Plano conductor

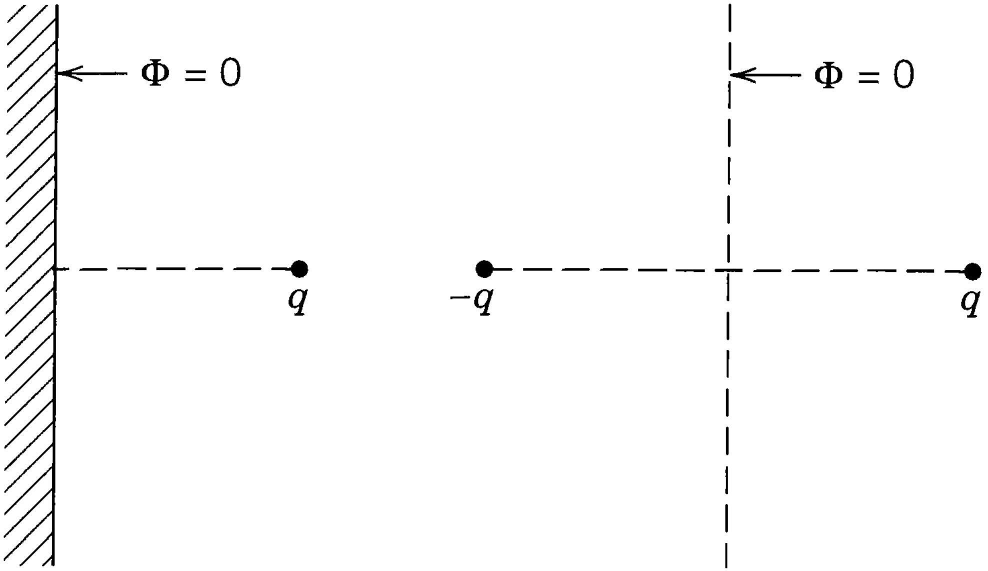
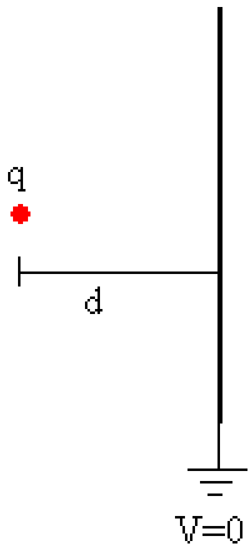
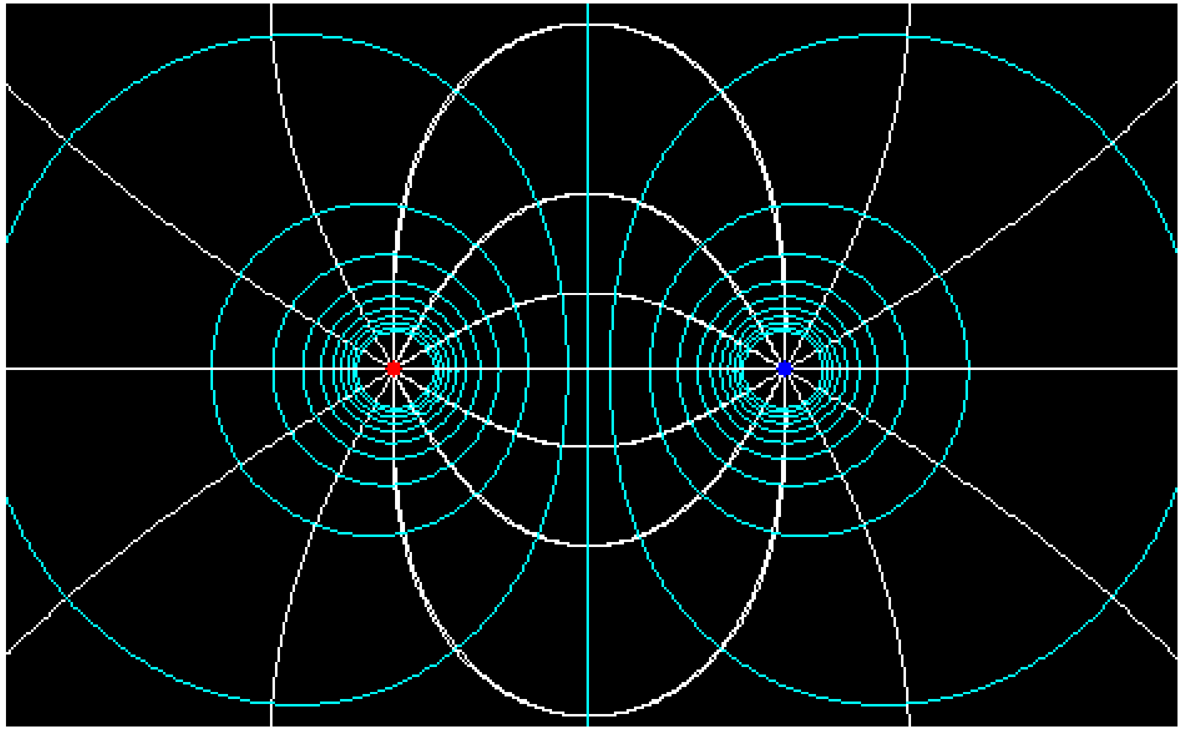


Figure 1.

$$\Phi(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|x - d\hat{n}\,|} - \frac{1}{|x + d\hat{n}\,|}\right)$$





V=0

satisface la condición de borde en el plano y en infinito. Por lo tanto es la única solución.

Ejercicios:

1) Encuentre la densidad de carga σ sobre el conductor

2) Encuentre la fuerza entre el conductor y la carga.

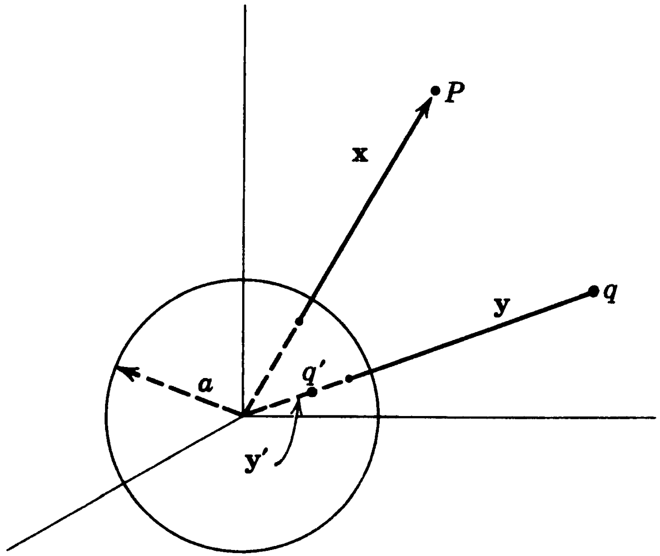


Figure 2.

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{|x - y\hat{n}|} + \frac{q'}{|x - y'\hat{n}|}\right) \qquad \Phi(a\hat{x}) = 0$$

$$\frac{q}{|a\hat{x} - y\hat{n}|} + \frac{q'}{|a\hat{x} - y'\hat{n}|} = 0 = \frac{q/a}{\left|\hat{x} - \frac{y}{a}\hat{n}\right|} + \frac{q'/y'}{\left|\frac{a}{y'}\hat{x} - \hat{n}\right|}$$

Los denominadores son iguales si: $\frac{a}{y'} = \frac{y}{a}$, $y' = \frac{a^2}{y} < a$.

$$q'/y' = -q/a$$

$$q' = -q\frac{a}{y}$$

Densidad de carga inducida

$$\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_{x=a} =$$

Fuerza

$$F = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(y-y')^2}$$

La carga de la esfera es Q.

Por superposición:

1) Se induce carga q' a potencial 0.

2) Se desconecta la esfera y se agrega una carga $Q - q'$ en el origen.

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{|x - y\hat{n}|} + \frac{q'}{|x - y'\hat{n}|} + \frac{Q - q'}{|x|}\right)$$

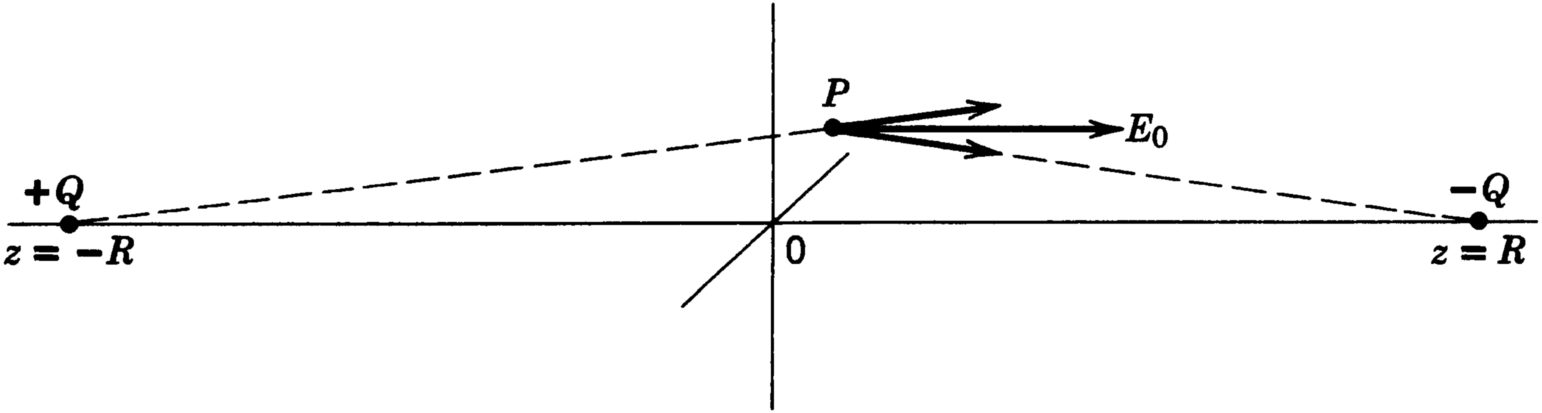
Ejercicio: Encontrar la fuerza entre la carga y la esfera.

Carga puntual y esfera conductora a potencial V

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{|x - y\hat{n}\,|} + \frac{q'}{|x - y'\hat{n}\,|} + \frac{Va}{|x|}\right)$$

Ejercicio: Encontrar la fuerza entre la carga y la esfera.

Esfera y campo eléctrico uniforme



(a)

Figure 3.

$$\Phi(x) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|x\hat{x} + R\hat{z}\,|} - \frac{1}{|x\hat{x} - R\hat{z}\,|}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{1}{|\frac{x}{R}\hat{x} + \hat{z}|} - \frac{1}{|\frac{x}{R}\hat{x} - \hat{z}|}\right) \sim$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(1 - \frac{x}{R}\hat{x}\,.\hat{z} - 1 - \frac{x}{R}\hat{x}\,.\hat{z}\right) = -E_0\hat{z}\,.x$$

$$E_0 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}$$

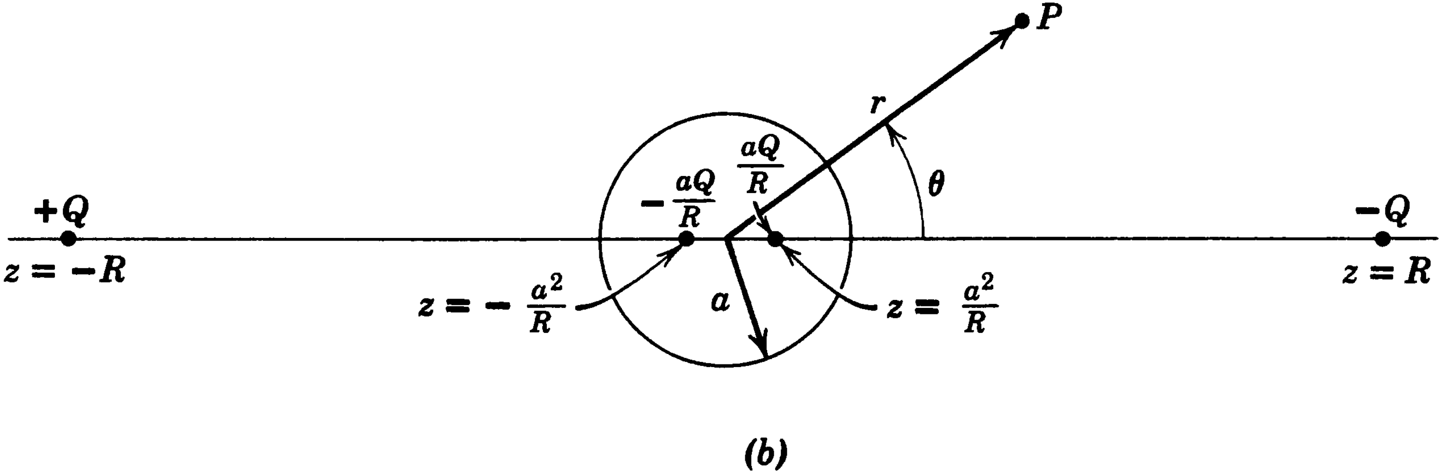


Figure 4.

$$\Phi(x)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|x\hat{x}+R\hat{z}\,|}-\frac{1}{|x\hat{x}-R\hat{z}\,|}+\frac{a/R}{\left|x\hat{x}-\frac{a^2}{R}\hat{z}\right|}-\frac{a/R}{\left|x\hat{x}+\frac{a^2}{R}\hat{z}\right|}\right)\sim$$

$$-E_0\hat{z}\,.x+\frac{Q\,a}{4\pi\varepsilon_0 Rx}\left(1+\frac{a^2}{Rx}\hat{z}\,.\hat{x}-1+\frac{a^2}{Rx}\hat{z}\,.\hat{x}\right)=$$

$$-E_0\hat{z}\,.x+\frac{Q\,a^3\hat{z}\,.\hat{x}}{2\pi\varepsilon_0 R^2\,x^2}=-E_0\hat{z}\,.x+E_0\frac{a^3\hat{z}\,.\hat{x}}{x^2}=$$

$$-E_0\left(r-\frac{a^3}{r^2}\right)\cos\theta \quad , \quad r=x$$

La carga superficial inducida es:$\sigma=-\varepsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial r}|_{r=a}=\varepsilon_0 E_0\left(1+2\left(\frac{a}{r}\right)^3\right)\cos\theta\,|_{r=a}=3\varepsilon_0 E_0\cos\theta$

La función de Green para el volumen exterior a la esfera con condiciones de borde de Dirichlet es(ver transparencia 2):

$$G(\vec{x}\,,\vec{x}\,') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|} - \frac{a}{x'\left|\vec{x} - \frac{a^2}{x'^2}\vec{x}\,'\right|}$$

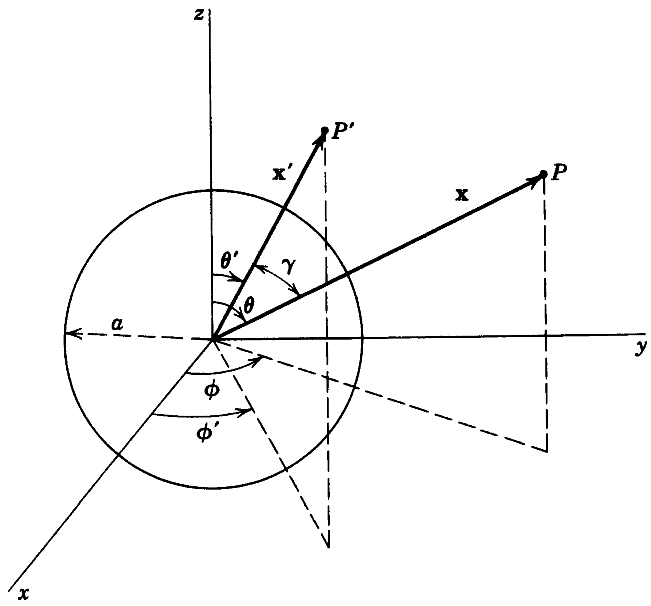


Figure 5.

En coordenadas esféricas es (Ver figura):

$$G(\vec{x}\,,\vec{x}\,') = \frac{1}{\sqrt{x^2 + {x'}^2 - 2x\,x'\cos\gamma}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2 {x'}^2}{a^2} + a^2 - 2x\,x'\cos\gamma}}$$

$$\frac{\partial G\,'}{\partial n'}\Big|_{x'=a} = -\frac{x^2 - a^2}{a(x^2 + a^2 - 2a\,x\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}$$

Notar que para el potencial exterior a la esfera $\hat{n}\,' = -\hat{r}\,'$

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega'\Phi(a,\theta',\phi')\frac{a\,(x^2-a^2)}{(x^2+a^2-2a\,x\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}, \cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos(\phi - \phi')$$

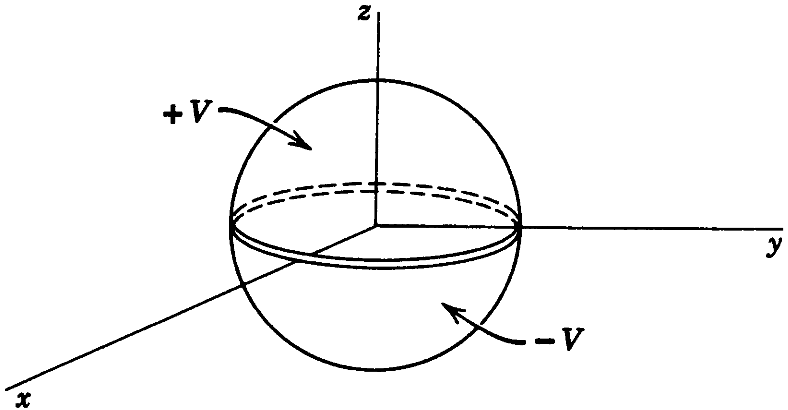


Figure 6.

$$\Phi(x,\theta,\phi)=\frac{V}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi'\left\{\int_0^1 d(\cos\theta')-\int_{-1}^0 d(\cos\theta')\right\}\frac{a\,(x^2-a^2)}{(x^2+a^2-2ax\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}$$

$\theta'\rightarrow\pi-\theta'$ en la segunda integral:

$$\Phi(x,\ \theta,\ \phi)\ =\ \frac{V}{4\pi}a\ \ (x^2\ -\ a^2)\int_0^{2\pi} d\phi'\int_0^1 d(\cos\ \theta')\left\{\frac{1}{(x^2+a^2-2ax\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}\ -\ \frac{1}{(x^2+a^2+2ax\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

El potencial sobre el eje z puede ser evaluado en forma exacta: $\cos\gamma = \cos\theta' = u$

$$\Phi(x,\theta,\phi) = \frac{V}{4\pi} a\,(x^2-a^2)\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^1 du \left\{ \frac{1}{(x^2+a^2-2axu)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(x^2+a^2+2axu)^{\frac{3}{2}}} \right\} =$$

$$\frac{V}{2} a\,(x^2-a^2) \left\{ \frac{-2/(-2ax)}{(x^2+a^2-2axu)^{\frac{1}{2}}} - \frac{-2/(2ax)}{(x^2+a^2+2axu)^{\frac{1}{2}}} \right\}_{u=0}^{u=1} =$$

$$\frac{V}{2x}(x^2-a^2) \left\{ \frac{1}{(x^2+a^2-2ax)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(x^2+a^2+2ax)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} =$$

$$V\left\{ 1 - \frac{(x^2-a^2)}{x(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

- $(f\,,\,g) = \int_a^b dx\, f^\star(x) g(x)$ define un producto interno en el espacio vectorial V de las funciones complejas definidas en (a, b). Demostrarlo.
- Si $(f_i,\, f_j) = 0$, $i \neq j$, $i = 1, 2...$ $\{f_i(x)\}$ es un conjunto de funciones ortogonales. Es ortonormal si $(f_i,\, f_j) = \delta_{i\,j}$
- Si $\{f_i(x)\}$ es una base de V diremos que $\{f_i(x)\}$ es completo.
- Sea $\{f_i(x)\}$ ortonormal y completo, $g(x) = \sum_i g_i f_i(x)$,$g_i = \int_a^b dx' g(x') f_i^\star(x')$
- Reemplazando g_i: $g(x) = \sum_i f_i(x) \int_a^b dx' g(x') f_i^\star(x') = \int_a^b dx' g(x') \sum_i f_i(x) f_i^\star(x')$,

  $\sum_i f_i(x) f_i^\star(x') = \delta(x - x')$, Relación de completitud.

- $\left\{\sqrt{\frac{2}{a}}\text{sen}\left(\frac{2\pi m x}{a}\right), \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right)\right\}$,$m = 1, 2....$($0$ para el cos). Intervalo $\left(-\frac{a}{2}\,\frac{a}{2}\right)$
- $f(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\cos(\frac{2\pi m x}{a}) + B_m\text{sen}\left(\frac{2\pi m x}{a}\right)\right)$
- $A_m = \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2} dx\, f(x)\cos(\frac{2\pi m x}{a})$, $B_m = \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2} dx\, f(x)\text{sen}(\frac{2\pi m x}{a})$
- En más dimensiones, la base es un producto de senos y cosenos dependientes de cada nueva coordenada.

Integral de Fourier

- $U_m(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{i2\pi m x/a}$, $m \varepsilon Z$. Intervalo $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_m A_m e^{i2\pi m x/a}$,$A_m = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-a/2}^{a/2} dx' f(x') e^{-i2\pi m x/a}$
- $a \to \infty$,$\frac{2\pi m}{a} \to k$,$\sum_m \to \int dm = \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk$, $A_m \to \sqrt{\frac{2\pi}{a}} A(k)$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{ikx}$, $A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}$
- Ortogonalidad:$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{i(k-k')x} = \delta(k-k')$
- Completitud:$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{i(x-x')k} = \delta(x-x')$