PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
Facultad de Física

Mecánica Clásica
Prof. Jorge Alfaro S
INTERROGACION 2 Jueves 7 de Junio de 2018

Problema 1. a) Demostrar que es canónica la siguiente transformación, con $r(t)$ arbitraria(3ptos.):

$$Q = -\mathrm{arctg}\Big[\frac{r}{x}\phi(p,x)\Big]$$
$$P = \frac{m}{2}\Big[\frac{x^2}{r^2} + \phi^2(p,x)\Big], \quad \phi(p,x) = \frac{rp}{m} - x\dot{r}$$

b) Hallar una función generatriz del tipo $F(q,Q,t)$(3ptos.)

Sol:

$$[Q,P] = -\frac{1}{1+\big(\frac{r}{x}\phi(p,x)\big)^2}\frac{r}{x}\frac{r}{m}\frac{m}{2}\Big[\frac{2x}{r^2} + 2\phi(p,x)(-\dot{r})\Big] +$$
$$\frac{1}{1+\big(\frac{r}{x}\phi(p,x)\big)^2}\Big[-\frac{r}{x^2}\phi(p,x) + \frac{r}{x}(-\dot{r})\Big]\frac{m}{2}\Big[2\phi(p,x)\frac{r}{m}\Big] =$$
$$-\frac{1}{1+\big(\frac{r}{x}\phi(p,x)\big)^2}\Big\{1 - \frac{r^2}{x}\dot{r}\phi(p,x) + \frac{r^2}{x^2}\phi(p,x)^2 + \frac{r^2}{x}\dot{r}\phi(p,x)\Big\} = -1$$

Función generatriz:

$$p = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad P = -\frac{\partial F}{\partial Q}$$
$$\frac{rp}{m} - x\dot{r} = -\frac{x}{r}\mathrm{tg}\,Q, \quad p = mx\frac{\dot{r}}{r} - m\frac{x}{r^2}\mathrm{tg}\,Q$$
$$F(x,Q,t) = mx^2\frac{\dot{r}}{2r} - m\frac{x^2}{2r^2}\mathrm{tg}\,Q + G(Q,t)$$
$$P = m\frac{x^2}{2r^2}\sec^2 Q + \frac{\partial G}{\partial Q} =$$
$$\frac{m}{2}\Big[\frac{x^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2}\mathrm{tg}^2\,Q\Big],$$
$$\frac{\partial G}{\partial Q} = m\frac{x^2}{2r^2}[1 + \mathrm{tg}^2\,Q - \sec^2 Q] = 0, \qquad G = G(t)$$
$$F(x,Q,t) = mx^2\frac{\dot{r}}{2r} - m\frac{x^2}{2r^2}\mathrm{tg}\,Q + G(t)$$

Problema 2. a) Muestre que la derivada temporal de un vector $\vec{A}$ satisface(3 ptos.):

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\text{inercial}} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\text{rot}} + \Omega \times \vec{A}$$

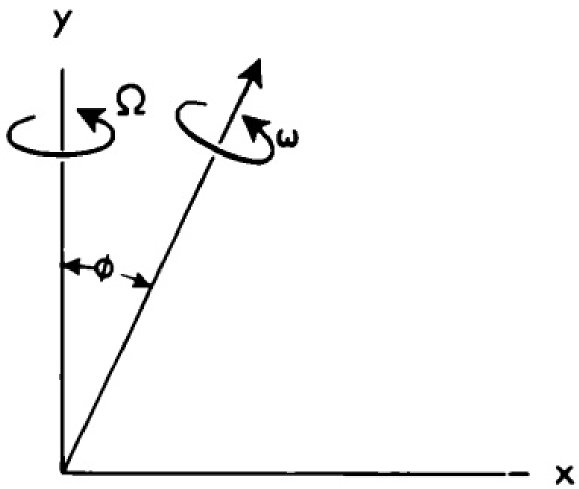
donde $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\text{inercial}}$ es la derivada temporal calculada en un sistema de referencia inercial y $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\text{rot}}$ es la derivada temporal calculada en un sistema de referencia que rota con velocidad angular $\vec{\Omega}$ constante respecto al sistema inercial.

Ayuda: Considere primero una rotación alrededor del eje z, con velocidad angular $\omega\hat{z}$, luego generalice el resultado para cualquier $\vec{\Omega}$.

b) Un giróscopo rota alrededor de su eje con velocidad angular ω. El momento de inercia alrededor de este eje es C, mientras que alrededor de un eje transversal es A. La suspensión del giróscopo flota en una piscina de Mercurio, de tal manera que el único torque que actúa sobre él es tal que constriñe el eje de rotación a moverse en un plano horizontal. Si el giróscopo se sitúa en el Ecuador terrestre y la velocidad angular de la Tierra es Ω:

1. Mostrar que el eje del giróscopo oscila alrededor de la dirección Norte-Sur. Para pequeñas oscilaciones, encontrar el período T. (3ptos.)

Recordar que $\omega \gg \Omega$ es una excelente aproximación.



Sol: Sea $\vec{L}$ el momentum angular del giróscopo en la superficie de la Tierra. Se tiene:

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right) = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{inercial}} - \Omega \times \vec{L} = \vec{\tau} - \Omega \times \vec{L}$$

En el Ecuador $\vec{\Omega} = \Omega\,\hat{y}, \vec{L} = C\omega\hat{\omega} - A\dot{\phi}\hat{z}$, ϕ crece en la dirección de las manecillas del reloj.

$$\hat{\omega} = \cos\phi\hat{y} + \text{sen}\,\phi\hat{x}$$
$$C\omega\dot{\phi}(-\text{sen}\,\phi\hat{y} + \cos\phi\hat{x}) - A\ddot{\phi}\hat{z} = \Omega C\omega \text{sen}\,\phi\hat{z} - A\Omega\dot{\phi}(-\hat{x}) + \vec{\tau}$$

Sólo hay fuerzas en la dirección $\hat{z}$, por lo tanto $\tau_z = 0$(Esto muestra que el eje del giróscopo gira en el plano x y)

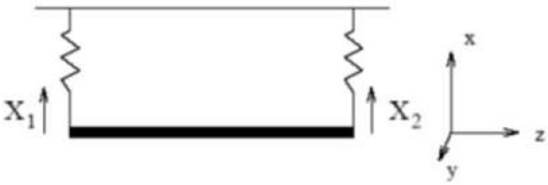
$$C\omega \text{sen}\,\phi\Omega = -A\ddot{\phi}$$
$$\ddot{\phi} = -\frac{\Omega}{A}C\omega\text{sen}\,\phi \simeq -\frac{\Omega}{A}C\omega\phi$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{A}{\Omega\omega C}}$$

Problema 3. Una barra rígida uniforme de masa M y longitud L es suspendida en equilibrio por dos resortes sin masa atados a sus extremos. Los dos resortes tienen la misma constante del resorte k. El movimiento del centro de masa está constreñido a moverse paralelo al eje vertical X. Encontrar, para el movimiento contenido en el plano xz:

a) El momento de inercia I de la barra respecto al centro de masa.(2ptos.)

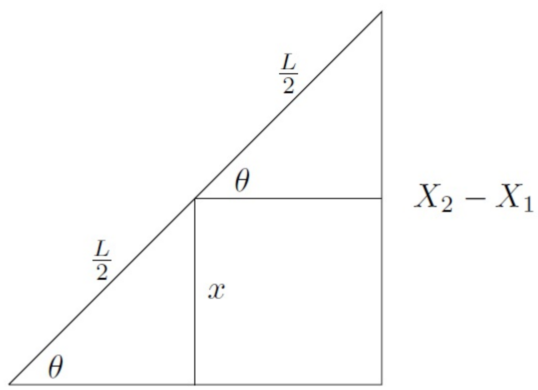
b) Los modos normales(2ptos.)

c) La frecuencia de vibración de cada modo(2ptos.)



Sol:

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} dz \rho z^2 = \frac{2}{3}\rho\left(\frac{L}{2}\right)^3 = \frac{2}{3}\frac{M}{L}\left(\frac{L}{2}\right)^3 = \frac{1}{12}ML^2$$



Coordenada x del CM. Notar que a lo largo de la barra desplazada con $X_2 \geqslant X_1$ se tiene para un punto i, la coordenada x_i dada por:

$$\frac{X_2 - X_1}{L} = \operatorname{sen}\theta = \frac{x_i - X_1}{z + L/2}, \quad \operatorname{sen}\theta \simeq \theta$$

$$x = \frac{1}{M}\int_{-L/2}^{L/2} dz \rho[(z + L/2)(X_2 - X_1)/L + X_1] \quad = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

$$\text{traslación del CM:} \quad M\frac{(\ddot{X}_1 + \ddot{X}_2)}{2} = -k(X_1 + X_2) + Mg$$

$$\text{rotación alrededor del CM:} \qquad I\alpha = -k(X_2 - X_1)\frac{L}{2}, \qquad \alpha = \frac{(\ddot{X}_2 - \ddot{X}_1)}{L}, \text{ángulos pequeños}$$

$$(\ddot{X}_2 - \ddot{X}_1) = -L^2\frac{k}{2I}(X_2 - X_1)$$

Podemos eliminar g redefiniendo los X_i(redefine la posición de equilibrio) ,con lo cual obtenemos

$$(\ddot{X}_1 + \ddot{X}_2) = -\frac{2k}{M}(X_1 + X_2)$$

$$(\ddot{X}_2 - \ddot{X}_1) = -\frac{L^2 k}{2I}(X_2 - X_1) = -6\frac{k}{M}(X_2 - X_1)$$

Hay dos modos normales: $x = X_1 + X_2$(simétrico), con frecuencia angular $\omega_x = \sqrt{\frac{2k}{M}}$ e $y = X_2 - X_1$(antisimétrico), con frecuencia angular $\omega_y = \sqrt{\frac{6k}{M}}$.

Tiempo: 3 horas
BUENA SUERTE!