Teorema del trabajo y la energía:

$$W_{\mathrm{AB}} = \int_{x_A}^{x_B} d\,\vec{x}\,\vec{F} = m\int_{x_A}^{x_B} d\,\vec{x}\ \ \frac{d\,\vec{v}}{dt} = m\int_{v_A}^{v_B} d\,\vec{v}\,\vec{v} = \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2)$$

Consideremos el movimiento de una carga puntual de masa m y carga q en presencia de campo electrostático $\vec{E}$ Se tienen dos manera de calcular el trabajo realizado por el campo eléctrico para mover la carga de A a B a lo largo de una curva C

1. $W_{\mathrm{AB}} = m v_B^2/2 - m v_A^2/2$
2. $W_{\mathrm{AB}} = q\int_C d\,\vec{x}\,\vec{E}$

Potencial Eléctrico

Calculemos el trabajo realizado por el campo eléctrico para llevar una carga de prueba q desde $\vec{x}_1$ hasta $\vec{x}_2$, a lo largo de una curva C:

$$W_C = \int_C d\,\vec{x}\,' q\,\vec{E}(\vec{x}\,')$$

Usando la ley de Coulomb, se obtiene:

$$W_C = qk \int_V d^3\vec{x}\,''\rho(\vec{x}\,'') \int_C d\,\vec{x}\,' \frac{(\vec{x}\,' - \vec{x}\,'')}{\left|\vec{x}' - \vec{x}\,''\right|^3}$$

Pero,

$$\frac{(\vec{x}\,'-\vec{x}\,'')_i}{|\vec{x}'-\vec{x}\,''|^3}=-\frac{\partial}{\partial x_i'}\left(\frac{1}{|\vec{x}'-\vec{x}\,''|}\right),\ \int_C d\,\vec{x}\,'\frac{(\vec{x}\,'-\vec{x}\,'')}{|\vec{x}'-\vec{x}\,''|^3}=\frac{1}{|\vec{x}_1-\vec{x}\,''|}-\frac{1}{|\vec{x}_2-\vec{x}\,''|}$$

Notar el hecho fundamental: La integral no depende de la curva C. Sólo depende de los puntos inciales y finales. En particular si C es una curva cerrada, la integral se anula.

Finalmente se tiene:

$$W=q\Phi(\vec{x}_1)-q\Phi(\vec{x}_2) \qquad \Phi(\vec{x}\,)=k\int_V d\,^3\vec{x}\,''\frac{\rho(\vec{x}\,'')}{|\vec{x}-\vec{x}\,''|}$$

$\Phi(\vec{x}\,)$ es el potencial electrostático debido a la distribución de carga ρ en el punto $\vec{x}$. Dado que lo que se mide es el trabajo W, el potencial electróstático está definido unívocamente salvo una constante aditiva Φ_0.

Usando el Teorema del Trabajo y la Energía se tiene que:$W_{AB}=mv_B^2/2-mv_A^2/2=q\Phi(\vec{x}_A)-q\Phi(\vec{x}_B)$.

$\frac{1}{2}mv_B^2+q\Phi(\vec{x}_B)=\frac{1}{2}mv_A^2+q\Phi(\vec{x}_A)$. La energía mecánica (cinética más potencial) se conserva. $U=q\Phi$ es la energía potencial electrostática.

Rotor de E

Sabemos que la ley de Coulomb implica la existencia del potencial electrostático. Esto es una consecuencia de la ecuación:

$$\oint_C d\,\vec{x}\,.\vec{E} = 0$$

para toda curva cerrada C. Utilicemos el teorema del Rotor

$$\oint_C d\,\vec{x}\vec{E} = \int_S d\,\vec{S}\,.(\vec{\nabla}\times\vec{E}\,) = 0$$

Para toda superficie S cuyo borde es la curva C. Por lo tanto:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}\,(\vec{x}\,) = \vec{0}$$

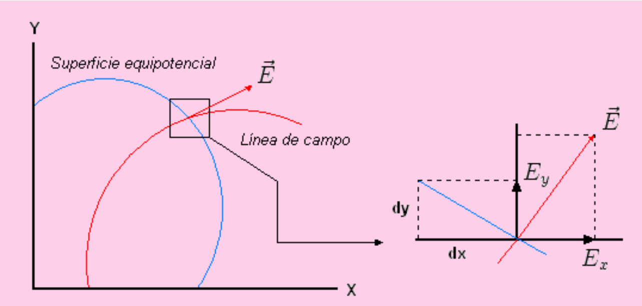
Esta última ecuación es equivalente a la existencia del potencial electrostático. Dice que la fuerza de Coulomb es conservativa. Esta ecuación sólo vale en electrostática y debe ser modificada cuando los campos varían en el tiempo.

Recordando que la energía potencial debida a una fuerza conservativa se define por $W = U(\vec{x}_1) - U(\vec{x}_2)$, obtenemos la energía potencial electrostática:$U = q\Phi$.

Similarmente:

$$\vec{E}_i(\vec{x}) = k\int_V d^3\vec{x}\,'\rho(\vec{x}\,')\frac{(\vec{x}-\vec{x}\,')_i}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|^3} = k\int_V d^3\vec{x}\,'\rho(\vec{x}\,')\left(-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\right)\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi(\vec{x})$$

Superficie equipotencial: $\Phi(\vec{x}) = \Phi_0(\text{constante})$



El potencial electrostático crece en la dirección contraria al campo eléctrico.

El campo eléctrico es perpendicular a una superficie equipotencial

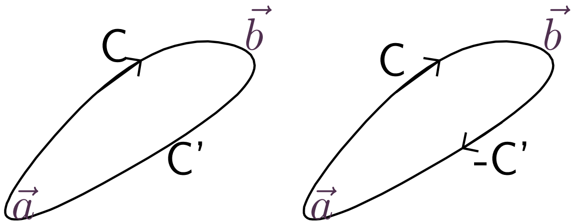
El voltaje se mide en voltios(V), siendo $1V =$

1 J/C

Similarmente, se tiene:

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\,\vec{x}\,.\vec{E}(\vec{x}) = -\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\,\vec{x}\,.\nabla\Phi = -\Phi\big(\vec{b}\,\big) + \Phi(\vec{a}\,)$$

$$\Phi\big(\vec{b}\,\big) - \Phi(\vec{a}\,) = -\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\,\vec{x}\,.\vec{E}(\vec{x})$$



$\int_{C\,\vec{a}}^{\vec{b}} d\,\vec{x}\,.\vec{E}(\vec{x})$ no depende de C. Se tiene:

$$\int_{C\,\vec{a}}^{\vec{b}} d\,\vec{x}\,.\vec{E}(\vec{x}) - \int_{C'\,\vec{a}}^{\vec{b}} d\,\vec{x}\,.\vec{E}(\vec{x}) = \oint_{C-C'} d\,\vec{x}\,.\vec{E}(\vec{x}) = 0$$

Habiendo definido el voltio, tenemos maneras equivalentes de definir las unidades del campo eléctrico. Sabemos que el campo eléctrico se mide en N/C, pero ahora podemos medirlo en V/m, el cual resula más utilizado en la práctica.

En Física atómica resulta introducir una nueva unidad de energía, más apropiada a las dimensiones atómicas.

Un electrón-volt es la energía que gana un electrón al ser acelerado por una diferencia de potencial de un voltio.

Como $e = 1.6 \times 10^{-19} C$ se tiene que:

1 electrón-voltio(eV)=$1.6 \times 10^{-19} J$.

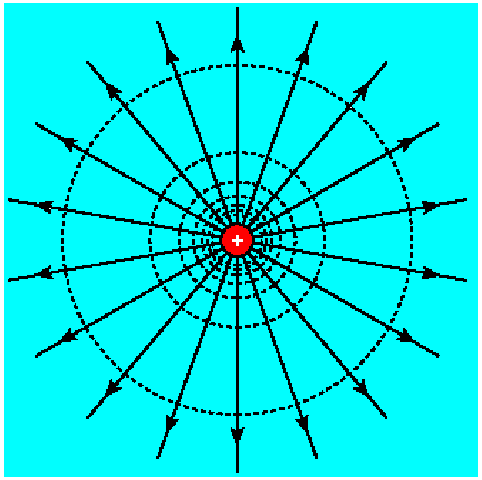
1keV=$10^3\mathrm{eV}$;$1\,\mathrm{MeV} = 10^6\mathrm{eV}$;$1\mathrm{GeV} = 10^9\mathrm{eV}$;$1\mathrm{TeV} = 10^{12}\mathrm{eV}$.

- Potencial debido a una carga puntual Q. Elijamos el origen del sistema coordenado en la posición de la carga. Como el trabajo no depende del camino, tomemos una curva radial entre r_1 y r_2.

$$W = qkQ\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} =$$

$$qkQ\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right), \qquad \Phi(r) = k\frac{Q}{r} + \Phi_0,$$

Eligiendo el potencial en infinito igual a cero, se tiene $\Phi(r) = k\frac{Q}{r}$.



Superficies equipotenciales: r=constante. Son esferas centradas en la carga.

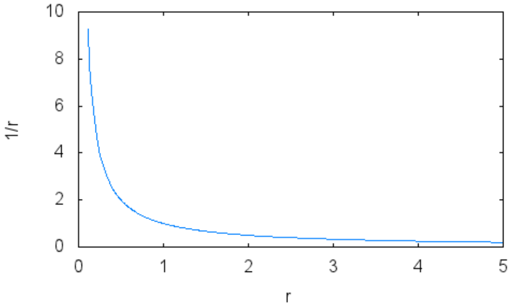


Figura 1. Potencial debido a una carga positiva

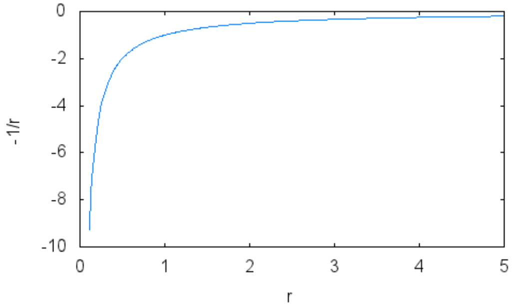


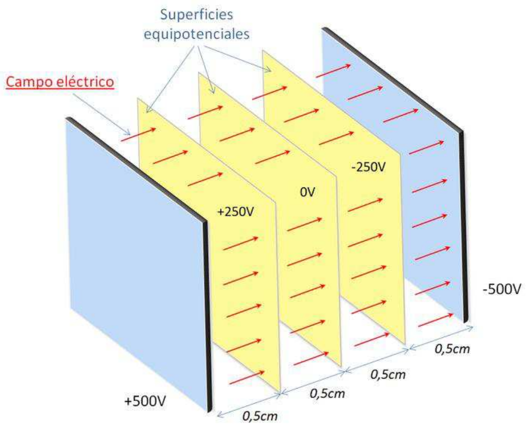
Figura 2. Potencial debido a una carga negativa

- Campo eléctrico constante $\vec{E}_0$. Elegimos un camino en la dirección del campo.

$$W = q\,E_0 \int_{x_1}^{x_2} dx = q\,E_0(x_2 - x_1) \quad \Phi(x) = -E_0 x + \Phi_0$$

Tomando el potencial nulo en el origen se tiene: $\Phi(\vec{x}) = -E_0 x = -\vec{E}_0.\vec{x}$

Superficies equipotenciales $x = \mathrm{constante}$. Son planos perpendiculares al campo eléctrico $\vec{E}_0$.



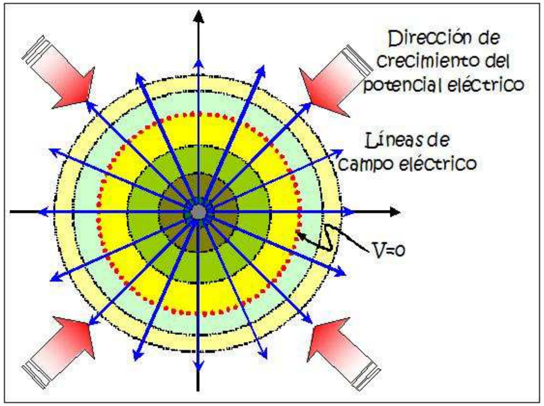
$$\vec{E} = 2k\rho\frac{\hat{r}}{r}$$

r es la distancia radial perpendicular a la línea. Elegimos una trayectoria radial.

$$W = 2k\rho q\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = 2k\rho q(\ln(r_2) - \ln(r_1)) \quad \Phi(r) = -2k\rho\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

Hemos fijado arbitrariamente el potencial a cero en $r = r_0$.

Superficies equipotenciales: r=constante. Son mantos de cilindro centrados en la línea cargada.



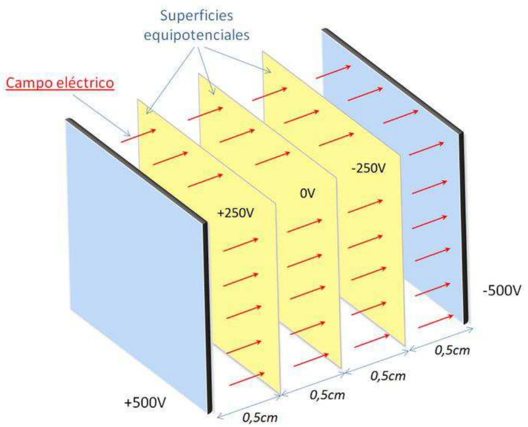
$$\vec{E} = 2\pi k\sigma \mathrm{sgn}(z)\hat{k}$$

Tomemos un camino en la dirección $\hat{k}$, perpendicular al plano cargado.

$$W = 2\pi k\sigma q \int_{z_1}^{z_2} dz\,\mathrm{sgn}(z) = 2\pi k\sigma q \begin{cases} z_2 - z_1,\, z_2 > 0,\, z_1 > 0 \\ z_1 - z_2,\, z_2 < 0,\, z_1 < 0 \end{cases} \quad \Phi(z) = \begin{cases} -2\pi k\sigma z\,,\, z > 0 \\ 2\pi k\sigma z\,,\, z < 0 \end{cases}$$

Escogimos el potencial nulo sobre el plano cargado. $\Phi(z) = -2\pi k\sigma|z|$

Superficies equipotenciales: z=constante. Son planos paralelos al plano cargado.



El potencial del dipolo es debido a las dos cargas que lo componen:

$$\Phi(\vec{x}) = k\frac{Q}{|\vec{x} - l\hat{n}|} - k\frac{Q}{|\vec{x} + l\hat{n}|} \quad , |\vec{x} - l\hat{n}|^{-1} = |\vec{x}|^{-1}\left(1 + l\,\frac{\hat{n}.\vec{x}}{|\vec{x}|^2}\right)$$

$$\Phi(\vec{x}) = k\,\frac{Q}{|\vec{x}|}\left(1 + l\,\frac{\hat{n}.\vec{x}}{|\vec{x}|^2} - 1 + l\,\frac{\hat{n}.\vec{x}}{|\vec{x}|^2}\right) = k2Ql\frac{\hat{n}.\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \qquad = k\frac{\vec{p}.\vec{x}}{|\vec{x}|^3}, l \ll |\vec{x}|$$

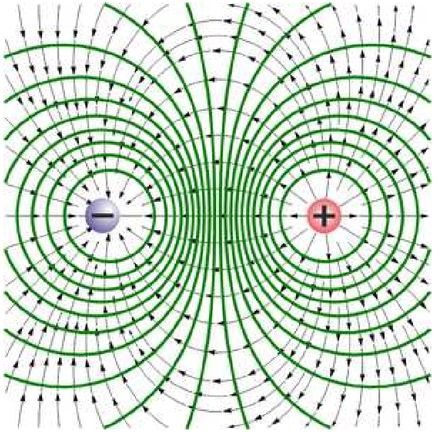
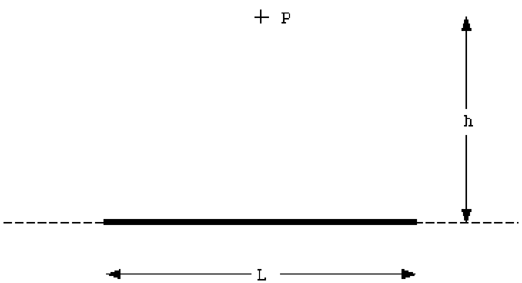


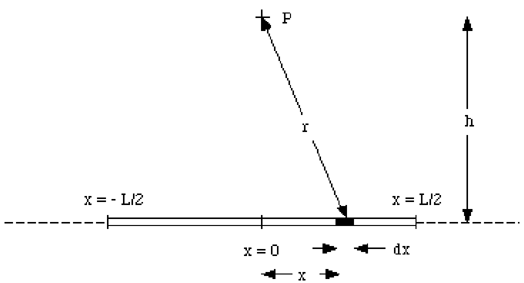
Figura 3. Dipolo. Las lineas equipotenciales están dibujadas en verde

Una línea de longitud L está uniformemente cargada con una carga total Q. Encontrar el potencial electrostático en un punto P, situado a una distancia h del punto medio de la línea.

$$dV = k\,\frac{dQ}{\sqrt{x^2+h^2}}, \qquad dQ = \frac{Q}{L}dx \qquad dV = k\,\frac{Q}{L}\frac{dx}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

$$V = k\,\frac{Q}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+h^2}} = \ k\,\frac{Q}{L}\log\left(\frac{\frac{L}{2}+\sqrt{\frac{L^2}{4}+h^2}}{-\frac{L}{2}+\sqrt{\frac{L^2}{4}+h^2}}\right)$$





Ejercicio 2: Una partícula alfa con energía cinética $1.7x10^{-12}$ J es lanzada ,desde muy lejos , sobre un núcleo de Platino. Encontrar la distancia mínima de aproximación al núcleo. $Q(\mathrm{alfa}) = 2e$,$Q(\mathrm{platino}) = 78e$. Trate las dos partículas como distribuciones esféricas de carga y desprecie el retroceso del núcleo.

Sol: La energía mecánica de la partícula alfa cuando está muy lejos del núcleo de aluminio es puramente cinética:

$$E_i = K_i$$

En el punto de máxima cercanía la energía mecánica de la partícula alfa es puramente potencial:

$$E_f = k\,\frac{Q_\alpha Q_{\mathrm{platino}}}{d}$$

$$E_f = E_i, \;\; d = k\,\frac{Q_\alpha Q_{\mathrm{platino}}}{K_i} = 2.1 \times 10^{-14} m$$

Potencial debido a un disco uniformemente cargado, sobre su eje

- Usando coordenadas polares se tiene:

$$\Phi(z) = k\int_0^a dr \frac{2\pi r\sigma}{\sqrt{r^2+z^2}} = 2\pi k\sigma\left(\sqrt{a^2+z^2} - |z|\right)$$

- $\sigma = \frac{q}{\pi a^2}$

- Energía de dos cargas q_1,q_2 en x_1y x_2=trabajo necesario para traer 2 a su posición actual en contra del campo de q_1(La situación es simétrica)=$q_2\Phi_1(x_2)$.
- Si agrego q_3, además de la energía anterior debo sumar $q_3\,\Phi_{1,2}(x_3)$=trabajo necesario para traer 3 desde infinito a su posición actual en contra del campo debido a 1,2.
- Para N cargas se tiene

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} k\frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}$$

NOTAR el factor 1/2 para no contar doble.

- Para un continuo se tiene que

$$U = \frac{1}{2}\int d^3x\, d^3x' k\frac{\rho(\vec{x}\,)\rho(\vec{x}\,')}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|} \;\; = \frac{1}{2}\int d^3x \rho(\vec{x}\,)\Phi(\vec{x}\,)$$

Recordemos que:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi, \nabla . E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Se tiene:

$$U = \frac{1}{2}\int_V d^3x \rho(\vec{x})\Phi(\vec{x}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V d^3x \nabla . E\Phi = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V d^3x \nabla .(E\Phi) - \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V d^3x E.\nabla\Phi$$

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\oint_S dS.E\Phi + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V d^3x E.E$$

Si V incluye tod el espacio. S es la esfera de radio infinito. El flujo de $E\Phi$ se anula allí:

$$\frac{1}{2}\oint_S dS.E\Phi = \frac{1}{2}4\pi R^2\frac{Q^2}{R^3} = \frac{2\pi Q^2}{R} \to 0, \mathrm{si}\, R \to \infty$$

Podemos decir que la energía se acumula en el campo eléctrico con una densidad:

$$u(\vec{x}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2(\vec{x})$$

De la forma diferencial de la ley de Gauss sabemos que:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

pero $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$. Entonces se obtiene la ecuación de Poisson para el potencial electrostático:

$$\vec{\nabla}^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Si $\rho = 0$ se tiene la ecuación de Laplace.

La ecuación de Poisson permite encontrar el potencial en todo el espacio si se especifican las condiciones de borde. Interesa especificar las condiciones de borde de tal manera que la solución para el campo eléctrico sea única.

Notar que la solución de la ecuación de Poisson es única, si es única la solución de Laplace en el mismo volumen. En efecto, supongamos que tenemos dos soluciones de la ecuación de Poisson:

$$\vec{\nabla}^2\Phi_1 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \vec{\nabla}^2\Phi_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \vec{\nabla}^2(\Phi_1 - \Phi_2) = 0$$

así que la solución de la ecuación de Poisson es la suma de una solución particular más una solución de la ecuación de Laplace. Si las condiciones de borde son tales que la solución de la ecuación de Laplace se anula, la solución de la ecuación de Poisson es única.

Teoremas de Green:

$$\int_V d^3x(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi) = \int_V d^3x\nabla(\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) = \oint_S d\vec{S}(\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi)$$

Si ϕ satisface la ecuación de Laplace en V se tiene:

$$\int_V d^3x\nabla(\phi\nabla\phi) = \int_V d^3x\nabla\phi.\nabla\phi = \oint_S d\vec{S}\phi\nabla\phi$$

Notar que $d\vec{S} = \hat{n}\,dS$, donde $\hat{n}$ es el vector unitario normal a la superficie en el punto.

Las condiciones de borde más utilizadas son:

- Dirichlet. Si se da el valor del potencial en la superficie cerrada S, entonces el potencial en V es único. En efecto, supongamos que hay dos soluciones ϕ_1, ϕ_2 a la ecuación de Laplace en V. Se tiene que $\psi = \phi_1 - \phi_2$ también satisface la ecuación de Laplace en V.

  En S se tiene $\psi_S = \phi_{1S} - \phi_{S2} = 0$, dado que las dos soluciones son iguales en S.

  Apliquemos la segunda fórmula de Green a ψ:

$$\int_V d^3x\nabla\psi.\nabla\psi = \oint_S d\vec{S}\psi\nabla\psi = 0, \nabla\psi = 0, \psi = \text{constante} = 0$$

En lugar de dar el potencial, se especifica $\hat{n}.\vec{\nabla}\phi$ en S. Usando el mimo argumento anterior se encuentra que:

$$\psi = \mathrm{Constante}$$

Por lo tanto, la solución a la ecuación de Laplace en V es única, salvo por una constante aditiva. Esto implica que el campo eléctrico en V,$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ es único.

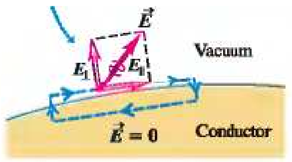


Figura 4.

El campo eléctrico tangente a una superficie conductora es nulo. Para probar este enunciado consideramos la trayectoria azul con el lado más largo L y el más corto l en la fig. 2.

$$0 = \oint_C \vec{E}.d\vec{x} = E_t L \qquad E_t = 0$$

Se obtiene que a lo largo de una curva tangente a la superficie en cada punto, que conecta dos puntos a, b de la superficie conductora:

$$\Phi_a - \Phi_b = -- \int_b^a d\vec{x}.\vec{E}(\vec{x}) = 0$$

Es decir, la superficie de un conductor es equipotencial.

El campo eléctrico es normal a la superficie equipotencial en cada punto.

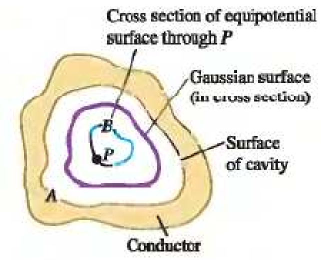


Figura 5.

Consideremos una cavidad al interior de un conductor. La superficie interior del conductor, que contiene el punto A es equipotencial.

Supongamos que el punto P tiene un potencial distinto al potencial de A. En azul dibujamos la superficie equipotencial que contiene a P. Rodeamos la superficie equipotencial que contiene a P con la superficie gaussiana que está en morado. El campo eléctrico se dirige de un punto de alto potencial a un punto de potencial más bajo. Por lo tanto, todas las lineas de campo apuntan de la superficie que contiene a A a la superficie que contiene a P o viceversa.Esto es el flujo del campo eléctrico a través de la superficie morada no es nulo;lo que no puede ser porque no hay cargas al interior de la superficie gaussiana.

El potencial de cualquier punto interior a la cavidad es el mismo que el potencial de A. Por lo tanto el gradiente del potencial se anula. $\vec{E} = \vec{0}$.

Consideremos una superficie cerrada S conductora, que rodea un volumen V.

Sobre S se tiene que $\Phi_S = \Phi_0 = \mathrm{constante}$.

Al interior del volumen V, se satisface la ecuación de Laplace:$\nabla^2\Phi = 0$

Sabemos que la solución a la ecuación de Laplace es única, si damos el valor del potencial sobre la superficie cerrada S(condiciones de Dirichlet). Por lo tanto $\Phi(\vec{x}) = \Phi_0$ en todo el volumen V. Entonces $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\Phi_0 = \vec{0}$.

El campo eléctrico es nulo al interior de una superficie conductora cerrada.

Las moléculas del aire se ionizan a una magnitud de campo eléctrico $E_a = 3 \times 10^6 V/m$(Fortaleza dieléctrica del aire); debido a esto el aire se vuelve conductor.

Hasta qué voltaje podemos cargar una superficie esférica conductora de radio R?

Sabemos que el potencial en tal caso está relacionado con la magnitud del campo eléctrico por:

$$E = k\frac{Q}{R^2} \quad V = k\frac{Q}{R} \quad V = ER$$

Por lo tanto $V_{máx} = E_a R$. Es imposible agregar carga a la esfera, para superar este potencial, porque el aire se vuelve conductor y las cargas escapan de la esfera.

Como ejemplo, para $R = 1\text{cm.}$ se obtiene $V_{máx} = 3 \times 10^6 \times 10^{-2} V = 30000V$.

Se puede aumentar el voltaje máximo construyendo esferas conductoras de mayor radio, como en el generador de Van Der Graaff, que con R=2m llega a $V_{máx} = 6 \times 10^6 V$.

Se puede aumentar aún más los voltajes máximos, sumergiendo todo el aparato en un fluido con E_a mayor como el SF_6(sulfuro hexaflorido).