PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
Facultad de Física

Teoría Electromagnética
Prof. Jorge Alfaro S
EXAMEN — Lunes 3 de diciembre de 2018

Problema 1. El volumen entre dos esferas conductoras concéntricas de radios $a<b$ se llena con un material de constante dieléctrica inhomogénea(K es una constante):

$$\varepsilon=\frac{\varepsilon_0}{1+Kr}, \vec{D}=\varepsilon\,\vec{E}$$

Sobre la superficie interior se pone una carga Q. La superficie exterior está conectada a tierra. Encontrar:

a) El vector desplazamiento para $a<r<b$ (1.5ptos)

b) La capacidad del dispositivo. (1.5ptos.)

c) La densidad de carga de polarización para $a<r<b$.(1.5ptos.)

d) La densidad superficial de carga de polarización en $r=a$ y $r=b$.(1.5ptos.)

Sol:El problema tiene simetría esférica. Todos los campos y densidades dependen sólo de r.Usemos la ley de Gauss con superficie gaussiana una esfera de radio r concéntrica con las esferas conductoras, $a<r<b$.

$$D\,4\pi r^2=Q,\;\; D=\frac{Q}{4\pi r^2},\;\; \vec{D}=\frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon(r)r^2}\hat{r}, \qquad \phi(b)-\phi(a)=-\int_a^b dr\frac{Q}{4\pi\varepsilon(r)r^2}, \qquad V=\int_a^b dr\frac{Q}{4\pi\varepsilon(r)r^2}=\phi(a)$$

$$C^{-1}=\frac{V}{Q}=\int_a^b dr\frac{1}{4\pi\varepsilon(r)r^2},\;\; =\int_a^b dr\frac{1+Kr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}+Kln(r)\right)_a^b=\;\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+Kln\left(\frac{b}{a}\right)\right)$$

$$C=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+Kln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\vec{P}=\chi\vec{E},\;\; \chi=\varepsilon-\varepsilon_0,\;\; \rho_P=-\nabla.\vec{P}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left((\varepsilon-\varepsilon_0)\frac{Qr^2}{4\pi\varepsilon(r)r^2}\right)=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left((1-1-Kr)\frac{Q}{4\pi}\right)$$

$$=K\frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$\sigma_P=\vec{P}.\hat{n}=$$

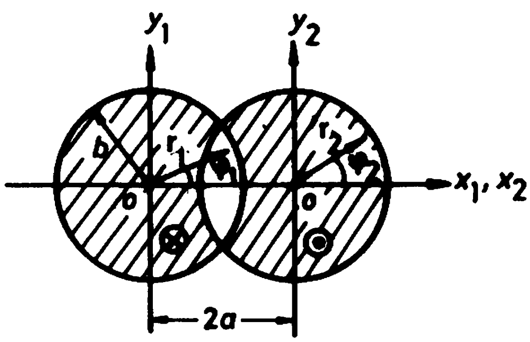
$$K\frac{Q}{4\pi a},\;\; r=a,\;\; \hat{n}=-\hat{r}$$

$$-K\frac{Q}{4\pi b},\;\; r=b,\;\; \hat{n}=\hat{r}$$

Problema 2. Un sistema de conductores tiene una sección transversal dada por la intersección de dos círculos de radio b, cuyos centros están separados por una distancia $2a$. La parte conductora está sombreada. La parte que no está sombreada es vacío. El conductor de la izquierda(derecha) lleva una densidad de corriente uniforme J que entra(sale) en el (del) plano de la figura. La permeabilidad magnética de los conductores es la del vacío.

a) Encuentre el campo magnético creado por un conductor cilíndrico infinito de sección transversal circular de radio b que lleva una densidad de corriente uniforme K, dentro y fuera del cilndro.(3ptos.)

b) Usando superposición, encuentre el campo magnético para cualquier punto x, y de la zona vacía de la figura.(3ptos.)



Sol: Inducción magnética de un cilindro infinito con densidad de corriente uniforme $\vec{K}$,al interior del cilindro. La ley de Ampére da:

$$B\,2\pi r = \mu_0 K \pi r^2 \qquad\qquad r < b$$

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 K r,$$ la dirección de B es tangencial al círculo de radio r centrado en el cilindro y gira de acuerdo a la regla de la mano derecha

Para $r > b$, tenemos:

$$B\,2\pi r = \mu_0 K \pi b^2,$$
$$B = \frac{\mu_0}{2r} K b^2$$

La dirección de $\vec{B}$ es tangencial al círculo de radio r centrado en el eje del cilindro y gira de acuerdo a la regla de la mano derecha.

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{2}\mu_0 J \vec{r} \times \hat{z}\,, \quad \vec{B}_1 = -\frac{1}{2}\mu_0 J\,(\vec{r} - 2\vec{a}\,) \times \hat{z}$$

$2\vec{a}$ es el vector posición del centro del círculo 2 respecto al origen del círculo 1.

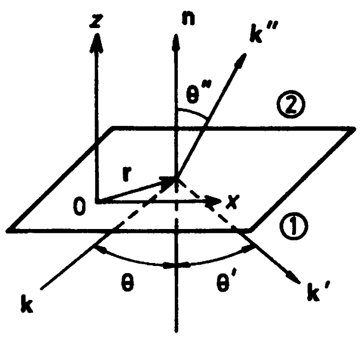
Por superposición se tiene:

$$\vec{B} = \mu_0 J \vec{a} \times \hat{z}$$

Problema 3.

a) Escriba las ecuaciones de Maxwell en un medio no conductor con permeabilidad μ y susceptibilidad ε constantes. Muestre que tanto $\vec{E}$ como $\vec{B}$ satisfacen la ecuación de ondas. Encuentre la velocidad de la onda. Escriba una solución de ondas planas para $\vec{E}, \vec{B}$. Cuál es la relación entre $\vec{E}$ y $\vec{B}$?(4ptos.)

b) Discuta la reflexión y refracción de ondas electromagnéticas en la interfaz plana de dos medios no conductores semi infinitos y derive la relación entre el ángulo de incidencia, de reflexión y de refracción.(2ptos.)



Sol:

$$\begin{gathered}
\vec{\nabla}\vec{D}=0 \qquad \vec{\nabla}\vec{B}=0 \\
\vec{\nabla}\times\vec{H}=\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) \quad \vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\vec{0} \\
\vec{D}=\varepsilon\,\vec{E} \qquad \vec{B}=\mu\vec{H} \\
\vec{\nabla}\vec{E}=0 \qquad \vec{\nabla}\vec{B}=0 \\
\vec{\nabla}\times\vec{B}=\left(\mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \quad \vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\vec{0}
\end{gathered}$$

Se tiene:

$$\begin{gathered}
\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\vec{0}, \qquad \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)+\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)}{\partial t}=\vec{0}, \qquad \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{0} \\
\vec{\nabla}\times\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\vec{0}, \quad \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)}{\partial t}=\vec{0}, \quad \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=\vec{0}
\end{gathered}$$

Usando la identidad:

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)-\vec{\nabla}^2\vec{A}$$

Vemos que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ satisfacen la ecuación de onda, dado que $\vec{\nabla}.\vec{A}=0$ en los dos casos:

$$\begin{gathered}
-\vec{\nabla}^2\vec{E}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{0} \\
-\vec{\nabla}^2\vec{B}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=\vec{0}
\end{gathered}$$

La velocidad de la onda c es:

$$\frac{1}{c^2}=\mu_0\varepsilon_0, c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

Solución ondas planas:

$$\vec{E}(\vec{x}\,,t)=\hat{\varepsilon}_1E_0e^{i\left(\vec{k}\,.\vec{x}\,-\omega t\right)}, \;\; \vec{B}(\vec{x}\,,t)=\hat{\varepsilon}_2B_0e^{i\left(\vec{k}\,.\vec{x}\,-\omega t\right)} \tag{1}$$

$\hat{\varepsilon}_i$ son vectores unitarios reales. E_0, B_0 son números complejos. Las cantidades físicas se obtienen tomando la parte real de (1).

$$\hat{\varepsilon}_i.\vec{k} = 0 \quad \text{, onda transversal}$$
$$\vec{k} \times \hat{\varepsilon}_2 B_0 = -\mu\varepsilon\omega\hat{\varepsilon}_1 E_0, \quad \vec{k} \times \hat{\varepsilon}_1 E_0 = \omega\hat{\varepsilon}_2 B_0 \quad ,$$
$$\hat{\varepsilon}_2 = \hat{k} \times \hat{\varepsilon}_1, \qquad k E_0 = \omega B_0$$
$$k B_0 = \mu\varepsilon\omega E_0, \qquad \omega = \frac{k}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$
$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\omega}\vec{k} \times \vec{E}(\vec{x}, t)$$

Ley de Snell Descartes

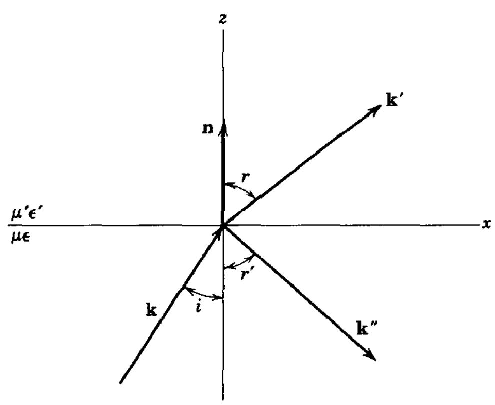


Figura 1.

Las tres ondas son:

- Incidente:$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}.\vec{x} - \omega t)}$, $\vec{B} = \sqrt{\mu\varepsilon}\frac{\vec{k} \times \vec{E}}{k}$
- Refractada: $\vec{E}' = \vec{E}_0' e^{i\left(\vec{k}'.\vec{x} - \omega t\right)}$, $\vec{B}' = \sqrt{\mu'\varepsilon'}\frac{\vec{k}' \times \vec{E}'}{k'}$
- Reflejada: $\vec{E}'' = \vec{E}_0'' e^{i(\vec{k}''.\vec{x} - \omega t)}$, $\vec{B}'' = \sqrt{\mu\varepsilon}\frac{\vec{k}'' \times \vec{E}''}{k''}$
- $|\vec{k}| = \left|\overrightarrow{k''}\right| = k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu\varepsilon}$, $|\vec{k}'| = k' = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu'\varepsilon'}$

Las condiciones de borde en $z = 0$ son válidas para todo $t, \vec{x}$, lo que implica que las fases de las tres ondas son iguales en $z = 0$.Esto es, la frecuencia ω es común y:

$$\vec{k}.\vec{x}|_{z=0} = \vec{k}'.\vec{x}|_{z=0} = \overrightarrow{k''}.\vec{x}|_{z=0}$$
$$\vec{k} - \vec{k}' = a\,\hat{n} \quad \vec{k} - \vec{k}'' = b\,\hat{n}$$

$\vec{k}', \vec{k}''$ están en el plano generado por $\hat{n}, \vec{k}$. Además:

$$\hat{n} \times \vec{k} = \hat{n} \times k' = n \times k''$$
$$k \operatorname{sen} i = k' \operatorname{sen} r, \quad \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu\varepsilon}\operatorname{sen} i = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu'\varepsilon'}\operatorname{sen} r, \quad n \operatorname{sen} i = n' \operatorname{sen} r$$

Problema 4.

a) Encuentre los potenciales $(\phi, \vec{A})$ de una carga puntual q que se mueve con velocidad $\vec{v}$ constante, a lo largo del eje x.(3ptos.)

b) Encuentre los campos $\vec{E}$, $\vec{B}$ de una carga puntual q que se mueve con velocidad $\vec{v}$ constante, a lo largo del eje x.(3ptos.)

Sol: En el sistema en reposo de la carga tenemos:

$$\phi(x,y,z,t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \vec{A}(x,y,z,t) = \vec{0}$$

$$A_\mu = (\vec{A}, i\Phi)$$

transforma como$(\vec{x}, ict)$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} A'_x &= \gamma\left(-v\,\frac{q}{4\pi c\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right), \\ A'_y &= 0, \qquad A'_z = 0 \\ \Phi' &= \gamma\Phi(x,y,z) \\ x &= \gamma(x'+vt'), \quad y = y', z = z' \end{aligned}$$

Hemos supuesto que la carga se mueve con velocidad v a lo largo del eje $-x'$.

Esto es:

$$\begin{aligned} A'_x &= \gamma\left(-v\,\frac{q}{4\pi c\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{\gamma^2(x'+vt')^2+y'^2+z'^2}}\right), \\ A'_y &= 0, \quad A'_z = 0 \\ \Phi' &= \gamma\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{\gamma^2(x'+vt')^2+y'^2+z'^2}} \end{aligned}$$

Para movimiento relativo en la dirección x se tiene que:

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1 & B'_1 &= B_1 \\ E'_2 &= \gamma(E_2 - \beta B_3) & B'_2 &= \gamma(B_2 + \beta E_3) \\ E'_3 &= \gamma(E_3 + \beta B_2) & B'_3 &= \gamma(B_3 - \beta E_2) \end{aligned}$$

Esto es:

$$\begin{aligned} E'_1 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma(x'+vt')}{(\gamma^2(x'+vt')^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}} & B'_1 &= 0 \\ E'_2 &= \gamma\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{y'}{(\gamma^2(x'+vt')^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}\right) & B'_2 &= \gamma\left(\beta\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z'}{(\gamma^2(x'+vt')^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \\ E'_3 &= \gamma\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z'}{(\gamma^2(x'+vt')^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}\right) & B'_3 &= \gamma\left(-\beta\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{y'}{(\gamma^2(x'+vt')^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \end{aligned}$$

Ayuda:

$$\nabla.\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(\,r^2\,A_r\,)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\,(\,A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$x' = \gamma(x - u\,t), \qquad t' = \gamma\Big(t - \frac{u}{c^2}\,x\Big)$$

Tiempo: 3 horas
BUENA SUERTE!