Solución I2: FIS1523 - Termodinámica

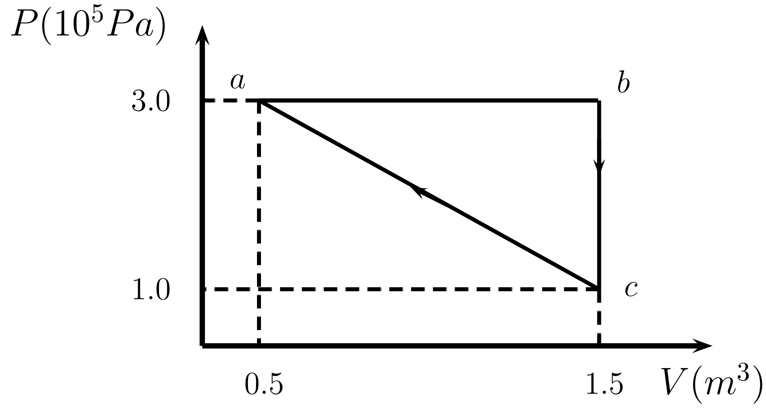
Facultad de Física
Pontificia Universidad Católica de Chile
Profs. Mario Favre y Andrés Gomberoff
Primer Semestre 2010
17 de mayo de 2010

1. Un gas ideal monoatómico realiza el ciclo termodinámico que muestra la figura. El tramo $c \to d$ es una línea recta. Considerando los valores que muestra el gráfico pora los puntos a, b y c,

   a) Calcule el flujo de calor y el trabajo realizado por el gas en cada tramo del ciclo.

   b) Encuentre la eficiencia termodinámica del ciclo.

   c) Encuentre la eficiencia del ciclo de Carnot equivalente.



Solución

a) Tramo $a \to b$:
Primera Ley de la Termodinámica,

$$dU = \delta Q - \delta W \tag{1}$$

Integrando la Ec. 1, se tiene

$$\Delta U_{ab} = \Delta Q_{ab} - W_{ab} \tag{2}$$

En el tramo $P_a = P_b = 3.0 \cdot 10^5$ Pa. Como el proceso es a presión constante

$$\Delta Q_{ab} = nc_p \Delta T_{ab} = nc_p (T_b - T_a)$$

donde $c_p = (5/2)R$ (gas ideal monoatómico).
Ecuación de Estado de Gases Ideales:

$$PV = nRT \tag{3}$$

Usando la Ec. 3, se tiene

$$T_a = P_a V_a / nR \quad T_b = P_b V_b / nR$$

Reemplazando en la Ec. para ΔQ_{ab},

$$\Delta Q_{ab} = \frac{5}{2}\left(P_b V_b - P_a V_a\right)$$

Reemplazando valores de la figura,

$$\Delta Q_{ab} = \frac{5}{2}\left(3.0 \cdot 10^5 \times 1.5 - 3.0 \cdot 10^5 \times 0.5\right) = 750 \text{ kJ}$$

De la figura, el trabajo en el tramo es

$$W_{ab} = P_a \left(V_b - V_a\right)$$

Reemplazando valores,

$$W_{ab} = 3.0 \cdot 10^5 \left(1.5 - 0.5\right) = 300 \text{ kJ}$$

Tramo $b \to c$:
El volumen es constante, luego

$$W_{bc} = 0$$

y

$$\Delta Q_{bc} = n c_v \Delta T_{bc} = n c_v \left(T_c - T_b\right)$$

con $c_v = (3/2)R$. Usando la Ec. 3

$$T_c = P_c V_c / nR$$

Reemplazando T_b y T_c en la Ec. para ΔQ_{bc}, se tiene

$$\Delta Q_{bc} = \frac{3}{2} V_c \left(P_c - P_b\right)$$

Reemplazando valores,

$$\Delta Q_{bc} = \frac{3}{2} 1.5 \left(1.0 \cdot 10^5 - 3.0 \cdot 10^5\right) = -450 \text{ kJ}$$

Tramo $c \to a$:
El trabajo es el área bajo la recta asociada al proceso. De la figura,

$$W_{ca} = P_c \left(V_a - V_c\right) + \frac{1}{2}\left(V_a - V_c\right)\left(P_a - P_c\right)$$

Reordenando términos,

$$W_{ca} = \frac{1}{2}\left(P_a + P_c\right)\left(V_a - V_c\right)$$

Reemplazando valores,

$$W_{ca} = 0.5\left(3.0 \cdot 10^5 + 1.0 \cdot 10^5\right)(0.5 - 1.5) = -200 \text{ kJ}$$

De la Ec. 2 se tiene

$$\Delta Q_{ca} = \Delta U_{ca} + W_{ca}$$

con

$$\Delta U_{ca} = nc_v \Delta T_{ca} = nc_v\left(T_a - T_c\right)$$

Como $T_c = P_c V_c/nR$ y $T_a = P_a V_a/nR$, de los valores de P y V de la figura se obtiene que $T_c = T - a$, por lo que $\Delta U_{ca} = 0$. Consecuentemente, $\Delta Q_{ca} = W_{ca} = -200$ kJ.

Noter que en este tramo se hace trabajo sobre el gas y este cede calor, sin cambiar su energía interna.

b) La eficiencia termodin amica es

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{out}|}{Q_{in}}$$

De la parte a), $Q_{in} = \Delta Q_{ab} = 750$ kJ y $Q_{out} = \Delta Q_{bc} + \delta Q_{ca}$= -450 - -200= - 650 kJ. Reemplazando,

$$\eta = 1 - \frac{650}{750} = 0.133$$

por lo que la eficiencia del ciclo es 13 %.

c) La eficiencia del ciclo de Carnot es

$$\eta_C = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}}$$

siendo T_{min} y T_{max} las temperaturas mínima y máxima en el ciclo. En este caso, usando la Ec. 3 y los datos de la figura, estas temperaturas son

$$T_{min} = T_c = P_c V_c/nR \quad T_{max} = T_b = P_b V_b/nR$$

Luego,

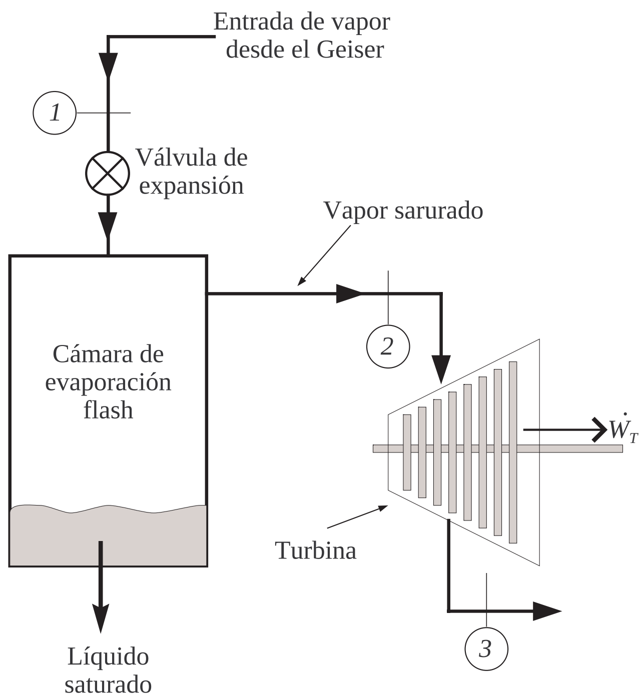
$$\eta_C = 1 - \frac{P_c V_c}{P_b V_b}$$

Reemplazando,

$$\eta_C = 1 - \frac{1.0 \cdot 10^5 \times 1.5}{3.0 \cdot 10^5 \times 1.5} = 0.667$$

Es decir, $\eta_C = 66.7\,\%$.

2. Se propone el uso de una fuente geotérmica (digamos, un Geiser), para generar electricidad por medio de una turbina de vapor. El diseño propuesto es el de la figura. Agua a alta presión $P_1 = 2.0MPa$ y 180°C pasa a través de una válvula de expansión (proceso de Joule-Thomson, que mantiene la entalpía constante) a una cámara de evaporación "flash" que forma una mezcla saturada vapor-agua a $400kPa$. El líquido se deshecha, y el vapor entra a la turbina, saliendo a una presión de $10kPa$ y una calidad $x_3 = 0.9$. Si queremos que la turbina produzca 1MW de potencia, calcule el flujo de agua geotermal requerido en kilogramos por hora.



ayuda: Considere que la turbina está térmicamente aislada y relacione la cantidad de vapor que entra a la turbina con la calidad a la salida del evaporador "flash". Obtenga los datos necesarios de las tablas termodinámicas que se adjuntan.

Solución

En la entrada de la valvula, (etiquetada con el número 1) el estado termodinámico del agua está dado por la presión $P_1 = 2.0MPa$ y la temperatura $T_1 = 180^o$C. Usando las tablas de agua comprimida, encontramos que

$$h_1 = 763.71KJ/Kg.$$

Esta entalpía se conserva a través de la válvula de expansión, de donde sabemos que dentro de la cámara de evaporación,

$$h_c = h_1 = 763.71KJ/Kg.$$

La presión dentro de la cámara la conocemos, $P_2 = 400KPa$, y sabemos además que el agua está en un estado de mezcla saturada. Usamos las tablas de vapor para encontrar que a esta presión $h_f(400KPa) = 604.73KJ/Kg$, $h_g(400KPa) = 2738.53KJ/Kg$, y por lo tanto, la calidad de la mezcla en la cámara es,

$$x_c = \frac{h_c - h_f(400KPa)}{h_g(400KPa) - h_f(400KPa)} = 0.0745.$$

La calidad mide la proporción de la masa de la mezcla que está en estado gaseoso, y por lo tanto, a la entrada de la turbina tenemos un flujo $x_c\dot{m}$ de vapor, en que $\dot{m}$ es el flujo entrante de agua desde el Geiser. Este es vapor saturado a $P_2 = 400KPa$, con $x_2 = 1$, ya que el agua fue descartada. Así, el estado termodinámico del gas que entra a la turbina lo conocemos completamente. En particular, su entalpía es,

$$h_2 = h_g(400KPa) = 2738.53KJ/Kg.$$

Utilizando ahora la primera ley en el volumen de control definido por la turbina encontramos que,

$$0 = x_c\dot{m}(h_2 - h_3) - \dot{W},$$

en que las entalpías están etiquetadas con los números de la figura y $\dot{W} = 1MW$ es el trabajo que realiza la turbina. El gas que sale de la turbina está saturado a $P = 10KPa$ y $x_3 = 0.9$. De este modo, de las tablas,

$$h_3 = h_f(10KPa) + x_3\left(h_g(10KPa) - h_f(10KPa)\right) = 2345.35KJ/Kg.$$

Así, de la primera ley,

$$\dot{m} = \frac{\dot{W}}{x_c(h_2 - h_3)} = 34Kg/seg,$$

lo que equivale a unas 120 toneladas por hora de agua.

3. Un pistón permite que aire se expanda desde una presión inicial 6.0 MPa, a una presión final 0.2 MPa. El volumen inical es $5{\cdot}10^{-4}$ m^3, y la temperatura inicial es 800°C. Considerando que en este caso el aire puede ser tratado como un gas ideal diatómico,

   a) Encuentre el calor transferido al gas y el cambio de entropía, si el proceso es isotérmico y reversible.

   b) Encuentre el cambio de entropía, suponiendo que el proceso de expansión es adiabático e irreversible.

Solución

a) De la Ec. 1,

$$\delta Q = dU + \delta W = dU + PdV$$

Integrando,

$$\Delta Q = \Delta U + \int_{V_i}^{V_f} PdV$$

Como $\Delta U = nc_v \Delta T = nc_v\left(T_f - T_i\right)$, y en proceso isotérmico $T_f = T_i$, resulta ΔU=0. De la Ec. 3, $P = nRT/V$. En particular, $T_i = P_i V_i / nR$. Luego,

$$\Delta Q = \int_{V_i}^{V_f} PdV = nRT_i \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = P_i V_i \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

De la Ec. 3, usando las condiciones iniciales, el número de moles de aire es

$$n = \frac{P_i V_i}{RT_i} = \frac{6.0 \cdot 10^6 \times 5.0 \cdot 10^{-4}}{1073 \cdot 8.314} = 0.3363$$

Como el proceso es isotérmico, de la Ec. 3 se obtiene que

$$V_f = \frac{P_i}{P_f} V_i = \frac{6.0 \cdot 10^6}{0.2 \cdot 10^6} 5 \cdot 10^{-4} = 0.015 \text{ m}^3$$

Entonces,

$$\Delta Q = 6.0 \cdot 10^6 \times 5.0 \cdot 10^{-4} \ln\left(\frac{0.015}{5 \cdot 10^{-4}}\right) = 10.2 \text{ kJ}$$

El cambio de entropía está dado por

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \tag{4}$$

Integrando,

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ}{T}$$

Como $T = T_1 = cte$,

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T_i} = \frac{10.2 \cdot 10^3}{1073} = 9.5 \text{ J/K}$$

b) Combinando las Ecs. 1 y 4, se tiene

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T}$$

Usando la Ec. 3 y que $dU = nc_v dT$, se tiene

$$dS = nc_v \frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V}$$

Integrando,

$$\Delta S = nc_v \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

El proceso es ahora adiabático, por lo que satisface la ecuación

$$PV^\gamma = cte \tag{5}$$

Evaluando la constante a partir de condiciones iniciales, con $\gamma = 1.4$ para el aire,

$$cte = 6 \cdot 10^6 \times \left(5.0 \cdot 10^{-4}\right)^{1.4} = 143.45$$

El volumen final es

$$V_f = \left(\frac{cte}{P_f}\right)^{1/\gamma} = \left(\frac{143.45}{0.2 \cdot 10^6}\right)^{1/1.4} = 5.7 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$$

Usando la Ec. 3, la temperatura final es

$$T_f = \frac{P_f V_f}{nR} = \frac{0.2 \cdot 10^6 \times 5.7 \cdot 10^{-3}}{0.3363 \times 8.314} = 407.7\ \mathrm{K}$$

Reemplazando todos los valores en la ecuación anterior para el cambio de entropía, con $c_v = (5/2)R$

$$\Delta S = 2.796 \times \frac{5}{2} \times 8.314 \ln\left(\frac{407.7}{1073}\right) + 2.796 \times 8.314 \ln\left(\frac{5.7 \cdot 10^{-3}}{5.0 \cdot 10^{-4}}\right) = 0.335\ \mathrm{J/K}$$