PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
Facultad de Física

Mecánica Clásica
Prof. Jorge Alfaro S
INTERROGACION 1 Jueves 19 de Abril de 2018

Problema 1. Considere la funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} dx F(x, y(x), y^{(1)}(x), ..., y^{(n)}(x))$$
$$y(x_i) = y_{0i}, y^{(1)}(x_i) = y_{0i}^{(1)}, ...y^{(n-1)}(x_i) = y_{0i}^{(n-1)} \quad , i = 1, 2$$

a) Use el método variacional para encontrar las ecuaciones de Euler Lagrange(Euler-Poisson) para los extremos de v. Justifique cada paso. (4ptos.

b) Determinar la extremal de la funcional(2ptos.)

$$v[y(x)] = \int_{-l}^{l} dx \left(\frac{1}{2}\mu y''(x)^2 + \rho y(x) \right), \quad \mu, \rho \quad \text{constantes}$$
$$y(\pm l) = 0, y^{(1)}(\pm l) = 0$$

Sol:(a)

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} dx \left\{ F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + ...F_{y^{(n)}} \delta y^{(n)} \right\} =$$
$$\int_{x_0}^{x_1} dx \left\{ F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} + ...(-1)^n \frac{dF_{y^{(n)}}}{dx^n} \right\} \delta y + [F_{y'} \delta y + ...F_{y^{(n)}} \delta y^{(n-1)}]_{x_0}^{x_1}$$
$$\text{De las condiciones de borde se tiene } \delta y^{(n-1)}(x_i) = 0, i = 1, 2$$
$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} dx \left\{ F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} + ...(-1)^n \frac{d^n F_{y^{(n)}}}{dx^n} \right\} \delta y = 0, \quad \delta y(x) \text{ arbitraria.}$$
$$\text{El lema fundamental del cálculo variacional implica:}$$
$$F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} + ...(-1)^n \frac{d^n F_{y^{(n)}}}{dx^n} = 0, \quad \text{Euler} - \text{Poisson}$$

Sol (b)

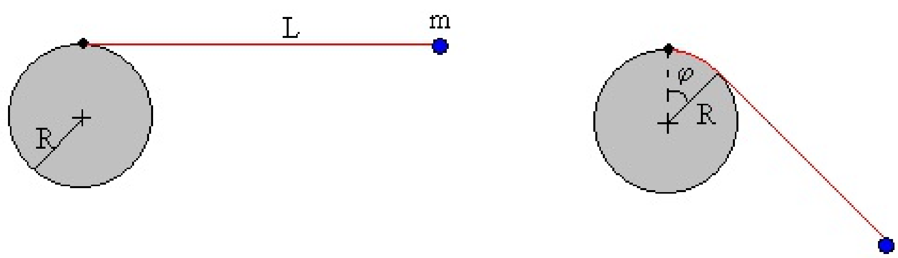
$$\rho + \mu y''''(x) = 0,$$
$$y(x) = A_4 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x \qquad + A_0, \qquad 4!\, A_4 \mu + \rho = 0, A_4 = -\frac{\rho}{4!\mu}$$
$$\text{La ecuación y condiciones de borde son pares.}$$
$$\text{Buscamos una solución par:} \qquad A_3 = 0, \qquad A_1 = 0$$
$$y(l) = 0 = A_4 l^4 + A_2 l^2 + A_0 = 0$$
$$y'(l) = 4A_4 l^3 + 2A_2 l = 0, \quad A_2 = -2A_4 l^2$$
$$A_0 = -A_4 l^4 + 2A_4 l^4 = A_4 l^4,$$
$$y(x) = A_4 x^4 - 2A_4 l^2 x^2 + A_4 l^4 = A_4 (x^2 - l^2)^2 = -\frac{\rho}{4!\mu}(x^2 - l^2)^2$$

Problema 2. Una masa puntual m está atada al extremo de una cuerda sin masa fija a un cilindro de radio R. Inicialmente la cuerda está completamente enrollada de tal manera que la masa toca el cilindro. Un impulso radial se aplica sobre la masa, la que adquiere una velocidad v_0 y empieza a desenrollar la cuerda. No hay fuerzas externas actuando sobre m.

a) Encuentre la ecuación de movimiento escogiendo una coordenada generalizada adecuada.(2ptos.

b) Encuentre la solución general que satisface las condiciones iniciales.(2ptos.)

c) Encuentre el momentum angular de la masa respecto al eje del cilindro, usando b).(2ptos).



Sol: Escogemos como coordenada generalizada la longitud de la cuerda que no está enrollada l.En cada instante la cuerda se desenrolla girando en torno al punto de contacto. Se tiene:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{\dot{l}}{R}\right)^2$$

$$(a)\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{l}}{R^2}l^2\right) = l\frac{\dot{l}^2}{R^2}, \qquad E = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{\dot{l}}{R}\right)^2$$

$$(b) \qquad \sqrt{\frac{ER^2}{\frac{1}{2}m}} = l\,\dot{l} = \frac{1}{2}\frac{dl^2}{dt}, \qquad l^2 = 2\sqrt{\frac{ER^2}{\frac{1}{2}m}}t, l^2 = 2v_0Rt$$

$$(c)J = mvl = ml^2\frac{\dot{l}}{R} = m2v_0t\frac{v_0R}{l} = \ 2mv_0^2R\frac{t}{\sqrt{2v_0Rt}} = m\sqrt{2v_0^3Rt}$$

Problema 3. Dos partículas se mueven alrededor de cada una en órbitas circulares de período τ, bajo la influencia de la gravitación. Súbitamente el movimiento se detiene y las partículas caen hacia el centro común. Calcule el tiempo T que demoran en chocar.

Indic: $\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{1}{u}-1\right)}} = \frac{\pi}{2}$

Sol:

$$\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2, \qquad m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2 = 0$$

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_2 + \vec{r}, \quad m_1x_2 + m_1r + m_2x_2 = 0, \quad \vec{x}_2 = -\frac{m_1}{M}\vec{r}, \vec{x}_1 = \frac{m_2}{M}\vec{r}$$

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{x}}_2^2 + G\frac{m_1m_2}{r} = \qquad \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 + G\frac{m_1m_2}{r}$$

$$\mu\omega^2r = G\frac{m_1m_2}{r^2}, \quad r^3 = G\frac{m_1m_2}{\omega^2\mu} = G\frac{m_1m_2}{(2\pi)^2\mu}T^2$$

La posición inicial de las dos masas antes de caer es: $d = \left(G\frac{m_1 m_2}{(2\pi)^2\mu}\tau^2\right)^{\frac{1}{3}}$. Luego caen radialmente:

$$\mu\ddot{r} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - G\frac{m_1 m_2}{r} = -G\frac{m_1 m_2}{d}$$

$$\dot{r} = -\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(G\frac{m_1 m_2}{r} - G\frac{m_1 m_2}{d}\right)},$$

$$\int_d^0 \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(G\frac{m_1 m_2}{r} - G\frac{m_1 m_2}{d}\right)}} = -T, \quad r = du$$

$$= d\int_1^0 \frac{du}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(G\frac{m_1 m_2}{du} - G\frac{m_1 m_2}{d}\right)}} = \frac{d}{\sqrt{\frac{2}{\mu}G\frac{m_1 m_2}{d}}}\int_1^0 \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{1}{u} - 1\right)}} =$$

$$-\frac{\pi}{2}\frac{d}{\sqrt{\frac{2}{\mu}G\frac{m_1 m_2}{d}}}$$

$$T = \frac{\pi}{2}\frac{d^{3/2}}{\sqrt{\frac{2}{\mu}G m_1 m_2}} = \frac{\pi}{2}\frac{\tau}{2\pi} = \frac{\tau}{4\sqrt{2}}$$

Tiempo: 3 horas
BUENA SUERTE!