

Covarianza de la Electrodinámica

- Usamos unidades gaussianas para describir la electrodinámica
- 6 grados de libertad, \vec{E}, \vec{B}
- Covarianza implica que estos grados de libertad deben ser componentes de un tensor en 4 dimensiones.
- Tensor de rango 2 antisimétrico tiene 6 componentes independientes en $n = 4$. $F_{\mu\nu}$
-

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$B_i = \varepsilon_{ijk} A_{k,j} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (A_{k,j} - A_{j,k}),$$

$$F_{jk} = A_{k,j} - A_{j,k},$$

$$B_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk}$$

covarianza: $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$ $A_\mu = (\vec{A}, A_4)$ un cuadvivector,

$F_{i4} = A_{4,i} - A_{i,4} = -\Phi_{,i} - A_{i,4}$ $iF_{i4} = E_i, iA_4 = -\Phi$

$F_{i4} = -iE_i, F_{jki} = \varepsilon_{jki}B_i$ $F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix}$

$A_\mu = (\vec{A}, i\Phi)$

Conservación de la carga eléctrica: $J_\mu = (J, ic\rho), J_{\mu,\mu} = \nabla J + \partial_t \rho = 0$.

Gauge de Lorentz es covariante: $A_{\mu,\mu} = 0$.

Covarianza de la ecuación de ondas en el gauge de Lorentz:

$$A_{\mu,\nu\nu} = -\frac{4\pi}{c} J_\mu$$

Invarianza de Gauge: $A'_\mu = A_\mu + \lambda_{,\mu}$ implica $F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$

Ecuaciones de Maxwell: Primer orden en las derivadas: $F_{\mu\nu,\alpha}$

$F_{\mu\nu,\alpha} +$ permutaciones cíclicas de los índices $= 0$ se satisface automáticamente si

$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$ Ejercicio: Verificar.

Por lo tanto: $F_{\mu\nu,\alpha} + F_{\nu\alpha,\mu} + F_{\alpha,\mu\nu} = 0$ corresponde a las ecuaciones de Maxwell homogéneas.

Las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas tienen un término inhomogéneo conteniendo J_μ . Por lo tanto deben ser de la forma:

$$F_{\mu\nu,\nu} = a J_\mu$$

Para fijar a , tomamos la ley de Gauss:

$$F_{4i,i} = a J_{4,i} \quad E_{i,i} = a i c \rho, \quad a = \frac{4\pi}{c}$$

$$F_{\mu\nu,\nu} = \frac{4\pi}{c} J_\mu$$

Ecuación de fuerza de Lorentz:

$$f = \rho E + \frac{1}{c} J \times B$$
$$f_\mu = \frac{1}{c} F_{\mu\nu} J_\nu$$
$$f_4 = \frac{1}{c} i E_i J_i = \frac{i}{c} E \cdot J \quad , \text{potencia}$$

Tensor de energía momentum:

$$f_\mu = \frac{1}{c} F_{\mu\nu} J_\nu = \frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} F_{\nu\lambda, \lambda} = T_{\mu\nu, \nu}$$
$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} + \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} F_{\lambda\rho} \right)$$

1 Transformación de los campos electromagnéticos

$$F'_{\mu\nu} = L_{\mu\alpha} L_{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$$

donde L es la matriz de transformación de Lorentz.

Ejercicio 1. Muestre que para movimiento relativo en la dirección x se tiene que:

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1 & B'_1 &= B_1 \\ E'_2 &= \gamma(E_2 - \beta B_3) & B'_2 &= \gamma(B_2 + \beta E_3) \\ E'_3 &= \gamma(E_3 + \beta B_2) & B'_3 &= \gamma(B_3 - \beta E_2) \end{aligned}$$

2 Lagrangiano de la Electrodinámica

Sea $\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$ la densidad lagrangiana de un conjunto de campos $\phi_i(x)$.

La acción del sistema es $S = \int_V d^4x \mathcal{L}$. El principio de menor acción con valores fijos de los campos sobre la superficie cerrada Σ cuyo interior es V implica:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_V d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} (\delta \phi_i)_{,\mu} \right) = \\ &= \int_V d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} \right) \delta \phi_i + \int_\Sigma d\sigma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} = 0 \end{aligned}$$

El término de superficie se anula, dado que $\delta \phi_i = 0$ allí.

Ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i}$$

Tensor de energía-momentum. Si la densidad lagrangeana no depende de explícitamente de x , lo que refleja la invarianza translacional de la acción, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \phi_{i,\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\nu}} \phi_{i,\nu\mu} = \\ \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\nu}} \phi_{i,\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\nu}} \phi_{i,\nu\mu} &= \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\nu}} \phi_{i,\mu} \right) \\ \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\nu}} \phi_{i,\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} \right) &= 0\end{aligned}$$

$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\nu}} \phi_{i,\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu}$: tensor energía momentum canónico.

Conservación de energía momentum: $T_{\mu\nu,\nu} = 0$

Para encontrar la densidad lagrangeana de la Electrodinámica imponemos las siguientes propiedades:

1. Las ecuaciones de los campos deben ser lineales. Esto implica que \mathcal{L} es una función cuadrática de los campos y sus derivadas.
2. \mathcal{L} debe ser invariante de Lorentz.

3. Invarianza de gauge. \mathcal{L} es invariante bajo $\delta A_\mu = \partial_\mu \lambda$

$$\mathcal{L} = a_1 A_\mu A_\mu + a_2 A_{\mu,\nu} A_{\mu,\nu} + a_3 A_{\mu,\nu} A_{\nu,\mu}$$

Se satisfacen 1 y 2. Bajo transformaciones de gauge:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= 2a_1 A_\mu \lambda_{,\mu} + 2a_2 A_{\mu,\nu} \lambda_{,\mu\nu} + a_3 (\lambda_{,\mu\nu} A_{\nu,\mu} + A_{\mu,\nu} \lambda_{,\mu\nu}) = \\ &= 2a_1 A_\mu \lambda_{,\mu} + (a_2 + a_3) \lambda_{,\mu\nu} (A_{\nu,\mu} + A_{\mu,\nu}) = 0, \\ & \qquad \qquad \qquad a_1 = 0, a_2 = -a_3 \\ \mathcal{L} &= a_3 (A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}) A_{\mu,\nu} = -\frac{a_3}{2} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Si acoplamos el campo electromagnético a una corriente conservada J_μ , $J_{\mu,\mu} = 0$, agregando un nuevo término a \mathcal{L} :

$$\mathcal{L} = b F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{c} J_\mu A_\mu$$

Ejercicio: Mostrar que la acción es invariante de gauge.

Ecuaciones de E-L:

$$\begin{aligned} \partial_\nu (-4b F_{\mu\nu}) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = \frac{1}{c} J_\mu \\ F_{\mu\nu,\nu} &= -\frac{1}{4bc} J_\mu = \frac{4\pi}{c} J_\mu \quad b = -\frac{1}{16\pi} \end{aligned}$$

Con $J_\mu = 0$.

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\nu}} A_{\alpha,\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} = 2b F_{\lambda\rho} (\delta_{\rho\alpha} \delta_{\nu\lambda} - (\rho \leftrightarrow \lambda)) A_{\alpha,\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} = \\
&4b F_{\nu\alpha} A_{\alpha,\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} = 4b F_{\nu\alpha} F_{\mu\alpha} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} + 4b F_{\nu\alpha} A_{\mu,\alpha} = \\
&4b F_{\nu\alpha} F_{\mu\alpha} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} + 4b (F_{\nu\alpha} A_\mu)_{,\alpha} \\
\tilde{T}_{\mu\nu} &= 4b F_{\nu\alpha} F_{\mu\alpha} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} \\
\tilde{T}_{\mu\nu,\nu} &= T_{\mu\nu,\nu} - 4b (F_{\nu\alpha} A_\mu)_{,\alpha\nu} = 0
\end{aligned}$$

$\tilde{T}_{\mu\nu}$ es invariante de gauge y simétrico. Es el tensor de energía momentum del campo electromagnético.

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = 4b \left(F_{\nu\alpha} F_{\mu\alpha} - \frac{1}{4} F_{\lambda\rho} F_{\lambda\rho} \delta_{\mu\nu} \right), \quad 4b = -\frac{1}{4\pi}$$

$4b = -\frac{1}{4\pi}$ se obtiene de \tilde{T}_{44} que es la densidad de energía del campo.