Teoría Clásica de Campos
Guía #1

Andrés Gomberoff, Primer semestre 2010

1. Considere una partícula que se mueve en una dimensión en un potencial
$$V(x) = \frac{\alpha}{x^2},$$
en que α es una constante. Este sistema es invariante bajo traslaciones temporales, pero tiene otra simetría menos evidente. Si multiplicamos el tiempo por una constante λ y x por una potencia distinta de la misma constante, digamos λ^n, podemos dejar la acción invariante eligiendo n en forma adecuada. Encuentre esta simetría y sus cantidad conservada asociada. Use las dos cantidades conservadas que tiene en su poder para integrar completamente las ecuaciones de movimiento. (Ejercicio propuesto por el Prof. Max Bañados).

2. *Oscilador armónico bidimensional.* Considere el Lagrangiano
$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}\omega^2 m(x^2 + y^2) \ . \tag{1}$$
Encuentre las ecuaciones de movimiento. Encuentre el Hamiltoniano y muestre, explícitamente, que es una cantidad conservada. Note que el lagrangiano es invariante bajo rotaciones en torno al origen del plano (x, y). Encuentre la cantidad conservada J (momentum angular) asociada a esta simetría. Muestre explícitamente, esto es, usando las ecuaciones de movimiento, que J se conserva. (Note también que $\{H, J\} = 0$. Esto nos dice dos cosas: primero, que J se conserva ante la evolución dinámica, segundo, que H es invariante ante rotaciones.)

3. *Variables auxiliares* Considere un Lagrangiano $L \equiv L(q, \dot{q}, z)$, que depende de una colección q de coordenadas q^i, de sus derivadas temporales $\dot{q}^i$ y de un conjunto de variables auxiliares z^A (pero no de $\dot{z}^A$). Las ecuaciones de movimiento resultantes de variar la acción respecto de z^A son
$$\frac{\partial L}{\partial z^A} = 0 \quad . \tag{2}$$
Asuma que estas relaciones nos permiten encontrar z^A como funciones de q y $\dot{q}$.

   (a) Muestre que el principio variacional basado en $L(q, \dot{q}, z)$ es equivalente a uno basado en $L'(q, \dot{q})$, en que L' es el Lagrangiano que se obtiene al reemplazar los campos auxiliares en L por las funciones de $z(\mathrm{q}, \dot{q})$ obtenidas de las ecuaciones (2).

(b) En principio variacional Hamiltoniano los momenta p_i son variables auxiliares en el sentido arriba descrito. Muestre, usando el resultado obtenido antes, que el principio variacional Lagrangiano y Hamiltoniano son equivalentes.

4. *“Versión Clásica” del principio de incertidumbre* Demuestre que no es posible construir un principio de acción Hamiltoniano apropiado para fijar una coordenada q y su momentum conjugado p como condición inicial.