Solución I1: FIS1523 - Termodinámica

Facultad de Física
Pontificia Universidad Católica de Chile
Profs. Mario Favre y Andrés Gomberoff
Primer Semestre 2010

1. Un hervidor eléctrico de inmersión de 500 W se usa para calentar agua en un jarrón. Al dejarlo encendido durante un lapso de 2 minutos se observa que el agua aumenta su temperatura desde 85^{o}C a 90^{o}C. Luego se apaga el hervidor y se observa que la temperatura baja en 1^{o}C después de 1 minuto. Estime la masa del agua en el hervidor. El calor específico del agua es 4.2×10^3 J/Kg K. Asuma que la tasa de pérdida de calor es constante dado que las variaciones de temperatura son pequeñas respecto de la diferencia de temperatura entre el agua y el ambiente.

Respuesta

Mientras el hervidor está encendido, la tasa de absorción de calor es H_0. La tasa de pérdida es H_P en todo momento. Entonces, durante los primeros dos minutos, el agua absorve un calor igual a

$$\Delta Q_1 = (H_0 - H_P)\tau = mc\Delta T_1,$$

en que $\tau = 2$min, c es el calor específico del agua, m su masa y $\Delta T_1 = 5K$. Durante el minuto siguiente, el agua pierde

$$\Delta Q_2 = -H_P\frac{\tau}{2}mc\Delta T_2,$$

en donde $\Delta T_2 = -1K$. De la segunda ecuación podemos despejar H_P, reemplazarlo en la primera y despejar en favor de m,

$$m = \frac{H_0\tau}{c(\Delta T_1 + 2\Delta T_2)}.$$

Introduciendo los valores numéricos de todos los parámetros concluimos que hay 2Kg de agua en el jarrón.

2. Considere a cilindro de 1 m de largo con un pistón delgado firmemente sujeto de modo que divide al cilindro en dos partes iguales. El cilindro está en un baño térmico a $T = 300K$. El lado izquierdo contiene un mol de gas de helio a 3 atm. de presión. El lado derecho contiene gas de helio a una presión de 2 atm. (Considere que el gas de helio se comporta como un gas ideal). Suponga que en cierto instante el piston se suelta.

   a) Encuentre la posición final del pistón.

   b) ¿Cuánto calor será entregado al baño térmico en el proceso?

   Asuma que el baño térmico mantiene la temperatura fija a 300 K durante los procesos.

Respuesta

a) El hecho de que el helio se comporte como gas ideal nos permite encontrar el volumen del lado izquierdo, $V/2$ (el pistón está en la mitad, por lo que a cada lado hay un volumen $V/2$ en que V es el volumen del cilindro),

$$\frac{V}{2} = \frac{n_I RT}{P_I}.$$

Aquí el índice I se refiere a “izquierdo”. La temperatura T es la misma en ambos lados. Reemplazando el V así encontrado en la expresión análoga para el lado derecho, encontramos que,

$$\frac{V}{2} = \frac{n_D RT}{P_D} = \frac{n_I RT}{P_I}.$$

Podemos resolver esta ecuacion para n_D,

$$n_D = \frac{P_I}{P_D} n_I = \frac{2}{3} \text{ mol}.$$

Al soltar el pistón, este se estabilizará en la posición tal que las presión P sea igual a ambos lados. Usando nuevamente la ley de los gases ideales, esto significa que,

$$\frac{n_I RT}{V_I} = \frac{n_D RT}{V_D},$$

de donde encontramos que

$$\frac{V_I}{V_D} = \frac{n_I}{n_D} = \frac{3}{2}.$$

Como el área seccional del cilindro es siempre la misma, esto implica que el largo de cada cámara queda también en igual proporción,

$$\frac{L_I}{L_D} = \frac{3}{2}.$$

Podemos usar esta ecuación combinada con $L = L_D + L_I = 1$ m para encontrar cada uno de los largos. Obtenemos que la posición del pistón es

$$L_I = \frac{3}{5} \text{ m} = 0.6 \text{ m}$$

a la derecha del extremo izquierdo del cilindro.

b) La energía del gas ideal depende sólo de la temperatura y el número de moles, por lo que la energía interna no cambia en el proceso. Esto significa que todo el trabajo que hacen los gases debe provenir de calor que han absorbido (o entregado, en caso de ser trabajo negativo) desde (o hacia) el baño termal. El lado izquierdo hace un trabajo positivo, por lo que absorberá un calor

$$Q_1 = \int PdV = n_I RT \int \frac{dV}{V} = n_I RT \log \left. \frac{3/5V}{1/2V} \right) = n_I RT \log(6/5).$$

El lado derecho en cambio hace trabajo negativo, por lo que debe entregar al baño térmico un calor,

$$Q_2 = \int PdV = n_D RT \int \frac{dV}{V} = \frac{2}{3} n_I RT \log \left. \frac{2/5V}{1/2V} \right) = \frac{2}{3} n_I RT \log(4/5).$$

Considerando ambas contribuciones, el calor entregado al baño es

$$Q = Q_1 + Q_2 = RT \left(n_I \log(6/5) + \frac{2}{3} n_I \log(4/5) \right) = 83.7 \text{ J}$$

Esto significa que el sistema absorbió calor del baño termal.

3. Un contenedor de cobre de 200 gr contiene 0.7 lt de agua inicialmente a 60^{o}C. El contenedor está térmicamente aislado, salvo por una barra de cobre de 10 cm y área seccional 1.5 cm^2 que lo conecta con un dispositivo que se mantiene a una temperatura constante de 0^{o}C.

   a) Muestre que la temperatura del contenedor cambia con el tiempo de acuerdo a

   $$T(t) = T_0 e^{t/\tau}$$

   en que $T_0 = 60^o$C es la temperatura inicial. Calcule la constante τ a partir del calor específico del agua (ver problema 1), el calor específico del cobre, $C_{Cu} = 385$ J/Kg K y la conductividad térmica del cobre $K_{Cu} = 401$ W/m K

   b) Encuentre una expresión para el calor que ha salido del contenedor luego de transcurrido un tiempo t.

   c) Encuentre el tiempo que demora la temperatura del contenedor en llegar a los 30^{o}C.

Respuesta

a) La expresión para el flujo de calor entre ambos contenedores es

$$H(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{k_{Cu}A}{L}(T - T_c)$$

donde k_{Cu} es la conductividad térmica del Cobre, L la longitud de la barra, A su sección transversal, T la temperatura del contenedor que se enfría, y $T_c = 0^0$C la temperatura del contenedor con temperatura fija.
El flujo de calor que sale del contenedor a temperatura $T(t)$ está asociado al cambio de temperatura mediante la ecuación

$$dQ = -\left(m_{Cu}c_{Cu} + m_a c_a\right) dT$$

donde m_{Cu}, m_a, c_{Cu} y c_a son las masas y calores específicos del cobre y agua en el contenedor que se enfría, y el signo (-) se debe a que el contenedor se enfría. Haciendo $\alpha = m_{Cu}c_{Cu} + m_a c_a$ y combinando ambas acuaciones, se tiene

$$-\alpha\frac{dT}{dt} = \frac{k_{Cu}A}{L}T$$

Integrando entre $t = 0$ y t,

$$\int_{T_0}^{T(t)} \frac{dT}{T} = -\frac{k_{Cu}A}{\alpha L}\int_0^t dt$$

Evaluando las integrales,

$$\ln \left.\frac{T(t)}{T_0}\right) = -\frac{k_{Cu}A}{\alpha L}t$$

Tomando exponencial a ambos lados,

$$T(t) = T_0 e^{-(k_{Cu}A/\alpha L)t}$$

Haciendo $\tau = \alpha L/k_{Cu}A = \left(m_{Cu}c_{Cu} + m_a c_a\right) L/k_{Cu}A$, resulta finalmente

$$T(t) = T_0 e^{-t/\tau}$$

b) Usando la expresión para el flujo de calor de la parte *a*) y la expresión para $T(t)$, se tiene

$$dQ = \frac{k_{Cu}A}{L}T_0 e^{-t/\tau}dt$$

Integrando entre $t = 0$ y t, con la condición que en $t = 0$, $Q(0) = 0$,

$$\int_0^{Q(t)} dQ = \frac{K_{Cu}A}{L}T_0 \int_0^t e^{-t/\tau}dt$$

Integrando y evalunado las integrales,

$$Q(t) = -\frac{K_{Cu}A}{L\tau}T_0 \left(e^{-t/\tau} - 1\right)$$

Reemplazando τ,

$$Q(t) = (m_{Cu}c_{Cu} + m_a c_a)\, T_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

c) $T = 30^0$C equivale a $T = T_0/2$. Reemplazando en la ecuación para la temperatura en función del tiempo,

$$\frac{T_0}{2} = T_0 e^{-t/\tau}$$

Simplificando $T - 0$ y tomando logaritmo, resulta

$$t = \tau \ln(2)$$

Evaluando τ,

$$\tau = (m_{Cu}c_{Cu} + m_a c_a)\, L/k_{Cu}A = (0.2 \cdot 385 + 0.7 \cdot 4180) \cdot 0.1/401 \cdot 0.00015 = 4992 \text{ s} = 1.38 \text{ h}$$

Luego, el tiempo requerido para que la temperatura baje a $T = 30^0$C es $t = 1.38 \ln(2) = 0.956$ h.