PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE

Facultad de Física

Teoría Electromagnética

Prof. Jorge Alfaro S

INTERROGACION 1 Viernes 28 de septiembre de 2018

Problema 1. Una cañería conductora rectangular infinita definida por los planos $y=0$, $y=a$, $x=\pm b$, tiene sus caras a potencial cero, excepto en la parte superior $(y=a)$, donde se mantiene a un potencial constante V_0.

a) Encuentre el potencial dentro de la cañería(3ptos.).

b) Encuentre las distribuciones de carga en todas las caras de la cañería(2ptos.)

c) Si una carga de prueba q se sitúa en $(0,0,z)$, Qué fuerza experimenta?(1pto.)

Sol:

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$
$$\phi(x,y) = A(x)B(y)$$
$$A''B + AB'' = 0$$
$$\frac{A''}{A} + \frac{B''}{B} = 0$$
$$\frac{A''}{A} = -\alpha^2, \frac{B''}{B} = \alpha^2,$$
$$\Phi = e^{\pm i\alpha x}e^{\pm\alpha y}$$
$$\phi(\pm b, y) = 0, A(x) = a_1\mathrm{sen}\alpha(x+b) + a_2\cos\alpha(x+b),$$
$$A(-b) = 0, a_2 = 0,$$
$$A(b) = 0, \qquad \mathrm{sen}(2\alpha b) = 0, 2\alpha b = n\pi, \alpha = \frac{n\pi}{2b} \qquad n = 1, 2....$$
$$B(0) = 0 \qquad B(y) = b_1\mathrm{senh}(\alpha y) + b_2\cosh(\alpha y), \qquad b_2 = 0$$

$$\phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathrm{sen}\frac{n\pi}{2b}(x+b)\mathrm{senh}\Big(\frac{n\pi}{2b}y\Big)$$
$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathrm{sen}\frac{n\pi}{2b}(x+b)\mathrm{senh}\Big(\frac{n\pi}{2b}a\Big)$$

$$\int_0^{2b} du\frac{1}{2}\Big(1-\cos\frac{n\pi}{b}u\Big) = b$$
$$\int_{-b}^{b} dx\,\mathrm{sen}\frac{n\pi}{2b}(x+b)\mathrm{sen}\frac{m\pi}{2b}(x+b) = \int_0^{2b} du\,\mathrm{sen}\frac{n\pi}{2b}u\,\mathrm{sen}\frac{m\pi}{2b}u = b\delta_{nm}$$

$$f_n\, b\,\mathrm{senh}\Big(\frac{n\pi}{2b}a\Big) = V_0\int_{-b}^{b} dx\,\mathrm{sen}\frac{n\pi}{2b}(x+b) = -\frac{2bV_0}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2b}(x+b)|_{-b}^{b} = -\frac{2bV_0}{n\pi}[(-1)^n - 1]$$

$$f_n = \frac{4V_0}{n\pi}\frac{1}{\mathrm{senh}\left(\frac{n\pi}{2b}a\right)}, n\,\mathrm{impar}$$

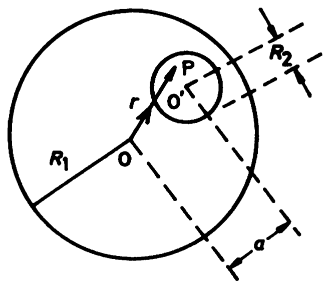
$$\phi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4V_0}{(2n+1)\,\pi}\frac{1}{\mathrm{senh}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2b}a\right)}\mathrm{sen}\frac{(2n+1)\pi}{2b}(x+b)\mathrm{senh}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2b}y\right)$$

$$\varepsilon_0^{-1}\sigma(\pm b, y) = \mp\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y)|_{x=\pm b} =$$
$$\mp\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4V_0}{2b}\frac{1}{\mathrm{senh}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2b}a\right)}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2b}(\pm b+b)\mathrm{senh}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2b}y\right)$$

La fuerza sobre una partícula de carga q en $(0,0)$ es $q\vec{E}$:

$$\vec{E}(0,0) = -\nabla\phi(x,y)(0,0) = -\hat{y}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2V_0}{b}\frac{1}{\mathrm{senh}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2b}a\right)}(-1)^n$$

Problema 2. Una esfera de radio R_1 tiene una densidad de carga ρ uniformemente distribuida, excepto por un hueco esférico de radio R_2 ubicado a una distancia a del centro.



1. Encuentre el campo al interior del hueco(3ptos.).
2. Encuentre el potencial al interior del hueco(3ptos.).

Indic: Suponga que el potencial se anula en infinito.

Sol:Usemos superposición entre una esfera cargada uniformemente con densidad ρ y el hueco cargado uniformemente con densidad $-\rho$.

Al interior de la esfera mayor, se tiene, usando la ley de Gauss.

$$E 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3$$
$$\vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$$

El campo interior a la esfera menor es:

$$\vec{E}_2 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r} - \vec{a})$$

En el interior del agujero esférico se tiene:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$$

El potencial al interior del agujero esférico es:

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}.\vec{r} + c'$$

Para encontrar c, usamos superposición.

Calculemos el potencial al interior de una esfera uniformemente cargada de radio R. Es

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2 + c$$

Impongamos la condición que el potencial es cero en infinito. El potencial fuera de la esfera es:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Imponiendo continuidad del potencial en $r = R$,se tiene:

$$c = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}R^2 + \frac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}R^2$$

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(r^2 - 3R^2)$$

En el hueco se tiene:

$$\phi(\vec{r}) = \phi_1(\vec{r}) + \phi_2(\vec{r}) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(r^2 - 3R_1^2) + \frac{\rho}{6\varepsilon_0}((\vec{r} - \vec{a})^2 - 3R_2^2) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\vec{a}.\vec{r} - \frac{a^2}{2}\right) + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_1^2 - R_2^2)$$

Problema 3. Un condensador esférico consiste en dos esferas conductoras concéntricas de radios $a, b(a > b)$. La esfera exterior está conectada a tierra y sobre la esfera interior se pone una carga Q. La esfera exterior se contrae de radio a a radio a'. Encuentre el trabajo hecho por la fuerza eléctrica.

Sol: Calculemos el campo eléctrico entre las dos esferas. El campo eléctrico fuera de la esfera exterior es nulo(el potencial se anula allí).El campo eléctrico al interior de la esfera de menor radio se anula, dado que el potencial es constante allí e iguala el potencial en $r = b$, El problema tiene simetría esférica, así que usando como superficie gaussiana la esfera de radio r con $b < r < a$ se tiene:

$$E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \quad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\hat{r}$$

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 4\pi \int_b^a \mathrm{d}r\, r^2 \left(\frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\right)^2 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

$$-\Delta U = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{a}\right) = W$$

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi r \varepsilon_0} + c, \qquad \phi(a) = 0$$

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

$$U = \frac{1}{2}\int d^3x \rho(\vec{x})\phi(\vec{x}) = \frac{1}{2}Q\phi(b)$$

Notar que hay una carga $-Q$ en la esfera exterior. Al contraerse la esfera exterior, el trabajo hecho por la fuerza eléctrica es positivo.

Tiempo: 3 horas
BUENA SUERTE!