

# Dinámica de partículas relativistas y campos electromagnéticos

# 1 Segunda ley de Newton

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = m_0 \frac{dv_\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} v_\nu \quad (1)$$

# 2 Lagrangiano y Hamiltoniano

Para describir la interacción entre una partícula cargada y el campo electromagnético invocamos los dos principios usuales: invarianza de Lorentz e invarianza de gauge de la acción. Además sabemos que la interacción debe ser lineal en el potencial:

$$S = -m_0 c^2 \int d\tau + \alpha \int d\tau v_\mu A_\mu$$

La invarianza relativista de la acción es evidente. Bajo transformaciones de gauge

tenemos:

$$\delta S = \alpha \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau v_\mu \partial_\mu \lambda = \alpha \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{dx_\mu}{d\tau} \partial_\mu \lambda = \alpha (\lambda(\tau_1) - \lambda(\tau_2)) = 0$$

El lagrangiano es:

$$-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \alpha (-c\Phi + \vec{v} \cdot \vec{A}) \rightarrow \frac{1}{2} m_0 v^2 - \alpha c\Phi, \vec{A} = \vec{0}$$

luego  $\alpha = \frac{q}{c}$

Las ecuaciones de Lagrange son:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \vec{p} + \frac{q}{c} \vec{A} \right)_i &= \frac{q}{c} (-c\Phi_{,i} + v_j A_{j,i}) \\ &= \frac{d}{dt} \vec{p}_i + \frac{q}{c} \partial_t \vec{A}_i + \frac{q}{c} A_{i,j} v_j \\ \frac{d}{dt} \vec{p}_i &= \frac{q}{c} v_j F_{ij} + q \left( -\Phi_{,i} - \frac{q}{c} \partial_t \vec{A}_i \right) = \frac{q}{c} v_j \varepsilon_{ijk} B_k + q E_i \end{aligned}$$

Hamiltoniano:

$$P_i = m_0 v_i \gamma + \frac{q}{c} A_i = p_i + \frac{q}{c} A_i$$

$$H = v_i \left( p_i + \frac{q}{c} A_i \right) + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{q}{c} (-c\Phi + \vec{v} \cdot \vec{A}) =$$

$$v_i p_i + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + q\Phi =$$

$$m_0 (v^2 \gamma + c^2 \gamma^{-1}) + q\Phi =$$

$$m_0 c^2 \gamma \left( \frac{v^2}{c^2} + 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + q\Phi =$$

$$m_0 c^2 \gamma + q\Phi$$

$$E = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2},$$

$$H = c \sqrt{\left( \vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + m_0^2 c^2} + q\Phi$$

**Ejercicio 1.** Muestre que las ecuaciones de Hamilton se reducen a la ecuación de fuerza de Lorentz.

## 2.1 Ecuaciones covariantes

$$-c^2(d\tau)^2 = dx_\mu dx_\mu, d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-dx_\mu dx_\mu}$$

Introduzca un parámetro de evolución escalar  $u$ . La acción se escribe:

$$S = -m_0 c \int du \sqrt{-\frac{dx_\mu}{du} \frac{dx_\mu}{du}} + \frac{q}{c} \int du \frac{dx_\mu}{du} A_\mu$$

El lagrangiano explícitamente covariante es:

$$L_c = -m_0 c \sqrt{-\frac{dx_\mu}{du} \frac{dx_\mu}{du}} + \frac{q}{c} \frac{dx_\mu}{du} A_\mu, \frac{dx_\mu}{du} = \dot{x}_\mu$$

**Ejercicio 2.** Encuentre las ecuaciones de Lagrange para  $L_c$ . Luego identifique  $du = d\tau$

Muestre que las ecuaciones corresponden a la forma covariante de la ley de Newton (1)

### 3 Movimiento en un campo magnético uniforme y estático

Un campo magnético no cambia la energía cinética de una partícula

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = q \vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0 \quad \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \dot{\gamma} v^2 = \frac{1}{2} \gamma \frac{d\vec{v}^2}{dt} + \dot{\gamma} v^2 = 0, \quad \left( \frac{1}{2} \gamma + \frac{v^2}{2c^2} \gamma^3 \right) \frac{d\vec{v}^2}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{2} \gamma^3 \frac{d\vec{v}^2}{dt} = 0 \quad \gamma = \text{constante} \quad E = m_0 c^2 \gamma = \text{constante}$$

Campo magnético Uniforme:  $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ . Se tiene:

$$\vec{F} = q(v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}) \times B_0 \hat{z} = qB_0(-v_x \hat{y} + v_y \hat{x}), \quad m_0 \rightarrow m$$

$$m \dot{v}_x = q\gamma^{-1} B_0 v_y \quad m \dot{v}_y = -q\gamma^{-1} B_0 v_x \quad m \dot{v}_z = 0$$

Esto es:  $v_z = v_{0z}$ , una constante.

$$\dot{v}_x = \omega v_y \quad \dot{v}_y = -\omega v_x \quad \omega = \frac{qB_0}{m\gamma} = \text{frecuencia de giro o precesión}$$

$$\ddot{v}_x = -\omega^2 v_x \quad v_x = A \text{sen}(\omega t + \alpha) \quad v_y = \frac{\dot{v}_x}{\omega} = A \text{cos}(\omega t + \alpha)$$

Notar que en cada plano perpendicular al eje  $z$  la partícula realiza un movimiento circular uniforme.

Para determinar la trayectoria, integramos las ecuaciones anteriores:

$$v_x = \dot{x} = A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \quad x = -\frac{A}{\omega} \cos(\omega t + \alpha) + x_0$$

$$v_y = \dot{y} = A \cos(\omega t + \alpha) \quad y = \frac{A}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) + y_0$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \left(\frac{A}{\omega}\right)^2 = R^2$$

$$v_z = \dot{z} = v_{0z} \quad z = v_{0z}t + z_0$$

La trayectoria es una hélice.

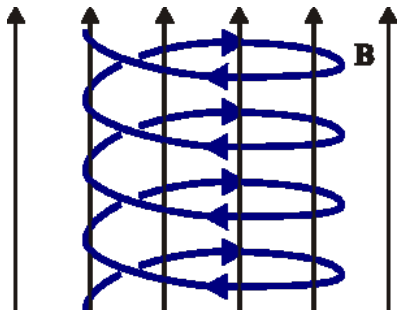


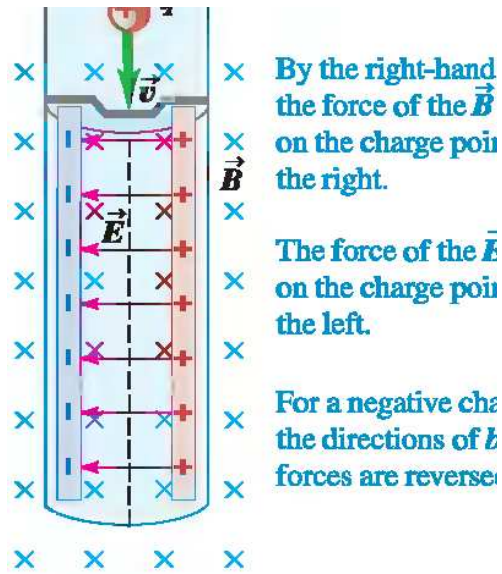
Figura 1.

## 4 Movimiento en un campo magnético y eléctrico uniformes y estáticos

---

Selector de velocidad

---



**Figura 2.**  
Selector de velocidad

El campo eléctrico apunta hacia la izquierda. La fuerza total actuando sobre la partícula de carga  $q$  y velocidad  $v \hat{y}$  donde  $\hat{y}$  apunta hacia abajo es:

$$\vec{F} = qE \hat{x} + qv \hat{y} \times (-B \hat{z}) = q(E - Bv) \hat{x}$$

La partícula no se deflectará si  $v = \frac{E}{B}$ . Variando  $E, B$  podemos seleccionar partículas de velocidad bien definida.

**Ejercicio 3.** Encuentre la velocidad y posición de una partícula de carga  $q$  y masa  $m$  en presencia de campos magnéticos y eléctricos uniformes (Jackson 12.6).

## 5 Lagrangiano para el campo electromagnético

Sea  $\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$  la densidad lagrangiana de un conjunto de campos  $\phi_i(x)$ .



La acción del sistema es  $S = \int_V d^4x \mathcal{L}$ . El principio de menor acción con valores fijos de los campos sobre la superficie cerrada  $\Sigma$  cuyo interior es  $V$  implica:

$$\delta S = \int_V d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} (\delta \phi_i)_{,\mu} \right) =$$

$$\int_V d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} \right) \delta \phi_i + \oint_\Sigma d\sigma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} = 0$$

El término de superficie se anula, dado que  $\delta \phi_i = 0$  allí.

Ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i}$$

Tensor de energía-momentum. Si la densidad lagrangeana no depende de explícitamente de  $x$ , lo que refleja la invarianza translacional de la acción, se tiene:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \phi_{i,\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\nu}} \phi_{i,\nu\mu} =$$

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\nu}} \phi_{i,\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\nu}} \phi_{i,\nu\mu} = \partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\nu}} \phi_{i,\mu} \right)$$

$$\partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\nu}} \phi_{i,\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} \right) = 0$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\nu}} \phi_{i,\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu}: \text{tensor energía momentum canónico.}$$

$$\text{Conservación de energía momentum: } T_{\mu\nu,\nu} = 0$$

Para encontrar la densidad lagrangeana de la Electrodinámica imponemos las siguientes propiedades:

1. Las ecuaciones de los campos deben ser lineales. Esto implica que  $\mathcal{L}$  es una función cuadrática de los campos y sus derivadas.
2.  $\mathcal{L}$  debe ser invariante de Lorentz.
3. Invarianza de gauge.  $\mathcal{L}$  es invariante bajo  $\delta A_\mu = \partial_\mu \lambda$

$$\mathcal{L} = a_1 A_\mu A_\mu + a_2 A_{\mu,\nu} A_{\mu,\nu} + a_3 A_{\mu,\nu} A_{\nu,\mu}$$

Se satisfacen 1 y 2. Bajo transformaciones de gauge:

$$\delta \mathcal{L} = 2a_1 A_\mu \lambda_{,\mu} + 2a_2 A_{\mu,\nu} \lambda_{,\mu\nu} + a_3 (\lambda_{,\mu\nu} A_{\nu,\mu} + A_{\mu,\nu} \lambda_{,\mu\nu}) =$$

$$2a_1 A_\mu \lambda_{,\mu} + (a_2 + a_3) \lambda_{,\mu\nu} (A_{\nu,\mu} + A_{\mu,\nu}) = 0,$$

$$a_1 = 0, a_2 = -a_3$$

$$\mathcal{L} = a_3 (A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}) A_{\mu,\nu} = -\frac{a_3}{2} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

Si acoplamos el campo electromagnético a una corriente conservada  $J_\mu$ ,  $J_{\mu,\mu} = 0$ , agregando un nuevo término a  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L} = b F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{c} J_\mu A_\mu$$

Ejercicio: Mostrar que la acción es invariante de gauge.

Ecuaciones de E-L:

$$\begin{aligned} \partial_\nu(-4b F_{\mu\nu}) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = \frac{1}{c} J_\mu \\ F_{\mu\nu,\nu} &= -\frac{1}{4bc} J_\mu = \frac{4\pi}{c} J_\mu \quad b = -\frac{1}{16\pi} \end{aligned}$$

## 6 Lagrangiano de Proca

## 7 Tensor Energía-momentum canónico y simétrico

$$\mathcal{L} = b F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\nu}} A_{\alpha,\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} = 2b F_{\lambda\rho} (\delta_{\rho\alpha} \delta_{\nu\lambda} - (\rho \leftrightarrow \lambda)) A_{\alpha,\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} = \\ &= 4b F_{\nu\alpha} A_{\alpha,\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} = 4b F_{\nu\alpha} F_{\mu\alpha} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} + 4b F_{\nu\alpha} A_{\mu,\alpha} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4b F_{\nu\alpha} F_{\mu\alpha} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} + 4b (F_{\nu\alpha} A_{\mu})_{,\alpha} \\
& \tilde{T}_{\mu\nu} = 4b F_{\nu\alpha} F_{\mu\alpha} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} \\
& \tilde{T}_{\mu\nu, \nu} = T_{\mu\nu, \nu} - 4b (F_{\nu\alpha} A_{\mu})_{,\alpha\nu} = 0
\end{aligned}$$

$\tilde{T}_{\mu\nu}$  es invariante de gauge y simétrico. Es el tensor de energía momentum del campo electromagnético.

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = 4b \left( F_{\nu\alpha} F_{\mu\alpha} - \frac{1}{4} F_{\lambda\rho} F_{\lambda\rho} \delta_{\mu\nu} \right), \quad 4b = -\frac{1}{4\pi}$$

$4b = -\frac{1}{4\pi}$  se obtiene de  $\tilde{T}_{44}$  que es la densidad de energía del campo.