Corriente Alterna

Figura 1. Símbolo de una fem alternante

En los circuitos de corriente alterna la fem externa varía con el tiempo como $v = V_0 \cos\,(\omega t + \alpha)$, donde V_0 es la amplitud máxima, ω es la frecuencia angular y α es la fase. Se tiene la relación $\omega = 2\pi f$, donde $f$es la frecuencia. En EEUU y Canadá , $f = 60\,\mathrm{hz}$. En casi todo el resto del mundo f=50hz. En Chile $f = 60\mathrm{hz}.$

Similarmente, las corrientes en los circuitos CA varían como: $i = I_0\,\mathrm{sen}(\omega t + \beta)$

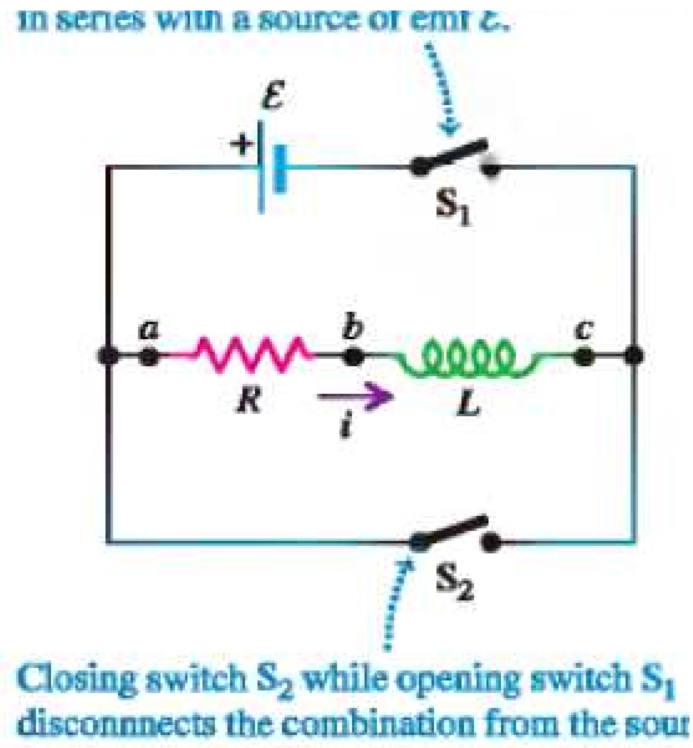


Figura 2.

Un circuito típico que debemos considerar está representado en la fig. 2. En este caso ε es una fem CA.La ecuación a resolver es la misma que en el caso CC:$\varepsilon(t) - iR - L\frac{di}{dt} = 0$. Esto es:

$$iR + L\frac{di}{dt} = V_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

Esta es una ecuación diferencial lineal inhomogénea. Es lineal en la incógnita $i(t)$ y contiene el término del lado derecho que es independiente de i.

La solución general de una ecuación diferencial lineal inhomogénea es:

$$i(t) = i_G(t) + i_P(t)$$

i_G:Solución general de la ecuación diferencial homogénea.

i_P: Una solución particular de la ecuación diferencial inhomogénea.

En nuestro caso:$iR + L\frac{di}{dt} = 0$, $i_G = Ie^{-Rt/L}$, I es una constante arbitraria.

Notemos que $i_G(t) \to 0 \text{ para } t \to \infty$. Por lo tanto $i(t) \sim i_P(t)$, después de un tiempo suficientemente largo. i_G es la parte transiente de la solución. i_P es la solución estacionaria.

En los circuitos de CA interesa la solución estacionaria, puesto que ésta es la que sobrevive si se espera un tiempo suficientemente largo para que la transiente desaparezca.

Las propiedades descritas para el ejemplo particular de la fig. 2 resultan ser generales para todo circuito de CA.

$$iR + L\frac{di}{dt} = V_0 \cos(\omega t + \alpha) \tag{1}$$

Para encontrar la solución particular de una ecuación lineal inhomogénea resulta muy útil utilizar números complejos. Generalizamos la ecuación a:

$$iR + L\frac{di}{dt} = Ve^{i\omega t}, V = V_0 e^{i\alpha} \tag{2}$$

Como la dependencia temporal de la fem variable es exponencial, la solución es sencilla:

$$i = Ie^{i\omega t}, IR + i\omega L I = V, I = \frac{V}{R + i\omega L}$$

Como la ecuación (1) es lineal con coeficientes reales, su solución se obtiene tomando la parte real de la solución de la ecuación (2)

$$V_0 \cos(\omega t + \alpha) = Re(Ve^{i\omega t})$$
$$i = Re(Ie^{i\omega t}) = Re\left(\frac{V}{R + i\omega L}e^{i\omega t}\right)$$

Las definiciones son las siguientes:

$$q(t) = Q e^{i\omega t}$$
$$i(t) = I e^{i\omega t}$$
$$v(t) = V e^{i\omega t}$$

Q, I, V son constantes complejas. Al final del cálculo, las cantidades físicas se determinan tomando la parte real de las cantidades complejas.

Un número complejo se puede escribir como: $z = r e^{i\theta}$, $|z| = r$ es el módulo, θ es el argumento de z. z se puede describir como un vector en el plano con coordenadas cartesianas x, y $z = x + iy$, $Re(z) = x; Im(z) = y$. $\bar{z} = x - iy$ es el complejo conjugado de z. $z\bar{z} = r^2$. Recordemos que $i^2 = -1$. Se tiene la fórmula de de Moivre:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

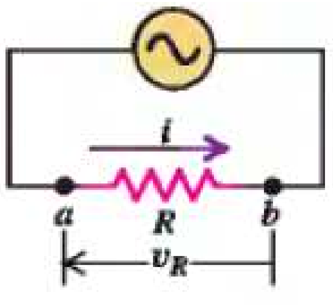


Figura 3.

Consideremos el circuito de la figura 3:

$$-IR+V=0$$
$$i=\frac{V}{R}e^{i\omega t}$$
$$Re(i)=\frac{V_0}{R}\cos(\omega t)$$

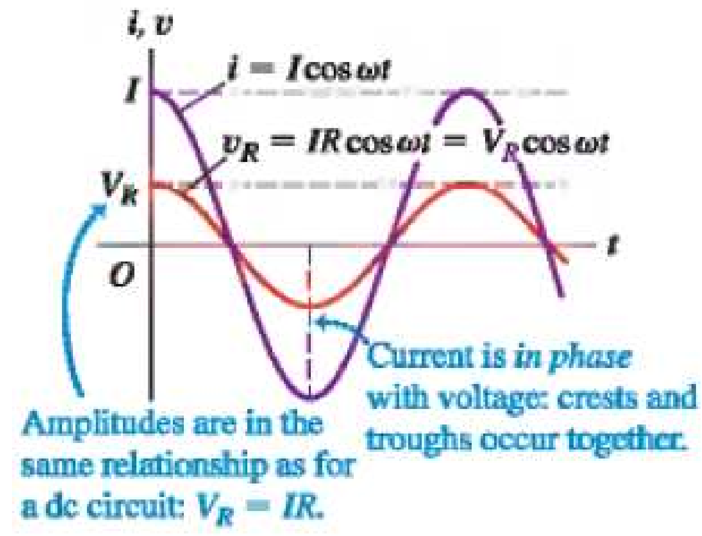


Figura 4.

La diferencia de potencial asociada a la resistencia es:

$$V=IR$$

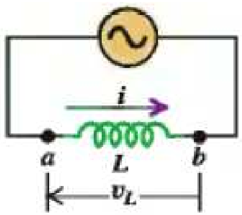


Figura 5.

Apliquemos las leyes de Kirchhoff al circuito de la fig. 2

$$L\frac{di}{dt}-v=L\frac{di}{dt}-Ve^{i\omega t}=0$$

$Li\omega I-V=0$, $I=-\frac{iV}{\omega L}$

$i(t)=Re\Big(-\frac{iV}{\omega L}e^{i\omega t}\Big)=\frac{V_0}{\omega L}\cos\Big(\omega t-\frac{\pi}{2}\Big)$

La corriente tiene una diferencia de fase de $\frac{\pi}{2}$ con el voltaje.

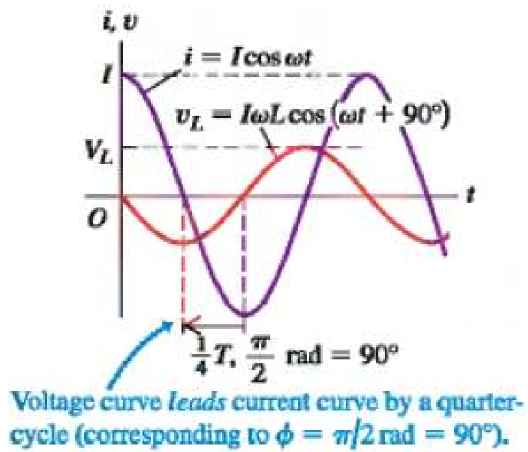


Figura 6.

La diferencia de potencial asociada a L es

$$V=i\omega LI$$

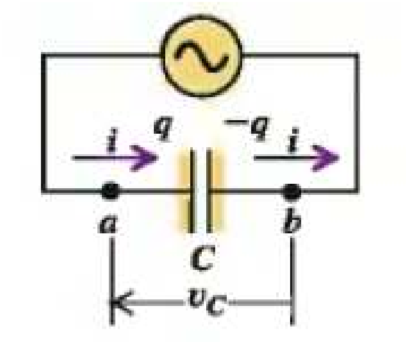


Figura 7.

Sea un condensador de capacidad C conectado a una fem CA como en la fig. 7

$\frac{q}{C} - v = 0$, $\frac{i}{C} - \frac{dv}{dt} = 0$, $\frac{I}{C} - Vi\omega = 0$

$$i(t) = \mathrm{Re}(i\omega C V e^{i\omega t}) = \omega C V_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

La diferencia de potencial asociada al condensador es $V = -\frac{i}{\omega C} I$

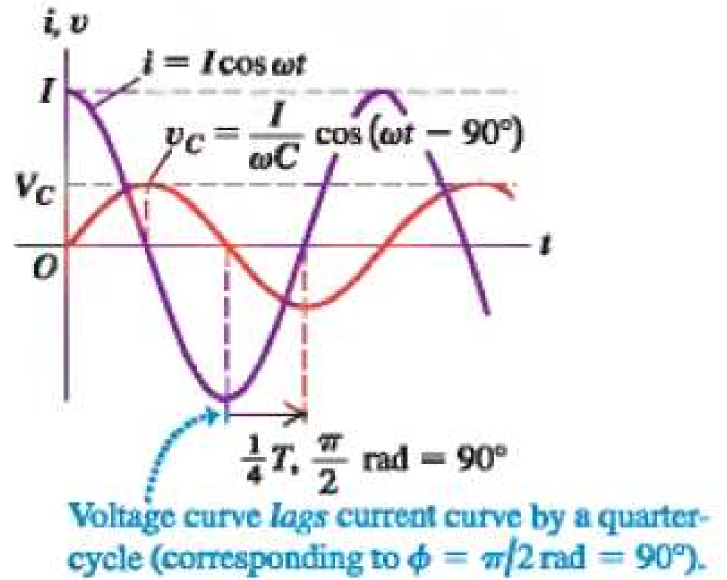


Figura 8.

En cada uno de los circuitos estudiados anteriormente tenemos una relación lineal entre voltaje y corriente:

$$V = ZI$$

Z es la impedancia de un elemento de circuito. $Y = Z^{-1}$ es la admitancia de un elemento de circuito.

La impedancia se mide en Ohms(O).

Siempre definimos el sentido positivo de una corriente de tal manera que una tensión positiva aplicada a una resistencia provoque una corriente positiva.

Las propiedades de los tres elementos básicos de circuito se resumen a continuación. Las caídas de voltaje corresponden a recorrer el elemento en la dirección de la corriente.

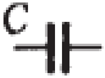
Símbolo	*Admitancia*, Y	*Impedancia*, $Z = \frac{1}{Y}$
R 	$\frac{1}{R}$	R
L 	$\frac{-i}{\omega L}$	$i\omega L$
C 	$i\omega C$	$\frac{-i}{\omega C}$
	$I = YV$	$V = ZI$

Figura 9.

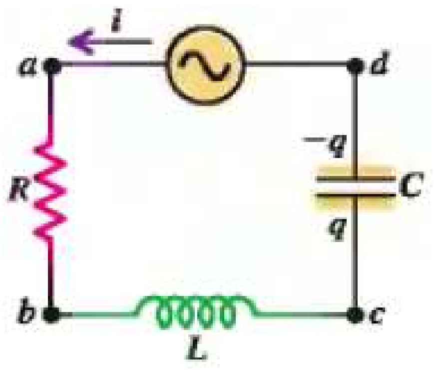


Figura 10.

Las caídas de voltaje, siguiendo la dirección de la corriente, dan la ecuación

$$iR + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} - v = 0$$
$$R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C} - \dot{v} = 0$$
$$RIi\omega - LI\omega^2 + \frac{I}{C} - i\omega V = 0$$
$$\left(R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}\right) I - V = 0$$

Vemos que las impedancias de cada elemento se suman para dar la impedancia total.

Distintos fasores de varias funciones senoidales en el tiempo:$F(t) = \mathrm{Re}(\text{fasor}\, e^{i\omega t})$

NOTA:En ingeniería eléctrica se suele utilizar $j = \sqrt{-1}$ en lugar de i, para no confundir la unidad imaginaria con la corriente.

Funcion senoidal en el tiempo	Fasores
$A\cos\omega t$	A
$A\,\mathrm{sen}\,\omega t$	$-Ai$
$\mathrm{Acos}\,\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t$	$A - Bi$
$A\cos\omega t - B\,\mathrm{sen}\,\omega t$	$A + Bi$
$A\cos(\omega t + \phi) = \mathrm{Re}(\text{fasor}\, e^{i\omega t})$	fasor=$Ae^{i\phi}$
$A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \phi)$	$-Ai\,e^{i\phi}$
$A\cos(\omega t - \phi)$	$Ae^{-i\phi}$
$A\,\mathrm{sen}(\omega t - \phi)$	$-Ai\,e^{-i\phi}$

Consideremos un elemento de circuito por el que circula una corriente i bajo una diferencia de voltaje v. La potencia instantánea provista por este elemento de circuito es

$$p = vi$$

Consideremos dos amplitudes complejas

$$a = A_0 \cos(\omega t + \alpha) \quad a = A e^{i\omega t} \quad A = A_0 e^{i\alpha}$$
$$b = B_0 \cos(\omega t + \beta) \quad b = B e^{i\omega t} \quad B = B_0 e^{i\beta}$$
$$<ab> = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, a(t) b(t) = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, A_0 B_0 \cos(\omega t + \alpha)\cos(\omega t + \beta) = \qquad x = \omega t$$
$$\frac{A_0 B_0}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx \cos(x + \alpha)\cos(x + \beta)$$

Usamos la identidad: $\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2\cos A \cos B$, para obtener

$$<ab> = \frac{A_0 B_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} dx \{\cos(2x + \alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\} = \cos(\alpha - \beta)\frac{A_0 B_0}{2}$$
$$A\bar{B} + \bar{A}B = A_0 B_0 e^{i(\alpha - \beta)} + A_0 B_0 e^{-i(\alpha - \beta)} = 2 A_0 B_0 \cos(\alpha - \beta) \tag{3}$$
$$<ab> = \frac{1}{2} Re(A\bar{B})$$

En una resistencia v e i están en fase. Por lo tanto la potencia es siempre positiva. Encontremos la potencia media en un ciclo.

$$I = \frac{V}{R} \quad <p> = \frac{1}{2}\frac{V\bar{V}}{R} = \frac{V_0^2}{2R}$$

Para una cantidad oscilante en el tiempo, conviene definir una medida asociada que sea siempre positiva llamado valor cuadrático medio o valor eficaz:

$$d_{\mathrm{vcm}} = \sqrt{<d^2>}$$

$$v_{\mathrm{vcm}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \qquad <p> = \frac{v_{\mathrm{vcm}}^2}{R}$$

Potencia en una inductancia CA

Potencia en una inductancia: $I=\frac{V}{i\omega L}$ $<p>=\frac{1}{2}Re\left(\frac{V\bar{V}}{i\omega L}-\frac{V\bar{V}}{i\omega L}\right)=0$

Potencia en un condensador: $I=i\omega CV$ $<p>=\frac{1}{2}Re(i\omega CV\bar{V}-i\omega CV\bar{V})=0$

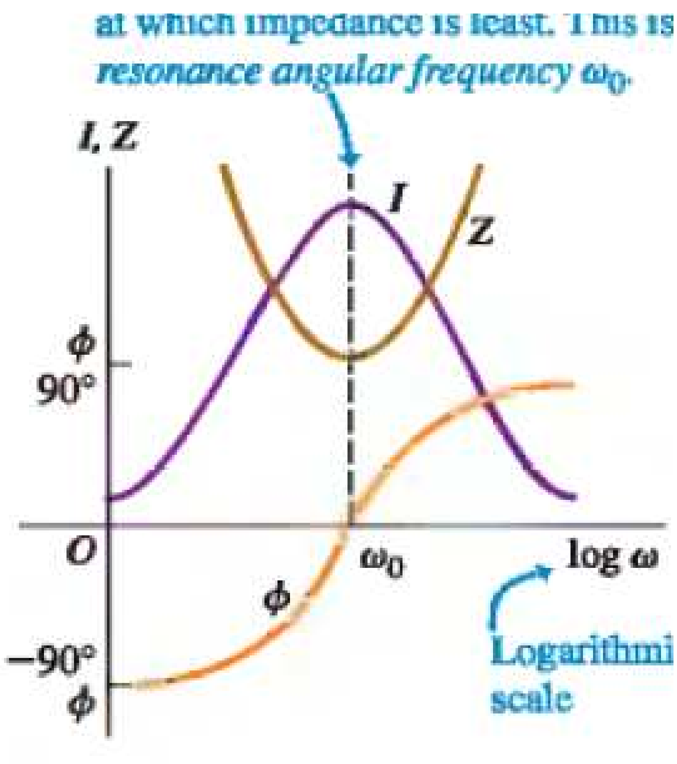
Potencia en un circuito general CA: $I=YV$

$$<p>=\frac{1}{2}Re(YV\,\bar{V}+\bar{Y}\bar{V}V)=\bar{V}V\,\mathrm{Re}(Y)=\ 2v_{\mathrm{vcm}}^2\mathrm{Re}(Y)$$

Evaluando directamente el promedio de la potencia usando la ecuación (3):

$<p>=I_{\mathrm{vcm}}V_{\mathrm{vcm}}\cos(\phi)$, $\phi=\alpha-\beta\ =\mathrm{diferencia\,de\,fase\,entre}\,I y V$

$\cos(\phi)$ es el factor de potencia del circuito.



Sea un circuito L-R-C conectado a una fuente de corriente alterna de frecuencia angular ω.

$I = \frac{V}{R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}}$. Se tiene que

$$I_{\text{vcm}} = \sqrt{\frac{V\bar{V}}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

La corriente es máxima cuando hay resonancia:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

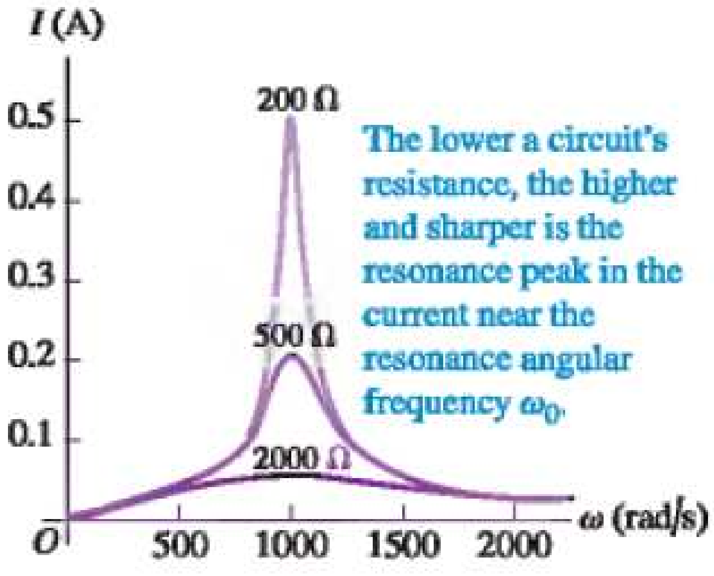


Figura 11. $I(\omega)$ como función de la resistencia R en un circuito L-R-C con $V = 100V$, $L = 2H$, $C = 0.5\mu F$ y tres valores distintos de R.

La emisora de radio emite ondas electromagnética de una frecuencia característica ω_E. A la antena del receptor llega una mezcla de radiofrecuencia correspondiente a varias emisoras distintas. La señal de la antena se usa como fem de un circuito L-R-C. Este resonará con la frecuencia natural ω_0. Las demás frecuencias de la señal se atenúan hasta desaparecer.Variando C o L hacemos que $\omega_0 = \omega_E$. En el pasado se utilizaba un condensador de placas móviles. Al rotar las placas, se cambia C y se sintoniza la emisora que se quiere. Actualmente se utiliza una bobina con un núcleo de ferrita móvil.

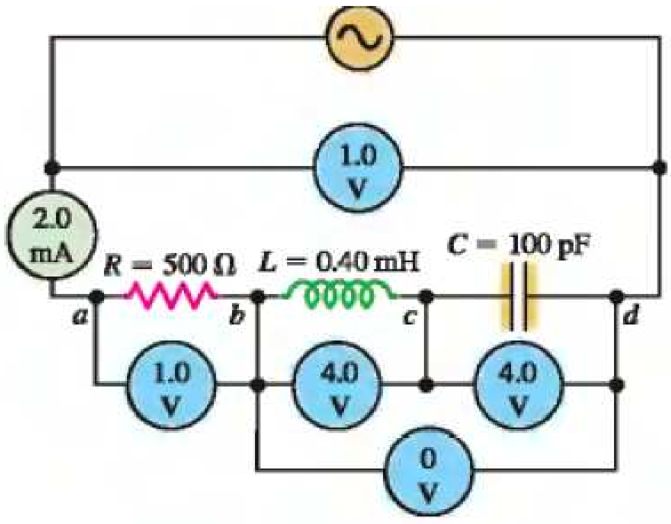


Figura 12.

En fig. 12 se muestra un circuito similar a los utilizados para sintonizar una radio. Está conectado a una fem CA de voltaje eficaz de $1V$ y frecuencia variable. Encontrar (a) La frecuencia de resonancia;(b) La impedancia de R, L, C en resonancia;(c) i_{vcm} en resonancia;(d) v_{vcm} al cruzar cada elemento de circuito en resonancia.

(a) $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0.4\times10^{-3}\times10^{2}\times10^{-12}}} = 0.5\times 10^{7}\mathrm{rad}/s;\ f_0 = 800\,\mathrm{khz}$

(b)$Z_R = R = 500\Omega$,$Z_L = i\omega L = i0.5\times 10^7\times .4\times10^{-3} = 2i\times10^3\Omega,\ Z_C = \frac{1}{i\omega C} = -i\frac{1}{0.5\times10^7\times10^{-10}} = -2i\times10^3\Omega$

(c) $I = \frac{\sqrt{2}}{500}, i_{\mathrm{cvm}} = \frac{1}{500} = 2\times10^{-3}A$

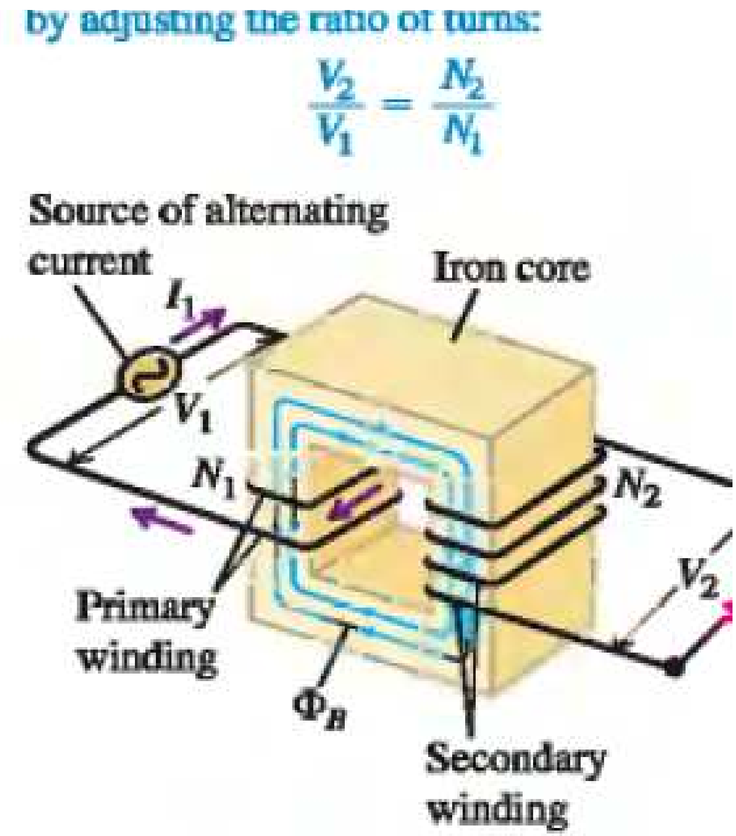
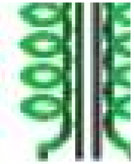


Figura 13.

Un transformador  está compuesto de un circuito primario(N_1 vueltas) y de un circuito secundario(N_2 vueltas). En el circuito primario se aplica un voltaje CA, el que genera una corriente i_1. Esto produce un flujo variable Φ_B por vuelta en el circuito primario y secundario. La fem inducida en el circuito primario es $V_1 = N_1\dot{\Phi}_B$ y en el secundario $V_2 = N_2\dot{\Phi}_B$. Suponiendo que la resistencia es despreciable en el circuito primario, se tiene que V_1 es el voltaje de la fuente externa. Luego: $\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}$

Si conectamos una resistencia al circuito secundario, encontramos que la potencia disipada en la resistencia, iguala a la potencia provista por el circuito primario, dado que no hay resistencia en las vueltas.

$$I_1 V_1 = I_2 V_2$$

Pero $I_2 = \frac{V_2}{R}$,

$$I_1 V_1 = \frac{V_2^2}{R} = \frac{V_1^2}{R}\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2, \quad \frac{V_1}{I_1} = \frac{R}{\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2} \tag{4}$$

Esto muestra que cuando el secundario se conecta a una resistencia R, se genera una resistencia en el primario dada por la ecuación (4).

1. Ley de mallas. La suma de las caídas de voltaje en una malla se anula. En la dirección de la corriente:
    - Impedancia Z, $\Delta V = IZ$
    - Fuente, $\Delta V = -\mathcal{V}$
2. Ley de nodos. La suma de las corrientes instantáneas que entran a un nodo se anula.

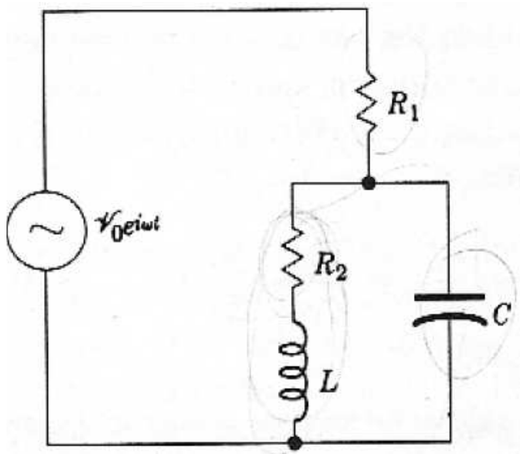


Figura 14.

Considere el circuito de la figura. Encontrar la corriente que circula por él.

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{V}_0 + (R_1 + Z_{\mathrm{eq}}) I &= 0 \\
\frac{1}{Z_{\mathrm{eq}}} &= \frac{1}{R_2 + i\omega L} + \frac{1}{1/(i\omega C)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_{\mathrm{eq}} = \frac{R_2 + i\omega L}{i\omega C(R_2 + i\omega L) + 1} &= \\
\frac{(R_2 + i\omega L)(1 - \omega^2 LC - i\omega C R_2)}{\omega^2 C^2 R_2^2 + (1 - \omega^2 LC)^2} &= \\
\frac{R_2(1 - \omega^2 LC) + \omega^2 LC R_2}{\omega^2 C^2 R_2^2 + (1 - \omega^2 LC)^2} &+ i \\
\frac{\omega L(1 - \omega^2 LC) - R_2^2 \omega C}{\omega^2 C^2 R_2^2 + (1 - \omega^2 LC)^2} & \quad = \\
\frac{R_2}{\omega^2 C^2 R_2^2 + (1 - \omega^2 LC)^2} &+ i \\
\frac{\omega L(1 - \omega^2 LC) - R_2^2 \omega C}{\omega^2 C^2 R_2^2 + (1 - \omega^2 LC)^2} & \\
I = \frac{\mathcal{V}_0}{R_1 + Z_{\mathrm{eq}}} & \\
I(t) = \mathrm{Re}(I e^{i\omega t}) &
\end{aligned}
$$

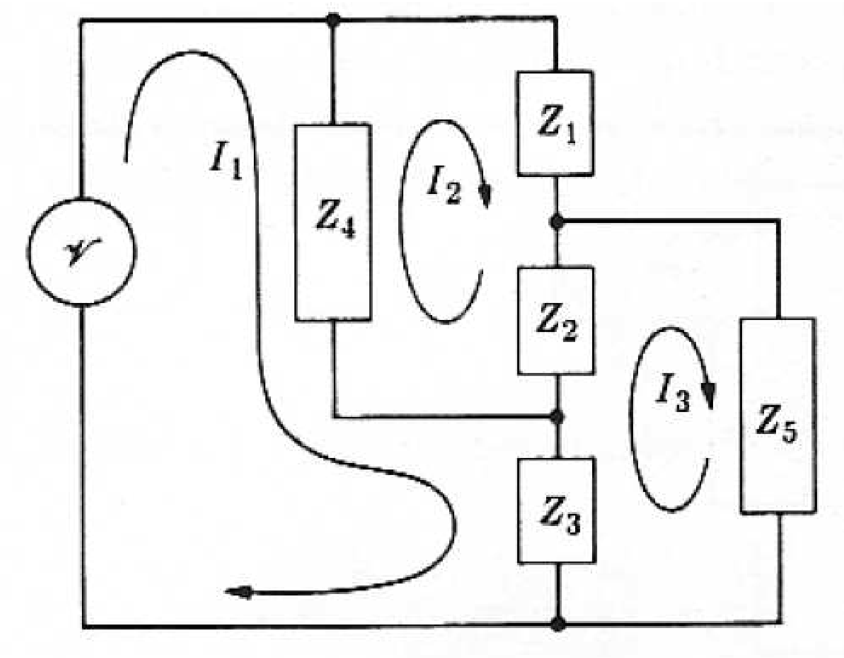


Figura 15.

$$
\begin{aligned}
(I_1 - I_2)Z_4 + Z_3(I_1 - I_3) - \mathcal{V} &= 0 \\
Z_4(I_2 - I_1) + Z_1 I_2 + Z_2(I_2 - I_3) &= 0 \\
Z_5 I_3 + Z_3(I_3 - I_1) + Z_2(I_3 - I_2) &= 0
\end{aligned}
$$

$$I_1 = \frac{Z_4\ (V\ (Z_5 + Z_2) + V\ Z_3) + V\ (Z_2\ (Z_5 + Z_1) + Z_1\ Z_5) + V\ (Z_2 + Z_1)\ Z_3}{Z_4\ (Z_3\ (Z_5 + Z_1) + Z_2\ (Z_5 + Z_1) + Z_1\ Z_5) + Z_3\ (Z_2\ (Z_5 + Z_1) + Z_1\ Z_5)}$$

$$I_2 = \frac{Z_4\ (V\ (Z_5 + Z_2) + V\ Z_3) + V\ Z_2\ Z_3}{Z_4\ (Z_3\ (Z_5 + Z_1) + Z_2\ (Z_5 + Z_1) + Z_1\ Z_5) + Z_3\ (Z_2\ (Z_5 + Z_1) + Z_1\ Z_5)}$$

$$I_3 = \frac{(V\ Z_3 + V\ Z_2)\ Z_4 + V\ (Z_2 + Z_1)\ Z_3}{Z_4\ (Z_3\ (Z_5 + Z_1) + Z_2\ (Z_5 + Z_1) + Z_1\ Z_5) + Z_3\ (Z_2\ (Z_5 + Z_1) + Z_1\ Z_5)}$$

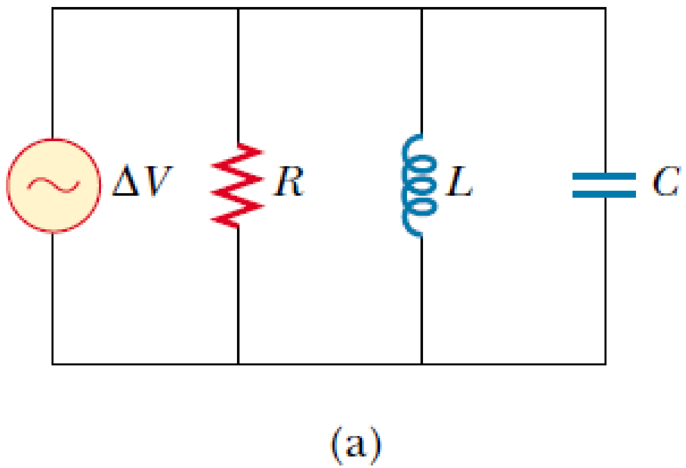


Figura 16.

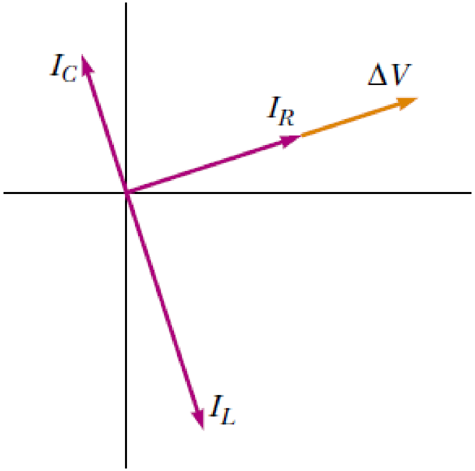
(a)Mostrar que la corriente vcm que pasa por la fuente es $I_{\rm vcm} = \Delta V_{\rm vcm}\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$

(b) El ángulo de fase ϕ entre $I_{\rm vcm}$ y $\Delta V_{\rm vcm}$ es $\operatorname{tg}\phi = R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$

$$
\begin{aligned}
R(I_1 - I_2) - \Delta V &= 0\\
R(I_2 - I_1) + i\omega L(I_2 - I_3) &= 0\\
i\omega L(I_3 - I_2) + \frac{1}{i\omega C} I_3 &= 0\\
I_3 &= i\omega C\Delta V\\
I_2 &= i\omega C\Delta V\left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)\\
I_1 &= \frac{\Delta V}{R} + i\omega C\Delta V\left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)\\
I &= I_1
\end{aligned}
$$

$<ab> = \frac{1}{2}Re(A\bar{B})$,$I_{\rm vcm} = \sqrt{\frac{1}{2}Re(I\bar{I})} = \frac{|I|}{\sqrt{2}} = \Delta V_{\rm vcm}\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$

$I = |I|e^{i\phi}$, $\operatorname{tg}\phi = \frac{\omega C\left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)}{R^{-1}} = R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$



(b)

Figura 17.

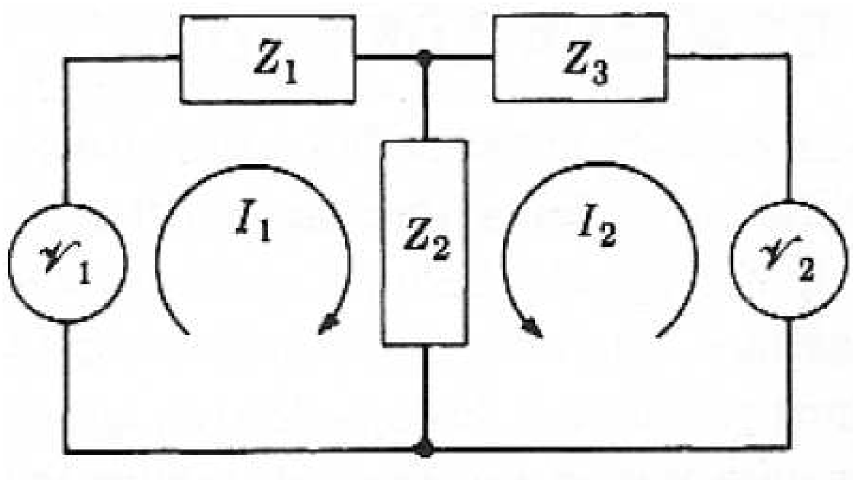


Figura 18.

$$I_1 Z_1 + Z_2(I_1 + I_2) - \mathcal{V}_1 = 0$$
$$I_2 Z_3 - \mathcal{V}_2 + Z_2(I_2 + I_1) = 0$$

- $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ no están en fase necesariamente. $\mathcal{V}_1 = |\mathcal{V}_1| e^{i\phi_1}$,$\mathcal{V}_2 = |\mathcal{V}_2| e^{i\phi_2}$
- El método falla si las fem no tienen la misma frecuencia.

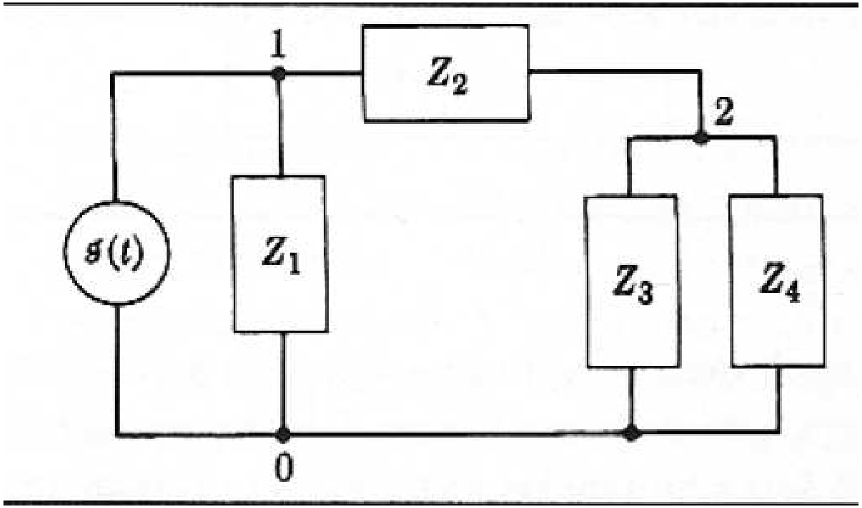


Figura 19. Nodos