Mecánica Analítica FIM 8450

Primer Semestre 2009

Examen, Jueves 25 de Junio de 2009

Prof. J. Alfaro

Problema #1

(a)Encuentre la sección eficaz diferencial de scattering de partículas por una esfera perfectamente rígida de radio a. Esto es $U=0, r>a$, $U=\infty, r<a$.

Sol:

$$\rho = a \operatorname{sen} \phi_0, \chi + 2\phi_0 = \pi, \quad \rho = a \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}) = a \cos(\frac{\chi}{2})$$
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\rho}{\operatorname{sen}\chi}|\frac{d\rho}{d\chi}| = \frac{a}{2}\operatorname{sen}(\frac{\chi}{2})\cos(\frac{\chi}{2})\frac{a}{\operatorname{sen}\chi} = \frac{a^2}{4}$$

(b) Encuentre la sección eficaz total σ, a partir de (a).

Sol:

$$\sigma = \pi a^2$$

Problema #2

Las ecuaciones de transformación entre dos conjuntos de coordenadas son:

$$Q = \ln(1 + \sqrt{q} \cos p) \qquad P = 2(1 + \sqrt{q} \cos p)\sqrt{q} \operatorname{sen} p$$

(a) Muestre que Q, P son variables canónicas si q, p lo son.

Sol:

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} =$$
$$-\frac{\sqrt{q}\operatorname{sen} p}{1+\sqrt{q}\cos p}2\left(\frac{1}{2\sqrt{q}}\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} p \cos p\right) - \frac{\cos p}{2\sqrt{q}(1+\sqrt{q}\cos p)}2\left(\sqrt{q}\cos p - \text{q}\operatorname{sen}^2 p + q\cos^2 p\right) =$$
$$\frac{-1}{(1+\sqrt{q}\cos p)}\left(\operatorname{sen}^2 p + 2\sqrt{q}\operatorname{sen}^2 p \cos p + \cos^2 p - \sqrt{q}\operatorname{sen}^2 p\cos p + \sqrt{q}\cos^3 p\right) =$$
$$\frac{-1}{(1+\sqrt{q}\cos p)}(1+\sqrt{q}\cos p) = -1$$

(b) Encuentre la función generatriz de la transformación canónica (a), $F(Q, p)$.

Sol:

$$p\,dq - H dt - P dQ + H'\,dt = dF + d(pq)$$
$$q = -\frac{\partial F}{\partial p}\; P = -\frac{\partial F}{\partial Q}$$
$$q = \left(\frac{e^Q - 1}{\cos p}\right)^2 = -\frac{\partial F}{\partial p}, F = -(e^Q - 1)^2 \tan(p) + G(Q)$$
$$\frac{dG}{dQ} - 2(e^Q - 1)\tan(p)e^Q = -2(e^Q - 1)\tan(p) - 2\tan(p)(e^Q - 1)^2$$
$$\frac{dG}{dQ} = 0, G = 0$$
$$F = -(e^Q - 1)^2 \tan(p)$$

Problema #3

(a) Utilice el método de Hamilton-Jacobi para resolver el problema del movimiento de un proyectil puntual de masa m en un plano vertical bajo la influencia de la aceleración de gravedad g, sin roce.

Sol:

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + mgy \\
\frac{1}{2m}((\frac{\partial S}{\partial x})^2 + (\frac{\partial S}{\partial y})^2) + mgy &= -\frac{\partial S}{\partial t} \\
S &= S_1(x) + S_2(y) - Et \\
\frac{1}{2m}(\frac{dS_1}{dx})^2 + \frac{1}{2m}(\frac{dS_2}{dy})^2 + mgy &= E \\
\frac{1}{2m}(\frac{dS_1}{dx})^2 &= \frac{\alpha^2}{2m}, S_1 = \alpha x \\
\frac{dS_2}{dy} = \sqrt{2m(E - mgy - \frac{\alpha^2}{2m})}, S_2 &= \int dy \sqrt{2m(E - mgy - \frac{\alpha^2}{2m})}
\end{aligned}
$$

(b) Usando (a), encontrar la ecuación de la trayectoria y la dependencia temporal de las coordenadas, suponiendo que el proyectil se ha disparado desde el origen en $t = 0$, con una velocidad v_0 que forma un ángulo α con la horizontal.

Sol:

$$
\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \beta = x - \int dy \frac{\alpha}{\sqrt{2m(E - mgy - \frac{\alpha^2}{2m})}} = x - \sqrt{2m(E - mgy - \frac{\alpha^2}{2m})}\frac{\alpha}{-m^2 g}
$$

$$
(x - \beta)^2 (\frac{m^2 g}{\alpha})^2 = 2mE - m^2 gy - \alpha^2
$$

$$
\frac{\partial S}{\partial E} = -t_0 = \quad -t + \int dy \frac{2m}{\sqrt{2m(E - mgy - \frac{\alpha^2}{2m})}} \quad =
$$

$$
\begin{aligned}
-t + \sqrt{2m(E - mgy - \frac{\alpha^2}{2m})}\frac{1}{-mg} \\
m^2 g^2 (t - t_0)^2 = 2mE - 2m^2 gy - \alpha^2, \\
g^2(t^2 - 2tt_0) = -2gy, y = -\frac{g}{2}(t^2 - 2tt_0), \\
gt_0 = v_0 \operatorname{sen}\alpha, t_0 = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} \\
y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \operatorname{sen}\alpha t
\end{aligned}
$$

Tiempo: 3 horas

Buena Suerte!!