1 Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones del electromagnetismo hasta antes de Maxwell son:

1. Ley de Gauss:

$$\oint_S d\,\vec{S}.\vec{D} = q_V\,, \qquad \vec{\nabla}\vec{D} = \rho$$

2. Ley de Gauss del Magnetismo:

$$\oint_S d\,\vec{S}.\vec{B} = 0, \qquad \vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

3. Ley de Ampere:

$$\oint_C \vec{H}\,.d\,\vec{x} = I_S \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}$$

4. Ley de Faraday

$$\oint_C \vec{E}\,.d\,\vec{x} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

1.1 Corriente de desplazamiento

Maxwell se dio cuenta que estas ecuaciones son incompatibles con la conservación de la carga eléctrica: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{J} = 0$.

En efecto, use la identidad $\nabla.\left(\nabla \times \vec{A}\right) = 0$(Demuéstrela!) en la ley de Ampére, lo que da: $\vec{\nabla}\vec{J} = 0$. Esto es cierto sólo si ρ no depende del tiempo.

Para generalizar la ley de Ampere, Maxwell propuso agregar a $\vec{J}$ un término llamado corriente de desplazamiento $\vec{J}_D$. Se tiene ahora:

$$\vec{\nabla}\vec{J} + \vec{\nabla}\vec{J}_D = 0 = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{J}_D$$

De la ley de Gauss:

$$\vec{\nabla}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Entonces:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{J}_D - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

1.2 Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell son:

1. Ley de Gauss:

$$\oint_S d\,\vec{S}\,.\vec{D} = q_V\,, \qquad \vec{\nabla}\vec{D} = \rho$$

2. Ley de Gauss del Magnetismo:

$$\oint_S d\,\vec{S}\,.\vec{B} = 0, \qquad \vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

3. Ley de Ampere y corriente de desplazamiento:

$$\oint_C \vec{H}\,.d\,\vec{x} = \mu_0\bigg(I_S + \frac{d\Phi_D}{dt}\bigg) \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)$$

4. Ley de Faraday

$$\oint_C \vec{E}\,.d\,\vec{x} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

2 Potencial vector y potencial escalar

$\vec{\nabla}\vec{B}=0$, $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$, $\vec{A}$ es el potencial vector.

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{\nabla}\times\vec{A}}{\partial t}=\vec{0}=\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\vec{\nabla}\Phi$$

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

Φ: Potencial escalar.

2.1 Transformaciones de gauge

$$\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}\psi$$

$$\vec{\nabla}\Phi'+\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}=\vec{\nabla}\Phi+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\left(\Phi' + \frac{\partial\psi}{\partial t} - \Phi\right) = 0$$

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$(\Phi, \vec{A})$ producen los mismos campos electromagnéticos que $(\Phi', \vec{A}')$
Esta libertad de gauge permite imponer condiciones de gauge sobre los potenciales sin cambiar los campos electromagnéticos.

1. Gauge de Lorentz:$\vec{\nabla}.\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$

2. Gauge de Coulomb:$\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$

2.2 Ecuaciones de onda

Por ahora consideremos las dos ecuaciones de Maxwell inhomogéneas en el vacío:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial\left(-\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)}{\partial t}\right)$$

$$-\nabla^2\vec{A} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = \mu_0\vec{J} \qquad , \frac{1}{c^2} = \mu_0\varepsilon_0$$

$$\vec{\nabla}\left(-\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} =$$

$$-\nabla^2\Phi + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{A}\right)$$

En el gauge de Lorentz se obtiene:

$$-\nabla^2\vec{A} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0\vec{J}$$

$$-\nabla^2\Phi + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

c: es la velocidad de las ondas. Coincide con la velocidad de la luz en el vacío.

3 Función de Green para la ecuación de ondas

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\vec{x}\,, t)$$

Función de Green:

$$\left(\nabla_x^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(x,t;x',t') = -4\pi\delta(x-x')\delta(t-t')$$

En el espacio abierto, se tiene:

$$\psi(x,t) = \int G(x,t;x',t')f(x',t')d^3x'dt'$$

El espacio abierto es invariante bajo traslaciones, $G = G(x-x'.t-t')$.

$$\delta(x-x')\delta(t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k\int d\omega \quad e^{ik(x-x')}e^{-i\omega(t-t')}$$

$$G(x,t;x',t') = \int d^3k\int d\omega g(k,\omega)e^{ik(x-x')}e^{-i\omega(t-t')}$$

$$g(k,\omega) = \frac{1}{4\pi^3}\frac{1}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}$$

Causalidad:

i. $G = 0, t < t'$

ii. G representa ondas salientes para $t > t'$.

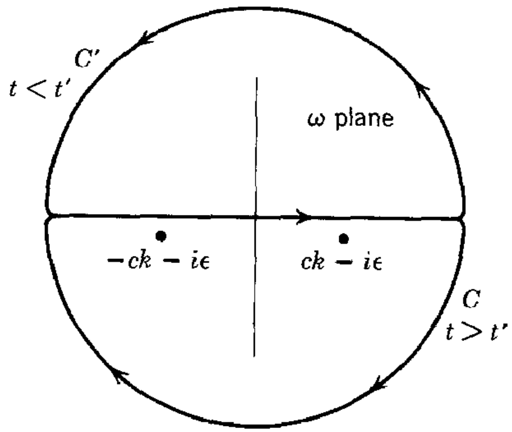

Figura 1.

$$\omega = Re^{i\theta} \qquad , \qquad R \to \infty$$

$$\left| \int d\omega\, g(k,\omega) e^{-i\omega(t-t')} \right| \leqslant R^{-1} \int d\theta \quad e^{R\,\mathrm{sen}\theta(t-t')}$$

$t - t' < 0$, cerramos por arriba.Para imponer i.los polos se mueven bajo el eje $\mathrm{Re}\,\omega$

$t - t' > 0$, cerramos por abajo.

$$\int d\omega\, g(k,\omega) e^{-i\omega(t-t')} = 2\pi i \frac{c^2}{4\pi^3} \left(\frac{e^{-ick(t-t')}}{2kc} - \frac{e^{ick(t-t')}}{2kc} \right) =$$

$$\frac{c^2}{2\pi^2}\frac{\operatorname{sen} ck(t-t')}{ck}$$

$$2\pi\int_0^\infty dk k^2 \int d\theta \operatorname{sen}\theta\left(\frac{c^2}{2\pi^2}\frac{\operatorname{sen} ck(t-t')}{ck}\right)e^{ik\cos\theta r}, r=|x-x'|$$

$$=2\pi\int_0^\infty dk k^2\left(\frac{c^2}{2\pi^2}\frac{\operatorname{sen} ck(t-t')}{ck}\right)\frac{e^{ikr}-e^{-ikr}}{ikr}=$$

$$\frac{2c}{\pi r}\int_0^\infty dk \operatorname{sen} ck(t-t')\operatorname{sen} kr$$

$$-\frac{c}{2r}\{2\delta(c(t-t')+r)-2\delta(c(t-t')-r)\} \quad , c(t-t')+r>0$$

$$=\frac{c}{r}\delta(c(t-t')-r)=\frac{1}{r}\delta\left(t'-t+\frac{r}{c}\right)$$

4 Teorema de Poynting

La potencia gastada por un campo electromagnético en un volumen V es:

$$P=\int d^3x \qquad \vec{J}.\vec{E}=\int d^3x\{(\nabla\times H).E-E.\partial_t D\}$$

$$=\oint_S dS_k\varepsilon_{ikj}H_jE_i+\int d^3x(\nabla\times E).H-\int d^3x E.\partial_t D=$$

$$\oint_S dS_k \varepsilon_{ikj} H_j E_i - \int d^3x \frac{\partial B}{\partial t}.H - \int d^3x\, E.\partial_t D = \qquad \text{Ley de Faraday}$$

$$\oint_S dS_k \varepsilon_{ikj} H_j E_i - \frac{\partial}{\partial t}\int d^3x \left(\frac{1}{2}B.H + \frac{1}{2}E.D\right) \qquad \text{medio lineal, independiente } t.$$

$$\varepsilon_{ikj} B_{j,k} E_i = (\varepsilon_{ikj} B_j E_i)_{,k} - \varepsilon_{ikj} B_j E_{i,k}$$

Densidad de Energía magnética: $u_B = \frac{1}{2}B.H$

Densidad de Energía eléctrica: $u_E = \frac{1}{2}E.D$

La integral de superficie da el flujo de energía a través de S(Vector de Poynting). $S = E \times H$.

$$\partial_t u + \nabla S = -J.E$$

Conservación de la energía.