Teoría Clásica de Campos
Guía #2

Andrés Gomberoff, Primer semestre 2010

1. **El Álgebra de Lorentz.** Muestre que los generadores $J_{\mu\nu}$ del grupo de Lorentz satisfacen el álgebra

$$[J_{\mu\nu}, J_{\sigma\rho}] = \eta_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\rho} + \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}.$$

   Redefina los generadores en rotaciones a lo largo del eje i,

$$J^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}J_{jk},$$

   y los boosts,

$$K_i = J_{0i}.$$

   Encuentre el álgebra del grupo de Lorentz en esta nueva base. Finalmente defina los 6 generadores complejos

$$N_i^{\pm} = \frac{1}{2}\left(J_i \pm K_i\right),$$

   y muestre que corresponden a 2 copias del álgebra de SO(2).

2. **Electromagnetismo.**

   a) Muestre que, en términos de los campos

$$E^i = F^{i0}, \qquad B^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk},$$

   las ecuaciones de Maxwell covariantes

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

   junto con la identidad de Bianchi $\epsilon^{\mu\nu\sigma}F_{\mu\nu,\sigma} = 0$, son equivalentes a las ecuaciones de Maxwell en su forma habitual de los libros de electricidad y magnetismo si $j^\nu = (\rho, \vec{j})$.

   b) Usando el tensor energía momentum encontrado en clases, escriba la carga asociada a la simetría de traslaciones espaciales,

$$P_i = \int d^3x T_{i0}.$$

   ¿Qué cantidad conservad es está?.

3. **Simetría de Poincaré y teorema de Noether.** Encuentre la corriente conservada correspondiente a la simetría de Lorentz para (i) el campo escalar, (ii) el campo electromagnético. Exprésela en términos de los tensores energía momentum correspondientes.

4. **Campo de Proca**. El campo de Proca representa un campo masivo de spin 1. Viene dado por la acción

$$I[A_\mu] = -\int d^4x \left(\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + m^2 A^\mu A_\mu \right),$$

en que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Esto es, para $m = 0$ idéntico a Maxwell.

   a) Muestre que el término nuevo rompe con la simetría de Gauge.

   b) Encuentre las ecuaciones de movimiento y el tensor energía-momentum asociado a este campo.

   c) Encuentre la solución más general de las ecuaciones. Para esto trabaje en forma análoga a lo que hicimos en clases para el campo de Maxwell. Muestre que en este caso tenemos tres grados de libertad y que la relación de dispersión es la correspondiente a partículas de masa m.