeturó que la forma óptima es el círculo (o la esfera, en el caso del problema del condensador tridimensional).

Otros problemas relacionados incluyen la pregunta sobre qué forma geométrica minimiza las pérdidas de calor (pregunta descrita en lenguaje colorido como la explicación de por qué un gato se enrolla en forma de ovillo en una fría noche de invierno), y la pregunta sobre cuál es la forma de un cuerpo que minimiza su energía potencial gravitacional.

Todos los problemas físicos mencionados anteriormente pueden ser formulados como problemas variationales, y varios de ellos finalmente como problemas de autovalores. En la primera parte del siglo XX hubo un progreso importante en varios de estos problemas, siendo probablemente el progreso más espectacular la solución del problema de la minimización del tono fundamental de un tambor realizada independientemente por G. Faber y E. Krahn en la década de los 20 (siendo la respuesta que la forma óptima es un círculo del área dada). Poco tiempo antes, R. Courant había obtenido una versión más débil de este resultado, en el sentido que dado un dominio de perímetro fijo, la manera de minimizar el tono fundamental era tomar un tambor de forma circular. Anteriormente, H. Poincaré había hecho progresos en el problema de la capacidad de un cuerpo, problema para el cual la solución final fue establecida por G. Szegő en 1930.

Alrededor de 1950, Pólya y Szegő emprendieron la tarea de estudiar y sistematizar los trabajos previos sobre problemas isoperimétricos en física, y de avanzar en este campo en diversas direcciones. Su monografía, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, publicada en esa época, es un clásico en este campo. Las principales técnicas que ellos empujaron incluyen la simetrización de Steiner, y en general desigualdades para rearrreglos de funciones. Se podría decir con justicia que todos los trabajos modernos sobre desigualdades isoperimétricas para cantidades físicas se han construido sobre el trabajo de Pólya y Szegő y de sus colaboradores. El libro de Pólya y Szegő contiene, por ejemplo, las soluciones del problema de St. Venant y del sólido de capacidad mínima mencionados anteriormente.

El interés de Pólya y Szegő en este tema atrajo la atención de muchos otros autores y condujo hacia muchos desarrollos interesantes e importantes en este campo. Quizás, entre los contribuyentes iniciales principales a estos desarrollos están Payne, Hersch, y Weinberger, quienes participaron en muchos de estos avances e inspiraron a sus estudiantes y a otros a entrar en este campo. Es así como encontramos a Payne, Pólya, y Weinberger obteniendo simples y atractivas *desigualdades universales* para combinaciones de autovalores en la mitad de los 50's y conjeturando cuál debiera ser la versión óptima de algunas de estas desigualdades. Esto condujo al tema de *Desigualdades Isoperimétricas para Cuocientes entre Autovalores*, que atrajo un interés considerable (en particular el cuociente  $\lambda_2/\lambda_1$ ) y que fue resuelto finalmente por Ashbaugh y Benguria en 1990. Luego de un avance significativo inspirado por el trabajo de H.-C. Yang a principios de los 90, el tema de *desigualdades universales entre autovalores* ha despegado con una gran cantidad de contribuciones y avances, y con un arduo trabajo hasta hoy. El trabajo de Yang ha permitido a los investigadores hacer conexiones



fundamentales entre el campo de *desigualdades universales entre autovalores* y el tema de *comportamiento asintótico de autovalores*, iniciado por Hermann Weyl en 1910. Esta conexión también es un campo de trabajo muy activo con importantes contribuciones de Q.-M. Cheng, H.-C. Yang, E. M. Harrell y L. Hermi, E. M. Harrell y J. Stubbe, y varios otros.

Los métodos conformes juegan un papel importante en el estudio de problemas bidimensionales. G. Szegő los utilizó para demostrar que el círculo minimiza  $\mu_1(\Omega)^{-1} + \mu_2(\Omega)^{-1}$  dentro de la clase de dominios simplemente conexos en el plano, de superficie dada (aquí, los  $\mu_j$ 's son los autovalores positivos del Laplaciano de Neumann). A su vez, J. Hersch demostró que el autovalor positivo más pequeño del operador de Laplace–Beltrami sobre la esfera  $S^2$ , no puede exceder el valor del autovalor para la métrica esférica con la misma superficie. La observación crucial es que el numerador en el cociente de Rayleigh,  $\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 dx$  es invariante conforme cuando la dimensión  $d$  es igual a 2. P. C. Yang y S.-T. Yau demostraron que el primer autovalor de una superficie de *genus*  $g$  de área dada tiene una cota superior; además, ellos dieron una cota precisa. En el caso  $g = 2$ , Jacobson, Levitin, Nadirashvili, Nigam, y Polterovich demostraron que la cota de Yang y Yau es óptima, y que se alcanza sobre una métrica singular sobre una superficie de tipo conforme:  $y^2 = x^5 - x$ . Su demostración esta basada en cálculo numérico y sería interesante tener una demostración sin cálculo numérico. En el caso en que la dimensión es mayor a 2, Urakawa demostró que, en la clase de métricas de volumen fijo, el primer autovalor positivo del Laplaciano puede ser arbitrariamente grande. Sin embargo, dentro de una clase conforme dada, es acotado, y las respectivas cotas están acotadas por abajo cuando uno varía sobre las distintas clases conformes (Friedlander, Nadirashvili). Recientemente, Colbois, Dryden, y El Soufi han estudiado cotas para autovalores del Laplaciano para métricas  $G$ -invariantes en ciertas clases conformes. Aquí,  $G$  denota un grupo de Lie actuando sobre la variedad.

Obviamente existe una gran cantidad de otros tópicos que figuran en la historia de los problemas isoperimétricos y de áreas relacionadas y lo más que podemos hacer en un ensayo como éste es indicar algunos de los puntos más sobresalientes. Para compensar las deficiencias de cobertura concluimos con un breve resumen de la literatura reciente relevante, que pensamos que puede ser usada para ampliar la cobertura y para dar indicaciones sobre otros tópicos interesantes en esta área. Desde el punto de vista de una perspectiva histórica, recomendamos el artículo de Lord Kelvin y el libro panorámico de Hildebrandt y Tromba (mencionados anteriormente). Para mayor información sobre la desigualdad isoperimétrica clásica, sus refinamientos y extensiones, es muy útil consultar el libro de Burago y Zalgaller, *Geometric Inequalities*, y el artículo de revisión de Robert Osserman, *The isoperimetric inequality*, publicado en 1978 en el Bulletin of the American Mathematical Society. Otros libros y artículos de interés incluyen la monografía de Tikhomirov, *Stories of Maxima and Minima*, el libro de Pólya, *Mathematics and Plausible Reasoning* (en dos volúmenes), y el artículo de Pólya, *Circle, sphere, symmetrization, and some classical physical problems*, el libro de D. Pedoe *Circles: A Mathematical View*, y el libro de N. Kazarinoff, *Geometric Inequalities*. Para revisar aspectos del problema isoperimétrico que ocurre en el campo de geometría Riemanniana, uno puede consultar los libros de I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, *Riemannian Geometry: A Modern Introduction*, y *Isoperimetric Inequalities: Differential Geometric and Analytic Perspectives*. También el libro de Marcel Berger, *A Panoramic View of Riemannian Geometry*, ó sus libros *Geometry I and II* contienen mucha información relacionada útil, especialmente en el campo clásico. La monografía de Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, incluye tópicos que se extienden bien hacia el dominio de las desigualdades isoperimétricas para cantidades físicas.

Desde el punto de vista de desigualdades isoperimétricas para cantidades físicas, uno puede encontrar muchas cosas de interés en los trabajos de Pólya y de Chavel mencionados anteriormente. Además, a partir de la década de los 60, el artículo de L. Payne, “Isoperimetric inequalities and their applications”, publicado en la revista SIAM Review, jugó un papel clave en esta área. Este artículo provee las bases de muchos de los problemas isoperimétricos en física (incluyendo su formulación matemática), y al mismo tiempo formula una variedad de problemas abiertos y de conjeturas. En 1991, L. Payne actualizó su discusión sobre muchos de estos problemas en su contribución “Some comments on the past fifty years of isoperimetric inequalities” en su comentario bibliográfico a la monografía “Inequalities: Fifty Years on from Hardy, Littlewood and Pólya”,



editada por W. N. Everitt. Además de lo anterior, están los libros de C. Bandle, (“Isoperimetric Inequalities and Applications”), de R. Sperb (“Maximum Principles and Their Applications”), y de B. Kawohl (“Rearrangements and Convexity of Level Sets in PDE”), escritos en la década de los 80’s, y las monografías más recientes de D. Bucur and G. Buttazzo (“Variational Methods in Shape Optimization Problems”), A. Henrot (“Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators”), y S. Kesavan (“Symmetrization and Applications”).

Finalmente mencionamos el excelente libro de Lieb y Loss, *Análisis*, Segunda Edición, el cual cubre muchos temas de interés en el campo de simetrización y de rearrreglos en el contexto de las desigualdades clásicas de análisis y de la Física Matemática, así como de muchos otros. En particular, el libro cubre los problemas de Capacidad Mínima y de Mínima Energía Potencial Gravitatoria, y contiene una discusión de las desigualdades de Lieb–Thirring y de su relación con el problema de la *Estabilidad de la Materia*.



# Una introducción a ecuaciones de diferencia finita

Juan Raphael Diaz Simões, Francisco José Vial Prado  
*École Polytechnique, París, Francia*

## 1. Introducción

La idea del artículo es incentivar al lector a conocer y utilizar los métodos que aporta esta teoría. No abordaremos problemas de convergencia, unicidad de soluciones, ni regularidad de funciones que utilizaremos, y daremos pruebas parciales de los resultados, ya que estos temas pueden ser tratados de la misma manera que en el cálculo diferencial, y es un buen ejercicio para alumnos de pregrado. El lector es invitado a continuar haciendo este tipo de analogías en otros temas como las ecuaciones funcionales y ecuaciones a derivadas parciales.

## 2. Operador $\Delta$

Sea  $a$  una sucesión de números reales<sup>1</sup> de término general  $a_n$ . Definimos la sucesión  $(\Delta a)_n$  como

$$(\Delta a)_n = a_{n+1} - a_n. \quad (1)$$

Es decir el operador  $\Delta$  actúa sobre las sucesiones reales en sucesiones reales. Este operador tiene propiedades similares al operador derivada, que enlistamos a continuación.

- Operador inverso (propiedad de suma telescópica):

$$\sum_{k=m}^n (\Delta a)_k = a_{n+1} - a_m. \quad (2)$$

- Relación con la traslación: Sea  $T$  el operador actuando sobre la sucesión  $a$  como  $(Ta)_n = a_{n+1}$ . Entonces

$$\Delta = T - 1. \quad (3)$$

- Regla del producto: sean  $a_n, b_n$  dos sucesiones reales. Entonces

$$(\Delta ab)_n = a_{n+1}b_{n+1} - a_nb_n = a_{n+1}(\Delta b)_n + b_n(\Delta a)_n = a_n(\Delta b)_n + b_{n+1}(\Delta a)_n \quad (4)$$

- Suma por partes: de las propiedades 1 y 2 se deduce

$$a_{n+1}b_{n+1} - a_mb_m = \sum_{k=m}^n a_k(\Delta b)_k + \sum_{k=m}^n b_{k+1}(\Delta a)_k. \quad (5)$$

- Iteraciones. Sea  $p$  un natural, entonces

$$(\Delta^p a)_n = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^{p-k} a_{n+k}. \quad (6)$$

<sup>1</sup>Todos los resultados se extienden sin complicaciones para sucesiones de números complejos, pero por simplicidad nos restringimos a las sucesiones reales.



· Otras diferencias. Sea  $q$  un natural, entonces

$$a_{n+q} - a_n = (T^q - 1)a = \sum_{k=1}^q \binom{q}{k} (\Delta^k a)_n. \quad (7)$$

Esto es análogo al desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto  $n$ . Tomando  $n = 0$ , tenemos la fórmula de MacLaurin

$$a_q = \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (\Delta^k a)_0. \quad (8)$$

Las demostraciones de estas fórmulas quedan propuestas al lector.

### 3. Ecuaciones de diferencia finita

Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Nos interesamos en la ecuación

$$(\Delta a)_n = \alpha a_n \quad (9)$$

El lector podrá notar que esta ecuación es equivalente a

$$a_{n+1} = (\alpha + 1)a_n, \quad (10)$$

cuya solución está dada por

$$a_n = (\alpha + 1)a_{n-1} = (\alpha + 1)^2 a_{n-2} = \dots = (\alpha + 1)^n a_0. \quad (11)$$

Sea  $c_n$  una sucesión dada. Consideramos la ecuación de diferencia no homogénea

$$(\Delta a)_n - \alpha a_n = c_n, \quad (12)$$

la cual no se puede resolver inmediatamente como en el caso anterior. El caso  $\alpha = -1$  es trivial, con solución  $a_n = c_n$ , por lo que en adelante consideramos  $\alpha \neq -1$ . Según la regla del producto, tenemos que un “factor integrante” para esta ecuación es una sucesión  $z_n$  que verifica  $\Delta z_n = -\alpha z_{n+1}$  con condición  $z_0$  arbitraria no nula. Al resolver esta ecuación como en el párrafo anterior, tenemos  $z_n = (\alpha + 1)^{-n}$  (tomamos  $z_0 = 1$ ). Entonces, multiplicando ambos miembros por  $z_{n+1} = -\alpha(\Delta z)_n$ ,

$$z_{n+1}(\Delta a)_n + a_n(\Delta z)_n = c_n z_{n+1} \quad (13)$$

$$\Delta(a z)_n = c_n z_{n+1}, \quad (14)$$

sumando a ambos lados tenemos

$$a_n z_n = -z_0 a_0 + \sum_{k=0}^n c_k z_{k+1}, \quad (15)$$

con lo que finalmente

$$a_n = a_0(\alpha + 1)^n + \sum_{k=0}^n c_k (\alpha + 1)^{n-k-1}. \quad (16)$$



#### 4. Ecuaciones de diferencia finita a orden superior

Si consideramos una ecuación del tipo

$$p_0 a_n + p_1 a_{n+1} + p_2 a_{n+2} + \cdots + p_k a_{n+k} = 0, \quad (17)$$

entonces según la fórmula (7), esto puede llevarse a una expresión del tipo

$$P(\Delta)a = 0, \quad (18)$$

donde  $P$  es un polinomio a coeficientes reales. Es posible factorizar este polinomio en los complejos con factores lineales de la forma  $(\Delta + r)$ , (los cuales conmutan), y entonces resolver como en los casos anteriores. Por ejemplo consideremos la ecuación

$$a_{k+2} - 5a_{k+1} + 6a_k = 0. \quad (19)$$

Usando la fórmula (7), tenemos que la ecuación se escribe como

$$\Delta^2 a - 3\Delta a + 2a = 0 \quad (20)$$

$$(\Delta - 1)(\Delta - 2)a = 0 \quad (21)$$

(donde denotamos  $a$  como la sucesión de término general  $a_n$ ). Luego resolvemos por sustitución las dos ecuaciones  $(\Delta - 1)u = 0$  y  $u = (\Delta - 2)a$  como en la sección 2.

*Notas:*

- Notemos que (19) puede escribirse como  $(T - 2)(T - 3)a = 0$ , y usando la propiedad (3), tenemos inmediatamente  $(\Delta - 1)(\Delta - 2)a = 0$  sin necesidad de utilizar la fórmula (7). Claramente esto puede hacerse para cualquier ecuación lineal a coeficientes constantes de orden superior.

- Si en la factorización del polinomio existe algún factor repetido  $k$  veces, digamos  $(\Delta - \lambda)$ , por sustitución se prueba que la solución de  $(\Delta - \lambda)^k a = 0$  aportada es de la forma  $Q(n)a_\lambda$ , donde  $Q$  es un polinomio de grado  $k - 1$  por definir y  $a_\lambda$  es solución de  $(\Delta - \lambda)a = 0$ .

- Si una sucesión  $z_n$  a valores complejos, que denotamos como  $a + ib$  con  $a, b$  sucesiones reales (es decir  $z_n = a_n + ib_n$ ), es solución a una ecuación de la forma  $P(\lambda)z = 0$ , con  $P$  polinomio real, entonces  $\text{Re}(z) = a$ ,  $\text{Im}(z) = b$  también son solución (esto se sigue de  $0 = P(\Delta)z = P(\Delta)(a + ib) = P(\Delta)a + iP(\Delta)b$ , donde se entiende  $\Delta(ib) = i\Delta(b)$ ).

- Al resolver una ecuación del tipo  $(\Delta - \lambda)(\Delta - \mu)a = 0$  con  $\lambda \neq \mu$ , se puede verificar que el espacio de soluciones es la suma directa de los núcleos de los operadores  $(\Delta - \lambda)$  y  $(\Delta - \mu)$ , por lo cual la solución a la ecuación se escribe como combinación lineal de dos elementos en estos núcleos (de dimensión 1). Por inducción se extiende a ecuaciones de orden superior.

#### 5. La transformada de Laplace

El lector seguramente ya conoce la transformada de Laplace y sus múltiples aplicaciones en ecuaciones diferenciales. Tenemos la intención de encontrar el análogo para las secuencias.

Sea  $a$  una sucesión. Definimos la aplicación  $\mathcal{L}$  que a la sucesión  $a$  le asigna la función de variable real  $\tilde{a}(x)$ , definida por

$$\tilde{a}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^k} a_k, \quad (22)$$



donde el dominio de esta función es el conjunto de valores de  $x$  tales que la suma converge. El dominio de la transformada  $\mathcal{L}$  es el conjunto de sucesiones reales tales que el dominio de  $\tilde{a}(x)$  es no vacío, es decir existe al menos un valor real de  $x$  tal que la suma converge.

Hemos construido este operador recordando la definición de la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} \exp(-sx)f(x)dx, \quad (23)$$

donde el hecho más importante es que la función  $\exp(-sx)$  tiene su análogo en las sucesiones exponenciales de la forma  $(1 + \alpha)^{-n}$ .

De la definición (22) notamos que

$$\tilde{a}\left(\frac{1}{y} - 1\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k, \quad (24)$$

es decir la función  $\tilde{a}(1/y - 1)$  es la función generatriz de la sucesión  $a$ , en el caso de que la función admita una expansión de Taylor alrededor de  $y = 0$ , con lo que podemos escribir una inversión de la transformada:

$$a_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k}{dy^k} \tilde{a}\left(\frac{1}{y} - 1\right) \right|_{y=0}. \quad (25)$$

El lector podrá notar que esta última operación es muy delicada, es necesario observar la convergencia de la función  $\tilde{a}(x)$  y todas sus derivadas en  $\pm\infty$ .

Sean  $a, b$  dos sucesiones. Definimos también el producto de convolución  $a * b$  como la sucesión de término general  $(a * b)_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ .

El operador  $\mathcal{L}$  goza de interesantes propiedades, análogas a la transformada de Laplace en ecuaciones diferenciales, que enumeramos a continuación:

1.  $\mathcal{L}$  es lineal.
2.  $\widetilde{\Delta a} = x\tilde{a}(x) - (x+1)a_0$ .
3.  $\widetilde{\Sigma a} = (1 + \frac{1}{x})\tilde{a}(x)$ .
4.  $\widetilde{\Delta^n a} = x^n \tilde{a}(x) - (x+1) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} (\Delta^k a)_0$ .
5.  $\widetilde{\Sigma^n a} = (1 + \frac{1}{x})^n \tilde{a}(x)$ .
6.  $\widetilde{a * b} = \tilde{a}\tilde{b}$ .
7.  $\widetilde{ka_k} = -(x+1)\tilde{a}'(x)$ .
8.  $\widetilde{k^n a_k} = (-(x+1)\frac{d}{dx})^n \tilde{a}(x)$ .
9.  $\widetilde{\lambda^k a_k} = \tilde{a}\left(\frac{x-\lambda+1}{\lambda}\right)$ .

Invitamos al lector a demostrar las propiedades anteriores utilizando las fórmulas de la sección 2, o inducción.

## 6. Tres aplicaciones

**Los números de Fibonacci.** Éste es un problema clásico que el lector probablemente conoce, pero creemos oportuno revisarlo bajo los métodos anteriores.



Queremos calcular un término general para los números de Fibonacci, definidos por el problema

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \\ F_0 = 1, F_1 = 1. \end{cases} \quad (26)$$

En nuestro lenguaje, la ecuación se escribe

$$\Delta^2 F + \Delta F - F = 0, \quad (\Delta^2 + \Delta - 1)F = 0, \quad (\Delta + \phi)(\Delta + \bar{\phi})F = 0, \quad (27)$$

donde  $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$  es el llamado número áureo, y escribimos  $\bar{\phi} = (1 - \sqrt{5})/2 = 1 - \phi$ . Con esto, resolvemos y encontramos

$$F_n = \alpha(1 - \phi)^n + \beta\phi^n. \quad (28)$$

Los coeficientes  $\alpha, \beta$  pueden obtenerse de las condiciones iniciales, y finalmente

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{n+1} - (1 - \phi)^{n+1}). \quad (29)$$

**Teorema de Abel.** Sean  $a, b$  dos sucesiones reales, tales que  $B = \Sigma b$  es acotada y  $a$  es monótona con  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Entonces la serie de término general  $a_n b_n$  converge.

*Demostración:* Sea  $M$  una cota superior para  $B$ . Sea  $p$  un natural. Según la fórmula de suma por partes, tenemos

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=p}^{\infty} a_n (\Delta B)_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n B_n - a_p B_p - \sum_{n=p}^{\infty} B_{n+1} (\Delta a)_n = -a_p B_p - \sum_{n=p}^{\infty} B_{n+1} (\Delta a)_n. \quad (30)$$

Luego

$$\left| \sum_{n=p}^{\infty} a_n b_n \right| \leq |a_p B_p| + \left| \sum_{n=p}^{\infty} B_{n+1} (\Delta a)_n \right| \leq |a_p B_p| + M \sum_{n=p}^{\infty} |(\Delta a)_n| \quad (31)$$

$$= |a_p B_p| + M |a_p| \leq 2M |a_p|. \quad (32)$$

Al tomar  $p \rightarrow \infty$  vemos que el resto de la serie tiende a 0, lo que demuestra el teorema.

*Nota:* todos los resultados de este artículo se extienden para sucesiones de números complejos, pero en el teorema de Abel es crucial la hipótesis “la sucesión  $a$  es real, monótona, tendiendo a cero”. Como aplicación, el lector puede mostrar que la serie

$$\sum_{k \geq 1} \frac{e^{2\pi i n x}}{n^{3/2}}$$

converge para todo  $x$  no entero.

**Generalización de los números de Fibonacci.** Consideremos una secuencia en la cual cada elemento es la suma de los  $m$  elementos anteriores:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{n-m+1}. \quad (33)$$

El polinomio asociado a la ecuación es  $T^m = T^{m-1} + T^{m-2} + \cdots + T + 1$ , el cual no es fácil de factorizar para  $m \geq 2$ . La transformada de Laplace en este caso aporta una solución simple. Notamos que  $\sum_{k=0}^{m-1} a_{n-k} =$



$(a * \mathbb{1}^{(m)})_n$ , donde  $\mathbb{1}^{(m)}$  es la sucesión que vale 1 en los  $m$  primeros elementos y 0 en el resto. Entonces tomamos transformada a ambos lados de la ecuación:

$$\Delta a + a = a * \mathbb{1}^{(m)} \quad (34)$$

$$(x+1)\tilde{a} - (x+1)a_0 = \tilde{a} \frac{1 - \left(\frac{1}{1+x}\right)^m}{1 - \frac{1}{1+x}} \quad (35)$$

de donde

$$\begin{aligned} \tilde{a} \left( \frac{1}{y} - 1 \right) &= \frac{a_0}{1 - \sum_{k=0}^m y^{k+1}} = a_0 \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^m y^{k+1} \right)^j = a_0 \sum_{j=0}^{\infty} y^j \left( \sum_{k=0}^m y^k \right)^j \\ &= a_0 \sum_{j=0}^{\infty} y^j \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \left( \sum_{k=0}^{m-1} y^{k+1} \right)^i = a_0 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} y^{j+i} \left( \sum_{k=0}^{m-1} y^k \right)^i \\ &= a_0 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^j \sum_{l=0}^i \binom{j}{i} \binom{i}{l} y^{j+i+l} \left( \sum_{k=0}^{m-2} y^k \right)^l. \end{aligned}$$

Repetiendo  $(m-2)$  veces el proceso (es decir, expandir en binomio de Newton la suma interior), y notando que la suma de los índices es el exponente de  $y$ , encontramos

$$a_0 \sum_{k=0}^{\infty} y^k \sum_{0 \leq i_1, \dots, i_{m-1} \leq k} \binom{i_1}{i_2} \binom{i_2}{i_3} \cdots \binom{i_{m-1}}{k - \sum_p i_p},$$

luego, si denotamos  $F^{(m)}$  la sucesión de Fibonacci definida en (33), tenemos que el término general es

$$(F^{(m)})_n = \sum_{0 \leq i_1, \dots, i_{m-1} \leq n} \binom{i_1}{i_2} \binom{i_2}{i_3} \cdots \binom{i_{m-1}}{n - \sum_p i_p}.$$

Para  $m=2$ , tenemos la sucesión de Fibonacci clásica:  $F_n^{(2)} = \sum_{k=0}^n \binom{k}{n-k} = F_n$ .

*Agradecimientos:* Los autores agradecen al profesor Rafael Benguria por su incondicional apoyo y enorme iniciativa al crear esta revista, a los editores, y a Daniel Narrias por sus perspicaces comentarios.



# De la radiografía a la tomografía: una introducción matemática

Carlos Sing-Long

Stanford University, Palo Alto, CA, EE.UU.

## 1. Introducción

Las técnicas de formación de imágenes médicas constituyen uno de los adelantos más grandes de la ciencia médica. Estas permiten adquirir imágenes que representan estructuras internas del cuerpo humano, sin necesidad de intervenirlo. En particular, muchas de ellas adquieren una imagen correspondiente a un corte transversal, esto es, la sección que observaríamos si pudiéramos cortar el cuerpo humano con un plano. Estudiar las imágenes obtenidas permite detectar cuando algunas estructuras fisiológicas presentan cambios morfológicos o funcionales que indican la presencia de una patología. De este modo, es posible detectar la existencia de un tumor sin necesidad de intervenir al paciente. Notemos que de no disponer de una técnica similar, nuestra única posibilidad para determinar la existencia de un tumor sería a través de mediciones indirectas tales como biopsias o la presencia de ciertos metabolitos en la sangre.

Estas técnicas, en su gran mayoría, no adquieren directamente la intensidad de un punto de la imagen. Por el contrario, el proceso es indirecto y los datos adquiridos corresponden a otras magnitudes. Por ello, es necesario aplicar alguna transformación a los datos para obtener la intensidad de un punto en la imagen. Para deducir esta transformación es necesario, en general, hacer uso de principios físicos. Estos nos permiten representar el proceso de adquisición de datos como un problema matemático donde, por ejemplo, las magnitudes físicas son representadas por funciones y los cambios que estas sufren por operadores actuando sobre determinados espacios de funciones. Esta representación, que denominamos *modelo matemático*, nos permite estudiar el *problema inverso*, esto es, qué transformación debemos aplicar a los datos medidos para obtener la imagen deseada. Pero muchas veces esta pregunta es precedida por otras, como por ejemplo, si acaso existe alguna transformación que nos permita recuperar la imagen. Para responder a ellas a veces es necesario recurrir a argumentos matemáticos delicados y algunas de ellas dan origen a áreas activas de investigación.

En este artículo ilustramos estos puntos presentando una de las primeras técnicas utilizadas para adquirir imágenes médicas: la radiografía. Esta permite adquirir proyecciones de cortes transversales de un objeto. En este caso, la intensidad de un punto en la imagen nos entrega información de la densidad de los materiales en esa línea del corte, por lo que esta técnica adquiere de manera directa la información que observamos en la imagen. Debido a que se trata de una proyección, los objetos aparecen superpuestos en la imagen y no siempre es posible distinguir la presencia de algún objeto extraño, como por ejemplo un tumor. Por tanto, pese a que se trata de un método directo de adquisición, la información no es suficiente para reconstituir el corte transversal.

Pero nos podemos preguntar, ¿es posible reconstituir un corte transversal a partir de muchas de sus proyecciones? Esta pregunta nos lleva a definir un objeto matemático, denominado la transformada de Radon, que modela el proceso de adquisición de las múltiples proyecciones. En este caso, a diferencia de la radiografía, los datos medidos no corresponderán a intensidades en un punto de la imagen, sino que a un conjunto de datos. Para recuperar la imagen a partir de ellos, debemos estudiar las propiedades de la transformada de Radon para así determinar si esto es posible y bajo qué condiciones lo es.

## 2. Radiografías

Durante el año 1895, Wilhelm Roentgen se encontraba estudiando distintos tubos al vacío, y en particular, su comportamiento cuando se produce una descarga eléctrica a través de ellos. En uno de estos experimentos, Roentgen cubrió completamente el tubo con un material opaco que ocultara la luz que este emitía durante la



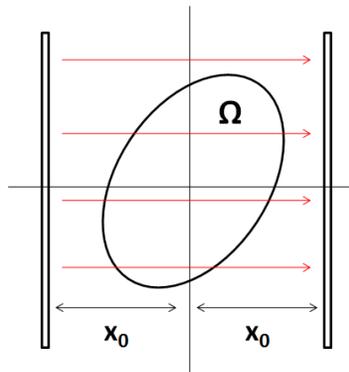
descarga. Sin embargo, al realizar el experimento se dio cuenta que una placa cubierta de platinocianuro de bario y ubicada a metros de distancia, brillaba. De esta observación dedujo la existencia de un nuevo tipo de rayos, que denominó *rayos X* debido al uso de la variable  $x$  en matemáticas para designar incógnitas. Luego de este descubrimiento, experimentó utilizando diversos objetos para impedir el paso de estos rayos, lo que le permitió darse cuenta que estos atraviezan fácilmente el tejido muscular, pero son atenuados por las estructuras óseas del cuerpo humano. Esta observación hizo que los rayos X fueran rápidamente adoptados en medicina, disciplina que denominó a las imágenes adquiridas *radiografías*.

El sistema de adquisición de la imagen consiste de una fuente, la cual emite rayos X en una dirección bien definida, y un detector, que usualmente consiste en una placa plana sobre la cual se formará la imagen deseada. El objeto de interés se encontrará entre la fuente y la placa.

A continuación describiremos el mecanismo físico a través del cual se forman las imágenes en el detector y cómo a partir de él podemos formular un modelo matemático abstracto. A partir de este modelo, podremos identificar la relación exacta entre el objeto de interés y la imagen adquirida.

### 2.1. La física tras las radiografías

Para entender cómo se forma la imagen sobre el detector, primero analizamos un caso muy simple, en el que nuestro objeto es simplemente una región plana y la imagen sobre el detector es simplemente una línea de intensidad variable. Consideremos el plano dotado de un sistema de coordenadas cartesianas. Supongamos que el objeto de interés está contenido en una región  $\Omega$  acotada, que sus dimensiones son pequeñas en relación al tamaño de la fuente y el detector, y que tanto la fuente como el detector son perpendiculares al eje  $x$ . Consecuentemente, los rayos se propagan de forma paralela al eje  $x$ . Sin perder generalidad, asumimos que la fuente se encuentra sobre la recta  $\{x : x = -x_0\}$ , que el detector se encuentra sobre la recta  $\{x : x = x_0\}$  y que la región  $\Omega$  se encuentra *entre* la fuente y el detector, esto es,  $-x_0 \leq \inf_{x \in \Omega} x \leq \sup_{x \in \Omega} x \leq x_0$ .



Llamemos  $I(x)$  a la intensidad de los rayos que cruzan<sup>1</sup> el punto  $x$ . Supondremos que la fuente emite rayos de igual intensidad a lo largo de su superficie, esto es,  $I(-x_0, y) = I_0$ . Además, supondremos que fuera del objeto los rayos no varían su intensidad y, por tanto,  $\nabla I(x) = 0$  para  $x \in \Omega^c$ . Por el contrario, al interactuar con la materia, los rayos disminuirán su intensidad al transferir energía al objeto. Cuando esto ocurre, los rayos no cambiarán su dirección<sup>2</sup> y, por tanto, el único fenómeno de interés será la atenuación de la intensidad de los rayos.

Para describir el mecanismo de atenuación, utilizamos un modelo físico simple. Este supone que, local-

<sup>1</sup>El lector atento se preguntará por que no consideramos la variable tiempo en nuestro problema. Esto se debe simplemente a que consideramos el régimen estacionario del problema, que se alcanza en escalas de tiempo muy pequeñas.

<sup>2</sup>En otras palabras, no consideraremos efectos de dispersión o *scattering*.



mente, la disminución es proporcional a la intensidad. En otras palabras<sup>3</sup>:

$$dI(x, y) = -f(x, y)I(x, y)dx, \quad (1)$$

donde  $f \geq 0$  es una función de la variable  $x$  que representa la tasa de atenuación. Es razonable suponer que  $f$  se encuentra acotada superiormente. Esta es una ecuación diferencial simple, cuya solución es:

$$I(x) = I_0 e^{-\int_{-x_0}^x f(s, y) ds}. \quad (2)$$

Es importante destacar que  $f$  asume valores distintos de cero sólo dentro de la región  $\Omega$ , esto es, su soporte está contenido en  $\Omega$ . Si no fuese así, existiría atenuación fuera del objeto, lo que contradiría nuestra hipótesis. Esto es consistente con el hecho de que la distancia ente la fuente y el detector es irrelevante en la medida que el objeto esté entre ellas<sup>4</sup>.

Finalmente, sabemos que la intensidad de la imagen sera proporcional a la intensidad de los rayos incidentes sobre el detector. Por simplicidad, asumimos que la constante de proporcionalidad es igual a 1. Definimos la proyección  $p$  del coeficiente de atenuación  $f$  como

$$p(t) = -\log\left(\frac{I(x_0, t)}{I_0}\right) = \int_{-x_0}^{x_0} f(s, t) ds. \quad (3)$$

En otras palabras, la información adquirida en el detector se encuentra directamente relacionada con el coeficiente de atenuación del material que constituye el objeto de interés. Dado que el coeficiente es proporcional a la densidad del material, la información adquirida nos permite determinar las regiones donde hay materiales de mayor densidad (como por ejemplo hueso) a aquellas donde hay materiales de menor densidad (como por ejemplo, músculo o grasa).

## 2.2. Un modelo matemático

Construir un modelo matemático implica identificar y reconocer los objetos relevantes involucrados en el proceso físico para luego describir las relaciones entre ellos en un lenguaje abstracto. El modelo obtenido nos permite trabajar con objetos matemáticos (funciones, transformadas, etc.) y nos permite omitir detalles específicos de la implementación (errores de redondeo, interferencia, transductores, unidades, etc.).

Para construir el modelo, primero identificamos cuál es el objeto de interés. Del análisis físico, este es el coeficiente de atenuación. Representamos esta magnitud a través de una función  $f$ . Pero, para que esta función sea representativa del coeficiente de atenuación, ciertas restricciones deben ser impuestas. En nuestro caso, la restricción más importante es el hecho de que  $f$  tiene su soporte contenido en  $\Omega$ . Esta restricción vincula  $f$  con un objeto localizado en el espacio. También es razonable imponer que  $|f|$  esté acotado y, en consecuencia, que  $f$  sea integrable (y, en particular, módulo cuadrado integrable) en todo el espacio. Por el contrario, la hipótesis  $f \geq 0$  no será crucial en nuestros desarrollos.

Una vez definido nuestro objeto matemático de interés, nos centramos en la transformación que el fenómeno físico produce sobre este objeto. Del análisis previo, la transformación relevante, que denominaremos  $\mathcal{P}$ , es aquella que asocia a  $f$  su proyección  $p$ . Dado que  $f$  es a soporte compacto en  $\Omega$ , y dado que el objeto se encuentra entre la fuente y el detector, podemos extender la integral en (3) a todo el espacio, de modo que

$$p(t) = \mathcal{P}[f](t) = \int_{\mathbb{R}} f(s, t) ds. \quad (4)$$

Finalmente, describimos cuál es el proceso de medición, esto es, cuál es la información que efectivamente está siendo adquirida. En nuestro caso, la magnitud medida es la intensidad en el detector, que es simplemente,

$$I(x_0, y) = I_0 e^{-p(y)}. \quad (5)$$

<sup>3</sup>Dado que no consideramos efectos de dispersión, la ecuación diferencial no incluye términos que involucren  $dy$ , esto es, no hay "transferencia de intensidad" de un rayo que se propaga sobre la recta  $\{x : y = y_1\}$  a uno que se propaga sobre la recta  $\{x : y = y_2\}$ .

<sup>4</sup>Notar que esta afirmación reposa tanto en la suposición de que los rayos no interactúan con el medio fuera del objeto como en la suposición de que no existe dispersión.



Dado que la magnitud medida y la función  $p$  están relacionadas por funciones elementales, podemos asumir sin problemas que la información adquirida es simplemente  $p$ .

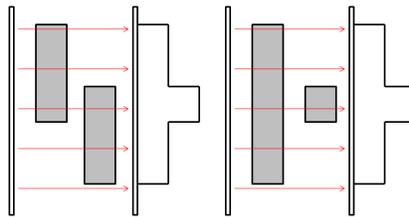
De este modo, hemos reducido el proceso físico a uno puramente abstracto. Concretamente, el proceso de formación de imágenes de rayos X puede ser modelado como una transformación  $\mathcal{P}$  que asocia a una función  $f$  acotada y a soporte compacto en  $\Omega$  su proyección  $\mathcal{P}[f]$  definida en (4). Una primera consecuencia de nuestro modelo es la siguiente. De (5) sabemos que la intensidad medida está relacionada trivialmente con  $p = \mathcal{P}[f]$ . Nos preguntamos, ¿cuántas funciones  $f$  dan origen a la misma función  $p$ ? La respuesta es simple. Sea  $f^*$  una función de media nula en su primera variable, esto es,

$$\int_{\mathbb{R}} f(s, t) ds \equiv 0, \quad (6)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Es claro que

$$\mathcal{P}[f + f^*](t) = \int_{\mathbb{R}} (f + f^*)(s, t) ds = \int_{\mathbb{R}} f(s, t) ds + \int_{\mathbb{R}} f^*(s, t) ds = \mathcal{P}[f](t). \quad (7)$$

En otras palabras, no es posible distinguir entre las funciones  $f$  y  $f + f^*$  mediante este proceso. Por lo mismo, si bien la radiografía nos permite obtener información sobre  $f$ , no contiene la información suficiente para discriminar entre dos casos que pueden ser muy distintos. Esta observación tiene implicaciones importantes en casos prácticos. Matemáticamente, esto quiere decir que no es posible resolver el problema inverso y, de manera más específica, que el operador  $\mathcal{P}$  no es inyectivo.



A continuación utilizaremos el modelo, y no el fenómeno físico, para desarrollar los fundamentos de la tomografía.

### 3. De la radiografía a la tomografía

Si bien la utilidad de las radiografías es considerable, tal como vimos anteriormente, la información que proveen no es suficiente. Por ejemplo, algunos tumores pulmonares pueden ser fácilmente ocultados por la caja torácica y la columna vertebral. Por tanto, es deseable disponer de una técnica que permita reconstruir  $f$  completamente. En la sección anterior verificamos que no es posible hacerlo a partir de una sola proyección. Pero, ¿es posible reconstruir el objeto a partir múltiples proyecciones? Para estudiar esta pregunta, primero extendemos nuestro modelo matemático para describir de manera precisa el fenómeno que queremos describir.

#### 3.1. La transformada de Radon

Al igual que en el caso previo, asumimos que no existe atenuación fuera de la región  $\Omega$  y, en consecuencia, la separación entre la fuente y el detector no será de interés<sup>5</sup>. De ello, la única variable que debemos introducir a nuestro modelo es el ángulo relativo entre la fuente y el detector y el objeto de interés. Definimos  $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$  y llamamos  $\theta \in \mathbb{T}$  al ángulo relativo.

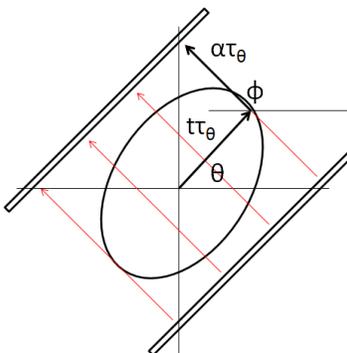
Para modelar de manera adecuada las proyecciones en ángulo  $\theta$ , primero estudiamos cómo describir las rectas a lo largo de las cuales se propagan los rayos. Denotamos  $\tau_\theta$  al vector unitario de ángulo  $\theta$ , con  $\theta \in \mathbb{T}$

<sup>5</sup>Esto siempre y cuando el objeto este contenido entre la fuente y el detector.



fijo. Sea  $\varphi = \pi/2 + \theta$  definido como en la figura más abajo. Deseamos describir la familia de rectas  $\{\gamma_{\theta,t}\}_{t \in \mathbb{R}}$  con dirección  $\tau_\varphi$  que se encuentran a una distancia  $|t|$  del origen. Para ello, consideramos para  $t \in \mathbb{R}$  fijo y  $\alpha \in \mathbb{R}$  las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x(\alpha) &= -t \sin \varphi + \alpha \cos \varphi, \\ y(\alpha) &= t \cos \varphi + \alpha \sin \varphi. \end{aligned} \quad (8)$$



Eliminando  $\alpha$  de ambas ecuaciones obtenemos:

$$-x \sin \varphi + y \cos \varphi = x \cos \theta + y \sin \theta = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\tau}_\theta = t. \quad (9)$$

En consecuencia, la familia de rectas está descrita por

$$\gamma_{\theta,t} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\tau}_\theta = t\}. \quad (10)$$

La proyección de  $f$  a lo largo de la recta  $\gamma_{\theta,t}$  es simplemente,

$$p_\theta(t) = \int_{\gamma_{\theta,t}} f(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad (11)$$

donde  $dS(\mathbf{x})$  es el elemento de superficie de la recta  $\gamma_{\theta,t}$ . Esta expresión puede simplificarse mediante el uso del lenguaje de distribuciones. Sea  $\delta$  el delta de Dirac. Entonces,

$$p_\theta(t) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\tau}_\theta - t) d\mathbf{x}. \quad (12)$$

En otras palabras, para  $\theta \in \mathbb{T}$  fijo, podemos definir una transformada  $\mathcal{P}_\theta$  que toma una función  $f$  y le asocia su proyección en ángulo  $\theta$ . Consideremos en primera instancia que efectivamente disponemos de un set completo de proyecciones  $\{p_\theta\}_{\theta \in \mathbb{T}}$ , con  $p_\theta$  como fue definido previamente. A partir de estas proyecciones podemos construir una función  $P : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  dada por

$$P(\theta, t) = p_\theta(t) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\tau}_\theta - t) d\mathbf{x}. \quad (13)$$

La transformada de Radon  $\mathcal{R}$  es la transformación que asocia  $P$  a la función  $f$ . En otras palabras,

$$\mathcal{R}[f](\theta, t) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\tau}_\theta - t) d\mathbf{x}. \quad (14)$$

De ello, hemos extendido nuestro modelo inicial a uno que incorpora la inclinación relativa entre el objeto y la fuente y el detector. El operador  $\mathcal{R}$  tiene una forma mucho mas compleja que el operador  $\mathcal{P}$ . Queda por verificar si este operador más complejo es invertible, esto es, si es posible determinar únicamente  $f$  a partir de  $\mathcal{R}[f]$ .



### 3.2. Inversión

Una de las características más interesantes de la transformada de Radon es que se encuentra íntimamente relacionada con la transformada de Fourier. Recordemos que la transformada de Fourier de una función  $f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{C}$  se define como

$$\hat{f}(\xi) = \int f(\mathbf{x}) e^{-i\xi \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (15)$$

y su inversa se encuentra dada por

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-N} \int \hat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot \mathbf{x}} d\xi. \quad (16)$$

Una de sus propiedades más importantes es el teorema de la convolución. La convolución entre dos funciones  $f$  y  $g$  se define como

$$f * g(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{y})g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (17)$$

El teorema de la convolución afirma que

$$\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi). \quad (18)$$

Nuestro primer resultado relaciona directamente la transformada de Fourier y la transformada de Radon.

**Teorema.** Sea  $f$  acotada y a soporte compacto en  $\Omega$ , con  $\Omega$  subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $p_\theta = \mathcal{R}[f](\theta, \cdot)$  su transformada de Radon evaluada en  $\theta$ , definida en (12). Entonces:

$$\hat{p}_\theta(\xi) = \hat{f}(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta). \quad (19)$$

*Demostración.* Este resultado se demuestra por cálculo directo:

$$\begin{aligned} \hat{p}_\theta(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} P(\theta, t) e^{-i\xi t} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \iint_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} \cdot \tau_\theta - t) d\mathbf{x} \right) e^{-i\xi t} dt \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \left( \int_{\mathbb{R}} \delta(\mathbf{x} \cdot \tau_\theta - t) e^{-i\xi t} dt \right) d\mathbf{x} \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) e^{-i\xi \mathbf{x} \cdot \tau_\theta} d\mathbf{x} \\ &= \hat{f}(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta). \end{aligned} \quad (20)$$

Notemos que en este proceso hemos intercambiado las integrales en  $dt$  y  $d\mathbf{x}$ . Para justificar este intercambio hacemos uso del teorema de Fubini utilizando la medida producto adecuada, la que se compone de una medida de Dirac. Este es un detalle técnico que va más allá de los contenidos del presente artículo.

Este resultado sugiere un método de inversión basado precisamente en la transformada de Fourier. En efecto, se tiene:

**Teorema.** La función  $f$  puede ser recuperada de forma exacta a través de la expresión:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \hat{p}_\theta * h(\mathbf{x} \cdot \tau_\theta) d\theta, \quad (21)$$

con  $\hat{h}(\xi) = |\xi|$ .



*Demostración.* Primero, por definición:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot \mathbf{x}} d\xi. \quad (22)$$

Utilizando coordenadas polares,  $(x, y) \mapsto (\xi, \theta)$  y  $dx dy \mapsto \xi d\xi d\theta$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \hat{f}(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta) e^{i\xi \tau_\theta \cdot \mathbf{x}} \xi d\xi d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \hat{p}_\theta(\xi) e^{i\xi \tau_\theta \cdot \mathbf{x}} \xi d\xi d\theta. \end{aligned} \quad (23)$$

Notemos que  $p_{\theta+\pi}(t) = p_\theta(-t)$  y que  $\tau_{\theta+\pi} = -\tau_\theta$ . De ello, usando primero el cambio de variables  $\theta \mapsto \theta + \pi$  y luego el cambio de variables  $\xi \mapsto -\xi$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi^2} \int_\pi^{2\pi} \int_0^\infty \hat{p}_\theta(\xi) e^{i\xi \tau_\theta \cdot \mathbf{x}} \xi d\xi d\theta &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\infty \hat{p}_\theta(-\xi) e^{-i\xi \tau_\theta \cdot \mathbf{x}} \xi d\xi d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^0 \hat{p}_\theta(\xi) e^{i\xi \tau_\theta \cdot \mathbf{x}} (-\xi) d\xi d\theta. \end{aligned} \quad (24)$$

En conclusión:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |\xi| \hat{p}_\theta(\xi) e^{i\xi \tau_\theta \cdot \mathbf{x}} d\xi \right) d\theta. \quad (25)$$

Por el teorema de la convolución, es claro que el término entre paréntesis es la transformada inversa del producto  $|\xi| \hat{p}_\theta(\xi)$  evaluada en  $\mathbf{x} \cdot \tau_\theta$ , de donde concluimos<sup>6</sup>.

En otras palabras, cuando disponemos de suficientes proyecciones, podemos reconstruir exactamente  $f$  a partir de  $\mathcal{R}[f]$ . Notemos que el teorema nos asegura que es posible recuperar los datos y cuál es la operación matemática que debemos realizar, pero no indica ni sugiere qué implementación debemos utilizar para adquirir la imagen utilizando este método.

#### 4. Conclusiones

En el presente artículo describimos el proceso de formación de imágenes en radiografía y tomografía. A partir del fenómeno físico que hace posible la radiografía construimos un modelo matemático que nos permitió estudiar algunas limitaciones de este método. En particular, la principal limitación es la posibilidad de obtener dos imágenes iguales a partir de objetos distintos. Sin embargo, al considerar más proyecciones fuimos capaces de probar que sí es posible reconstruir el objeto. Para considerar múltiples proyecciones debimos extender nuestro modelo y fue necesario definir la transformada de Radon. En particular, esta transformada resume todo el proceso de formación de imágenes y es el objeto central en el estudio de la tomografía.

#### Bibliografía

S.G. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*, 3ra. Edición, Academic Press, 2009.

<sup>6</sup>Para el lector atento, la función  $|\xi|$  no es integrable, por lo que *a priori* no admite una transformada de Fourier inversa. Sin embargo, en el espacio de distribuciones si es posible dar sentido a esta expresión. Esto va más allá de los contenidos expuestos por lo que lo omitimos por simplicidad.



Los problemas propuestos y las soluciones a los problemas de esta sección deben ser enviados por correo electrónico a [joven.matematico@gmail.com](mailto:joven.matematico@gmail.com) antes del día 15 de Marzo de 2011. Los nombres de los autores de las soluciones recibidas serán publicados en una próxima edición, junto con la mejor solución. Generalizaciones y comentarios adicionales son bienvenidos. Se incentiva a alumnos y profesores a enviar soluciones y problemas propuestos, tanto como problemas antiguos presentando una solución nueva. Un asterisco (\*) junto al número del problema indica que los editores no disponen de una solución.

## Problemas

**1. Propuesto por Andrés Fielbaum, Universidad de Chile, Santiago, Chile.** Sea  $n \geq 2$  un número natural. Jaime y Roberto juegan el siguiente juego: Jaime dice un entero positivo menor o igual a  $n$ . Luego, Roberto le suma al número de Jaime un entero positivo menor o igual a  $n$ . El juego continúa así por turnos, y si un jugador llega a  $n^2$ , gana. ¿Existe una estrategia ganadora para alguno de los dos jugadores?

**2. Propuesto por los editores.** Sea  $A_n$  una matriz de  $n \times n$  con entradas

$$(A_n)_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{i^2} + 1 & \text{si } i = j, \\ \frac{1}{ij} & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Calcule  $\det(A_n)$ ,  $\lim \det(A_n)$ , y muestre que  $A_n$  es definida positiva para todo  $n \geq 1$ .

**3. Propuesto por los editores.** Muestre que

$$\int_0^1 x \left\{ \frac{1}{x} \right\} dx = 1 - \frac{\pi^2}{12},$$

donde  $\{a\} = a - [a]$  denota la parte fraccionaria del real  $a$ .

**4. Propuesto por los editores.** Sea  $s = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  un vector columna con entradas reales, y para  $k \in \mathbb{N}$  notamos  $s^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)^T$ . Así el determinante  $D_0 = |s^0 \ s^1 \ s^2 \ \dots \ s^{n-2} \ s^{n-1}|$  es el determinante de Vandermonde. Calcule

a) el determinante  $D_1 = |s^0 \ s^1 \ s^2 \ \dots \ s^{n-2} \ s^n|$  (es decir el de Vandermonde con una variación en la última columna),

b) el determinante  $D_2 = |s^0 \ s^1 \ s^2 \ \dots \ s^{n-3} \ s^{n-1} \ s^n|$  (variación en las dos últimas columnas).

**5. Propuesto por Juan Pablo de la Cruz, PUC, Santiago, Chile.** El lector puede verificar que

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= 5^2, \\ 10^2 + 11^2 + 12^2 &= 13^2 + 14^2, \\ 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 &= 25^2 + 26^2 + 27^2. \end{aligned}$$

a) Generalize y pruebe el resultado.

b) (\*) También es cierto que  $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ . ¿Existe un conjunto de números consecutivos verificando una propiedad similar para exponente 3? ¿Y para exponentes mayores que 3?



6. Propuesto por Andrés Fielbaum, Universidad de Chile, Santiago, Chile. Sea  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función real positiva, log-cóncava, y tal que  $f(0) > 1$ . Muestre que  $f(x+y) \leq f(x)f(y)$ .

## Soluciones

1. Muestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos^{-1} \left( \frac{1 + \sqrt{n^2 + 2n} \sqrt{n^2 + 4n + 3}}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{\pi}{6}. \quad (1)$$

(Enunciado publicado originalmente en la revista *American Mathematical Monthly* como problema 11383.)

Solución por Ariel Norambuena, PUC, Santiago, Chile.

Denotando por  $S$  a la suma dada, se tiene que

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \cos^{-1} \left( \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \sqrt{1 - \frac{1}{(n+1)^2}} \sqrt{1 - \frac{1}{(n+2)^2}} \right),$$

pues  $n^2 + 2n = (n+1)^2 - 1$  y  $n^2 + 4n + 3 = (n+2)^2 - 1$ . Notando que

$$\cos(\cos^{-1}(x_1) - \cos^{-1}(x_2)) = \cos(\cos^{-1}(x_1)) \cos(\cos^{-1}(x_2)) + \sin(\cos^{-1}(x_1)) \sin(\cos^{-1}(x_2)),$$

se concluye que

$$\cos^{-1}(x_1) - \cos^{-1}(x_2) = \cos^{-1} \left( x_1 x_2 + \sqrt{1 - x_1^2} \sqrt{1 - x_2^2} \right),$$

para  $x_1 < x_2$ . Finalmente,

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \cos^{-1} \left( \frac{1}{n+2} \right) - \cos^{-1} \left( \frac{1}{n+1} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos^{-1} \left( \frac{1}{n+2} \right) - \cos^{-1} \left( \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}. \quad \blacksquare$$

2. Sean  $\alpha_0, \alpha_1$ , y  $\alpha_2$  las medidas en radianes de los ángulos de un triángulo agudo, y para  $i \geq 3$  sea  $\alpha_i = \alpha_{i-3}$ . Muestre que

$$\sum_{i=0}^2 \frac{\alpha_i^2}{\alpha_{i+1} \alpha_{i+2}} (3 + 2 \tan^2 \alpha_i)^{1/4} \geq 3\sqrt{3}.$$

(Enunciado publicado originalmente en la revista *American Mathematical Monthly* como problema 11385.)

Solución por Sebastián García Sáenz, PUC, Santiago, Chile.

El lado izquierdo de la desigualdad se puede escribir como

$$\frac{1}{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} \sum_{i=0}^2 f(\alpha_i),$$



donde se definió  $f(x) = x^3(3 + 2 \tan^2 x)^{1/4}$ , función que es continua en  $D = (0, \pi/2)$ , donde los ángulos están definidos.

Se tiene que

$$\frac{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}{3} = \frac{\pi}{3} \geq (\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2)^{1/3} \Rightarrow \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \leq \frac{\pi^3}{27},$$

lo cual se sigue de la desigualdad AM-GM. De modo que basta mostrar que

$$\sum_{i=0}^2 f(\alpha_i) \geq \frac{\pi^3 \sqrt{3}}{9}.$$

Ahora, la función  $f(x)$  es convexa en  $D$ . Esto implica que

$$f(\alpha_0) + f(\alpha_1) + f(\alpha_2) \geq 3f\left(\frac{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}{3}\right) = 3f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi^3 \sqrt{3}}{9}.$$

La igualdad se cumple cuando  $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \pi/3$ , i.e., cuando el triángulo es equilátero. ■

**3.** Para  $z \in \mathbb{C}$ , sea  $H_n(z)$  una matriz hermítica de  $n \times n$  cuyas entradas en la diagonal son todas iguales a 1 y cuyas entradas superiores a la diagonal son todas iguales a  $z$ . Para  $n \geq 2$ , encuentre los valores de  $z$  tal que  $H_n(z)$  es semi-definida positiva.

(Enunciado publicado originalmente en la revista *American Mathematical Monthly* como problema 11396.)

Solución por Francisco Vial, École Polytechnique, París, Francia.

Usaremos la regla de Dodgson para determinantes para encontrar una fórmula explícita para  $\det(H_n(z)) = |H_n(z)|$ :

$$\det \left[ (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \right] \cdot \det \left[ (a_{i,j})_{\substack{2 \leq i \leq n-1 \\ 2 \leq j \leq n-1}} \right] = \\ \det \left[ (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq n-1}} \right] \cdot \det \left[ (a_{i,j})_{\substack{2 \leq i \leq n \\ 2 \leq j \leq n}} \right] - \det \left[ (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ 2 \leq j \leq n}} \right] \cdot \det \left[ (a_{i,j})_{\substack{2 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n-1}} \right].$$

$H_n(z)$  está definida como

$$H_n(z) = \begin{pmatrix} 1 & z & z & \dots & z \\ z^* & 1 & z & \dots & z \\ z^* & z^* & 1 & \dots & z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^* & z^* & z^* & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

y vemos que

$$\det \left[ (h_{i,j})_{\substack{2 \leq i \leq n-1 \\ 2 \leq j \leq n-1}} \right] = |H_{n-2}|, \det \left[ (h_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq n-1}} \right] = |H_{n-1}|, \det \left[ (h_{i,j})_{\substack{2 \leq i \leq n \\ 2 \leq j \leq n}} \right] = |H_{n-1}|.$$

Luego, por la regla de Dodgson,

$$|H_n| \cdot |H_{n-2}| = |H_{n-1}|^2 - |A_{n-1}| |B_{n-1}|, \tag{2}$$



donde

$$A_n(z) = \begin{pmatrix} z & z & z & \dots & z \\ 1 & z & z & \dots & z \\ z^* & 1 & z & \dots & z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z^* & z^* & z^* & \dots & z \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad B_n(z) = \begin{pmatrix} z^* & 1 & z & \dots & z \\ z^* & z^* & 1 & \dots & z \\ z^* & z^* & z^* & \dots & z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z^* & z^* & z^* & \dots & z^* \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

Podemos calcular  $|A_n(z)|$  en términos de  $|H_n(z)|$  y  $|H_{n-1}(z)|$  como sigue:

$$\begin{aligned} \det(A_n) &= \begin{vmatrix} z & z & z & \dots & z \\ 1 & z & z & \dots & z \\ z^* & 1 & z & \dots & z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z^* & z^* & z^* & \dots & z \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & z & z & \dots & z \\ z^* & 1 & z & \dots & z \\ z^* & z^* & 1 & \dots & z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z & z & z & \dots & z \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n-1} \left(\frac{z}{z^*}\right) \begin{vmatrix} 1 & z & z & \dots & z \\ z^* & 1 & z & \dots & z \\ z^* & z^* & 1 & \dots & z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z^* & z^* & z^* & \dots & z^* \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n-1} \left(\frac{z}{z^*}\right) ((z^* - 1)|H_{n-1}| + |H_n|). \end{aligned}$$

(Note que se efectuaron  $n - 1$  permutaciones de filas, luego se multiplicó la última fila por  $\frac{z^*}{z}$  y finalmente se calculó el determinante usando la expansión de Laplace en la última columna o fila).

Similarmente tenemos

$$\det(B_n) = (-1)^{n-1} \left(\frac{z^*}{z}\right) ((z - 1)|H_{n-1}| + |H_n|).$$

Reemplazando en (2) y dividiendo por  $|H_{n-2}|$  (el análisis de la solución  $|H_n(z)| = 0$  es trivial, siendo siempre  $H_n$  semi-positiva definida) obtenemos una ecuación de recurrencia para  $|H_n|$ :

$$\begin{aligned} |H_n| \cdot |H_{n-2}| &= |H_{n-1}|^2 - ((z^* - 1)|H_{n-2}| + |H_{n-1}|)((z - 1)|H_{n-2}| + |H_{n-1}|) \\ &= (2 - z - z^*)|H_{n-1}||H_{n-2}| - (z - 1)(z^* - 1)|H_{n-2}|^2. \\ |H_n| &= (2 - z - z^*)|H_{n-1}| - (z - 1)(z^* - 1)|H_{n-2}|. \end{aligned}$$

Es fácil ver que las raíces del polinomio característico  $r^2 - (2 - z - z^*)r + (z - 1)(z^* - 1) = 0$  son  $r_1 = 1 - z$  y  $r_2 = 1 - z^*$ . Por lo tanto tenemos que existen  $\alpha, \beta$  tales que

$$\begin{cases} |H_n| &= \alpha r_1^n + \beta r_2^n \\ |H_1| &= 1 \\ |H_2| &= 1 - z z^*. \end{cases}$$

Con esto concluimos

$$|H_n| = \frac{z^*}{z^* - z}(1 - z)^n + \frac{z}{z - z^*}(1 - z^*)^n = 2\Re\left(\frac{z}{z - z^*}(1 - z^*)^n\right).$$

Si tomamos  $1 - z = \rho e^{i\theta}$ ,  $1 - z^* = \rho e^{-i\theta}$ , con  $\rho \geq 0$ ,  $-\pi \leq \theta < \pi$ , es decir coordenadas polares con el centro en  $z = 1$ ,  $|H_n(z)|$  se escribe como

$$|H_n| = \frac{\rho^{n-1}}{\sin \theta} (\rho \sin((n-1)\theta) - \sin(n\theta)).$$



Luego, si  $z = 1 - \rho e^{i\theta}$ ,  $H_n$  es positiva semi-definida si y sólo si cada subdeterminante  $|H_k|$ ,  $1 \leq k \leq n$  es no negativo, es decir,

$$\Re \left( \frac{z}{z - z^*} (1 - z^*)^k \right) = \frac{1}{\sin \theta} (\rho \sin((k-1)\theta) - \sin(k\theta)) \geq 0, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Analizamos el caso  $z = z^* \equiv a$ , que claramente no está incluido en el análisis anterior. Aquí, notamos que la matriz tiene por valores propios  $1 - a$  (con multiplicidad  $n - 1$ ) y  $1 + a(n - 1)$  (para ver esto, notamos que todas las filas suman  $1 + a(n - 1)$ , entonces es claramente un valor propio asociado al vector  $(1, 1, \dots, 1)^T$ ). Luego el determinante está dado por

$$|H_n(a)| = (a - 1)^{n-1} (1 + a(n - 1)),$$

y con álgebra elemental mostramos que las desigualdades  $|H_k| \geq 0$   $k = 1, 2, \dots, n$  se reducen a

$$\begin{aligned} \frac{-1}{n-1} \leq \frac{-1}{k-1} \leq a < 1, \quad k = 2, 3, \dots, n \\ \Rightarrow \frac{-1}{n-1} \leq a \leq 1. \end{aligned}$$

(El caso  $a = 1$  es también parte de la solución, ya que  $|H_n(1)| = 0 \quad \forall n \geq 2$ .)

■

**4.** Sea  $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  una función continua tal que  $f(0) = f(1) = 0$  y  $f(x) > 0$  para  $0 < x < 1$ . Muestre que existe un cuadrado con dos vértices en el intervalo  $(0, 1)$  en el eje  $X$ , y los otros dos vértices en la gráfica de  $f$ .

(Enunciado publicado originalmente en la revista *American Mathematical Monthly* como problema 11402.)

*Solución por Javier Acosta, University of Minnesota, Twin Cities, MN, EE.UU.*

Definimos las siguientes funciones auxiliares (se verifican continuas):

- $\phi_1 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $\phi_1(x) := x + f(x)$ .
- $\phi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $\phi_2(x) := \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$
- $y(x) := \phi_2 \circ \phi_1(x)$  (notar que siempre se tiene que  $x < y(x)$ , pues  $f > 0$  en  $(0, 1)$ ).
- $F : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $F(x) := f(y(x)) - f(x)$ .

Ciertamente  $F$  es una función continua, y si tuviera alguna raíz  $x_0 \in (0, 1)$  los puntos  $x_0$  y  $y(x_0)$  resuelven el problema. Pues si  $F(x_0) = 0$ , se tiene que  $f(x_0) = f(y_0)$ , y como  $x_0 \in (0, 1)$  entonces  $0 < f(x_0) = f(y_0)$ . Luego  $y_0 < 1$ , y por lo tanto  $y_0 = \phi_1(x_0) = x_0 + f(x_0) \Rightarrow y_0 - x_0 = f(x_0) = f(y_0)$ . Mostraremos que  $F$  tiene una raíz en  $(0, 1)$ .

Afirmación: Existen  $x_1, x_2 \in (0, 1)$  tales que  $F(x_1) > 0$  y  $F(x_2) < 0$ .

Demostración: Sea  $0 < \varepsilon < \max\{f(x) : x \in [0, 1]\}$ . Por la continuidad de  $f$ , el conjunto  $f^{-1}([\varepsilon, \infty))$  es cerrado en  $[0, 1]$  y no vacío, y por lo tanto alcanza su máximo y su mínimo.



Sea  $\delta = \min\{f^{-1}([\varepsilon, \infty))\}$ . Claramente  $0 < \delta < 1$ , pues  $f(\delta) = \varepsilon > 0$ . La definición de  $\delta$  implica que si  $0 < x < \delta$ , entonces  $f(x) < \varepsilon$ .

Consideremos la línea auxiliar  $l(x) := \delta - x$ . Como  $l(0) = \delta > 0 = f(0)$ , y  $l(\delta) = 0 < \varepsilon = f(\delta)$ , por el teorema del valor intermedio (TVI) existe  $x_1 \in (0, \delta)$  tal que  $\delta - x_1 = f(x_1)$ .

Luego  $x_1 + f(x_1) = \delta < 1$ . Por lo tanto,  $y(x_1) = \delta$ , y como  $f(x_1) < \varepsilon$  y  $f(y(x_1)) = \varepsilon$ , se tiene que  $F(x_1) = f(y(x_1)) - f(x_1) > 0$ .

Sea ahora  $x_2 = \max\{f^{-1}([\varepsilon, \infty))\}$ . Nuevamente se tiene que  $0 < x_2 < 1$ , pues  $f(x_2) = \varepsilon > 0$ . Si  $x_2 + f(x_2) \leq 1$ , entonces  $y(x_2) = x_2 + f(x_2)$ ; y si  $x_2 + f(x_2) > 1$ , entonces  $y(x_2) = 1$ . En cualquier caso se tiene que  $x_2 < y(x_2)$ , y por la definición de  $x_2$  se satisface que  $f(y(x_2)) < \varepsilon = f(x_2)$ . Lo anterior implica que  $F(x_2) < 0$ .

Finalmente, aplicando el TVI a la función  $F$  se asegura la existencia de  $x_0$  entre  $x_1$  y  $x_2$  (y por lo tanto en el intervalo  $(0, 1)$ ) tal que  $F(x_0) = 0$ , concluyendo la demostración. ■

5. Sean  $m, n$  enteros positivos, y primos relativos. Muestre que

$$\sum_{k=1}^n k^2 \left\lfloor \frac{km}{n} \right\rfloor = n \sum_{k=1}^n k \left\lfloor \frac{km}{n} \right\rfloor - \frac{n(n^2 - 1)(m - 1)}{12}.$$

(Enunciado publicado originalmente en la revista *Mathematics Magazine* como problema 1812.)

Solución por Francisco Vial, *École Polytechnique, París, Francia*.

Sea  $f_n(k) = (nk - k^2) \left\lfloor \frac{km}{n} \right\rfloor$  y

$$S := \sum_{k=1}^n f_n(k) = \sum_{k=1}^n (nk - k^2) \left\lfloor \frac{km}{n} \right\rfloor = \sum_{k=0}^n (nk - k^2) \left\lfloor \frac{km}{n} \right\rfloor.$$

Luego,

$$\begin{aligned} 2S &= \sum_{k=0}^n f_n(k) + \sum_{k=0}^n f_n(n-k) \\ &= \sum_{k=0}^n (nk - k^2) \left\lfloor \frac{km}{n} \right\rfloor + \sum_{k=0}^n (n(n-k) - (n-k)^2) \left\lfloor \frac{(n-k)m}{n} \right\rfloor \\ &= \sum_{k=0}^n (nk - k^2) \left( \left\lfloor \frac{km}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(n-k)m}{n} \right\rfloor \right). \end{aligned}$$

Note que  $\left\lfloor \frac{(n-k)m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor m - \frac{km}{n} \right\rfloor = m + \left\lfloor -\frac{km}{n} \right\rfloor$ . Luego,

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (nk - k^2) \left( m + \left\lfloor \frac{km}{n} \right\rfloor + \left\lfloor -\frac{km}{n} \right\rfloor \right).$$



Dado  $(m, n) = 1$ , el número  $x_k := \frac{m}{n}k$  es no entero para todo  $0 < k < n$ , y por tanto tenemos  $\lfloor x_k \rfloor + \lfloor -x_k \rfloor = -1$ . Para  $k = n$ ,  $x_n = \lfloor \frac{nm}{n} \rfloor + \lfloor \frac{-nm}{n} \rfloor = 0$ . Luego,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (nk - k^2)(m-1) + \frac{1}{2}(0n - 0^2)(m) + \frac{1}{2}(nn - n^2)(m) \\ &= \frac{m-1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} nk - k^2 \\ &= \frac{(m-1)}{2} \left( \frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{n(2n-1)(n-1)}{6} \right), \\ S &= \frac{n(n^2-1)(m-1)}{12}. \end{aligned}$$

con lo que finalmente,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (nk - k^2) \left\lfloor \frac{km}{n} \right\rfloor &= \frac{n(n^2-1)(m-1)}{12}, \\ \sum_{k=1}^n k^2 \left\lfloor \frac{km}{n} \right\rfloor &= n \sum_{k=1}^n k \left\lfloor \frac{km}{n} \right\rfloor - \frac{n(n^2-1)(m-1)}{12}. \end{aligned}$$

■

6. Sea  $f$  una función real continua definida en  $[0, 1]$  y que satisface

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx.$$

Demuestre que existe un número real  $c$ ,  $0 < c < 1$ , tal que

$$cf(c) = \int_0^1 x f(x) dx.$$

(Enunciado publicado originalmente en la revista *Mathematics Magazine* como problema 1824.)

*Solución por Andrés Fielbaum, Universidad de Chile, Santiago, Chile.*

En el caso trivial  $f \equiv 0$ , se tendrá que cualquier  $c \in (0, 1)$  verificará la propiedad. En otro caso se tendrá que  $f$  debe tomar valores de los dos signos en el intervalo  $(0, 1)$ . En efecto, supongamos que  $f \geq 0$ . Entonces, considerando la función  $h(x) = xf(x)$ , tendremos que  $h \leq f$ , pues cada  $x$  es menor o igual a 1. Pero como asumimos que  $f$  no es la función nula, debe existir un número  $r > 0$  y un punto  $z$  (y un intervalo  $I$  que contiene a  $z$ , por la continuidad de  $f$ ) tal que  $f|_I > r$ , implicando que  $f|_I > h|_I$  (asumiendo, sin pérdida de generalidad, que  $1 \notin I$ ). Entonces tendremos que

$$\begin{aligned} \int_{[0,1] \setminus I} f(x) dx &\geq \int_{[0,1] \setminus I} h(x) dx, \\ \int_I f(x) dx &> \int_I h(x) dx, \end{aligned}$$

lo cual obviamente contradice la hipótesis de que  $\int_{[0,1]} f dx = \int_{[0,1]} h dx$ . El caso  $f \leq 0$  es completamente análogo. Gracias a la continuidad de  $f$ , existe un intervalo  $J \subseteq (0, 1)$  tal que  $f|_J$  asume valores de ambos



signos.

Definimos ahora la función  $g(c) = \frac{1}{c} \int_0^c xf(x)dx$  para  $c \in (0, 1]$ ,  $g(0) = 0$ . Por la regla de L'Hopital y el teorema fundamental del cálculo, es claro que la función  $g$  es continua. Definimos también los puntos  $\bar{a}$  donde la función  $h$  se maximiza sobre  $J$  y  $\underline{a}$  donde  $h$  se minimiza sobre  $J$  (de modo que  $\bar{a}, \underline{a} \in J$  en particular no son cero).

Por lo tanto, luego de un cálculo simple (recordando que  $\bar{a} \leq 1$  y que  $f(\bar{a}) \geq 0$ ) se concluye que

$$\bar{a}g(\bar{a}) = \int_0^{\bar{a}} xf(x)dx \leq \int_0^{\bar{a}} \bar{a}f(\bar{a})dx = \bar{a}^2f(\bar{a}) \leq \bar{a}f(\bar{a}).$$

Similarmemente (recordando que  $\underline{a} \leq 1$  y que  $f(\underline{a}) \leq 0$ ),

$$\underline{a}g(\underline{a}) = \int_0^{\underline{a}} xf(x)dx \geq \int_0^{\underline{a}} \underline{a}f(\underline{a})dx = \underline{a}^2f(\underline{a}) \geq \underline{a}f(\underline{a}).$$

Así, vemos que  $g(\underline{a}) \geq f(\underline{a})$  y que  $g(\bar{a}) \leq f(\bar{a})$ . Como  $f$  y  $g$  son funciones continuas, el teorema del valor intermedio nos dice que debe existir un  $c$  (entre  $\bar{a}$  y  $\underline{a}$ ) que cumple  $f(c) = g(c)$ , que es lo que se pedía probar.

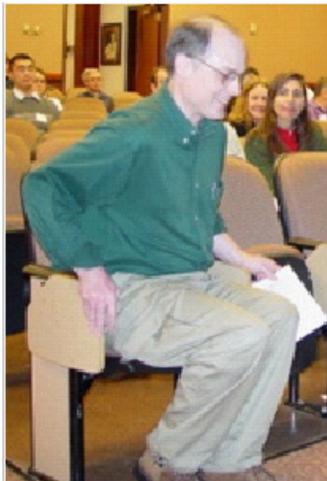
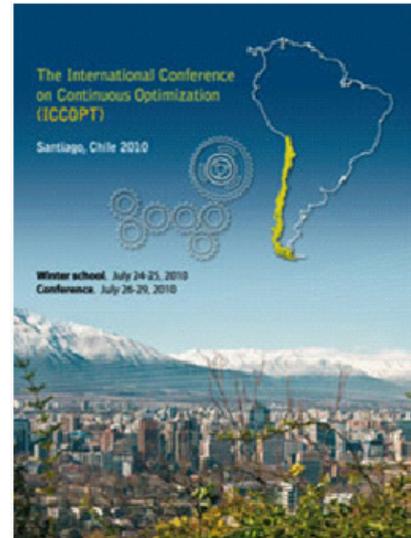
Un hecho interesante es que para concluir esta demostración no es necesaria la hipótesis de que  $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx$ . Es suficiente que hayan puntos donde  $f$  sea estrictamente positiva y puntos donde sea estrictamente negativa. Esta es una condición mucho más débil; mientras que la primera condición implica una restricción sobre el comportamiento  $f$  en todo el intervalo  $[0, 1]$ , la segunda condición sólo requiere de un comportamiento específico en dos puntos (además de su continuidad). ■



## Chile fue sede este año de Conferencia Internacional en Optimización Continua

El evento conocido por su sigla en inglés ICCOPT (Internacional Conference on Continuous Optimization) es un foro para investigadores y profesionales interesados en la optimización continua, que se realiza cada tres años desde el 2004 tuvo su sede por primera vez en nuestro hemisferio y nada más que en nuestro país, con la organización a cargo del Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile entre el 24 y el 29 de Julio.

Variadas actividades fueron realizadas durante estos 6 días con la participación de más de 200 especialistas y estudiantes avanzados, entre éstas se cuentan una escuela a estudiantes de doctorado y jóvenes investigadores, algunos cursos impartidos por renombrados profesores, charlas y debates sobre temas específicos y poster-sessions.



## Mark Ashbaugh es el nuevo miembro de la Academia Chilena de Ciencias

Con fecha miércoles 21 de julio de 2010 se desarrolló la Sesión Pública para recibir como Miembro Correspondiente en el extranjero de la Academia Chilena de Ciencias al Profesor Mark Ashbaugh, matemático del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Missouri, Columbia, MO, Estados Unidos. El evento en el cual el renombrado profesor Ashbaugh realizó un discurso de incorporación titulado "Natural Vibrations in Classical and Quantum Physics: An Overview" y en el que fue recibido por el Académico Miembro de Número Profesor Rafael Benguria, tuvo lugar en la sede de la academia ubicada en Almirante Montt 454.



## Pablo Irarrázaval recibió beca de John Simon Guggenheim Memorial Foundation



En Julio del presente año la fundación estadounidense John Simon Guggenheim Memorial Foundation entregó la beca homónima a Pablo Irarrázaval, profesor del Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Pontificia Universidad Católica de Chile, junto a otros 37 latinoamericanos que lograron esta distinción. El docente planea como se desempeñarse en tres áreas. La primera es la investigación, donde estudiará la aplicación de la resonancia magnética para el diagnóstico y seguimiento de enfermedades relacionadas con la obesidad. Otra es la docencia, en donde desarrollará un proyecto que tiene como objetivo implementar trabajos grupales internacionales para los alumnos de la Escuela de Ingeniería de la PUC, además publicará la segunda edición del libro "Análisis de Señales" y empleará parte del tiempo de la beca como profesor visitante en Madison, Wisconsin. La tercera área es la de redes, pues promoverá una asociación para investigadores en el área de imágenes biomédicas (él se desempeña como director del Centro de Imágenes Biomédicas de la PUC).

## Chileno obtiene nominación honorífica en la IAHR

Don Ramón Fuentes Aguilar, Ingeniero Hidráulico de la Universidad de Chile y Doctor con mención en Física de la Universidad de Grenoble en Francia, se ha transformado en el primer latinoamericano en obtener una nominación como miembro honorario de la Asociación Internacional de Ingeniería en Hidro Medioambiente (IAHR).

Los trabajos de este docente han estado focalizados en el área minera, en donde su objetivo permanente ha sido lograr mejoras de eficiencia en la Gran Minería del Cobre Chileno y el desarrollo de tecnología nacional asociada al Convertidor Teniente. Además ha dictado Seminarios, Conferencias, ponencias, exposición de trabajos e investigaciones en los más renombrados círculos internacionales de su especialidad en diferentes países, motivos que justifican plenamente la distinción conseguida.

