

Radiación de cargas en movimiento

1 Potenciales de Liénard-Wiechert

Potenciales Retardados:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \int_v \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \dots (4)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \dots (5)$$

Consideremos una carga puntual moviéndose a lo largo de la trayectoria descrita por el radio vector $\mathbf{r}_e(t')$ como se muestra: Para una carga puntual, la localización es una función delta en el tiempo.

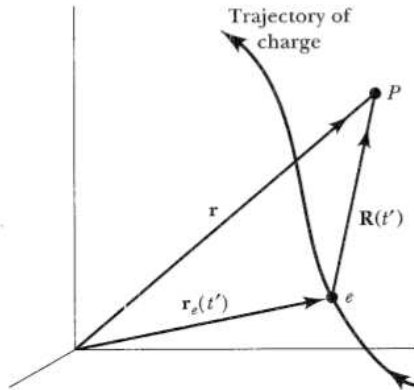


Figura 1. Geometría de una carga en movimiento.

Para una carga puntual que ocupa la posición $\vec{r}_e(t')$ y viaja a una velocidad $\vec{v}_e(t')$ las dos densidades anteriores son:

$$\begin{aligned}\vec{J}(\vec{x}, t) &= e \vec{v}_e(t) \delta(\vec{x} - \vec{r}_e(t)) \\ \rho(\vec{x}, t) &= e \delta(\vec{x} - \vec{r}_e(t))\end{aligned}$$

Podemos escribir el potencial retardado como una integral sobre el tiempo en lugar del volumen:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e|} dt' \dots (6)$$

Definimos una nueva variable t'' igual al argumento de la función delta:

$$t'' = t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|/c \dots (7)$$

Diferenciamos la ecuación y hacemos $d t = 0$ puesto que t es el tiempo fijo de observación, obtenemos entonces

$$d t'' = d t' \left(1 + \frac{1}{c} \frac{d}{d t'} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|\right) \dots (8)$$

La cantidad $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e|$ es solo

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')| = \sqrt{\sum_i (x_i - x_{e,i})^2} \dots (9)$$

donde $x_{e,i} = x_{e,i}(t')$ depende implícitamente de t' y x_i está fijo. Entonces la derivada en (8) es:

$$\frac{1}{c} \frac{d}{d t'} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')| = \frac{1}{c} \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x_{e,i}} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')| \right) \frac{d x_{e,i}}{d t'} = \frac{1}{c} (\nabla_{\mathbf{r}_e} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e|) \frac{d \mathbf{r}_e}{d t'}$$

donde el subíndice r_e indica que el gradiente será tomado respecto de las coordenadas de la carga. El operador gradiente también puede ser expresado como:

$$\nabla_{r_e} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e| = -\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e|^3} = -\frac{\mathbf{R}}{R} \dots (10)$$

La derivada de r_e con respecto a t es justamente la velocidad de la partícula \mathbf{u} .

Definimos

$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{u}/c$ con $\beta < 1$

Por lo que

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(\mathbf{t}')| = -\frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}}{R}$$

$$dt'' = dt' \left(1 + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(\mathbf{t}')|\right) = dt' \left(1 - \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}}{R}\right) \dots (11)$$

ó

$$dt' = \frac{R}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} dt''$$

Con el cambio de variable definido, la ecuación para $\Phi(\mathbf{r}, t)$ se convierte en

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(t'')}{R(t')} \left(\frac{R(t')}{R(t') - \boldsymbol{\beta}(t') \cdot \mathbf{R}} \right) dt'' \dots (12)$$

Es ahora fácil resolver la integral si sabemos que la integral delta sobre todo el espacio vale uno.

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{R(t') - \boldsymbol{\beta}(t') \cdot \mathbf{R}} \Big|_{t''=0} \dots (13)$$

Pero $t'' = 0$ implica $t' = t - \mathbf{R}(t')/c$ el cual es el tiempo retardado. Entonces

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \left[\frac{e}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \right]_{\text{ret}} \dots (14)$$

Siguiendo un procedimiento análogo encontramos el potencial vector:

$$\vec{A}(\mathbf{r}, t) = \left[\frac{e \vec{\beta}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \right]_{\text{ret}} \dots (15)$$

Las ecuaciones (14) y (15) que exhiben explícitamente la dependencia de la velocidad de la partícula en el potencial, son conocidos como los potenciales de Liénard-Wiechert

Campos Retardados

Los campos retardados de Liénard-Wiechert son

$$\mathbf{B} = [n \times E]_{\text{ret}}$$

$$\mathbf{E} = e \left[\frac{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})(1 - \beta^2)}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R^2} \right]_{\text{ret}} + \frac{e}{c} \left[\frac{\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{\alpha})}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R} \right]_{\text{ret}}$$

$$\text{con } \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad \vec{\alpha} = \dot{\vec{\beta}}$$

El campo eléctrico puede ser separado en dos términos. El primero que involucra a la velocidad, pero no a la aceleración de la partícula, el cual se reduce al campo coulombiano para bajas velocidades. Y el segundo término es proporcional a la aceleración de la partícula, es un campo de radiación.

Potencia total radiada:

Carga acelerada no relativista:

$$\vec{E}_a = \frac{e}{c} \left[\frac{\hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}})}{R} \right]_{\text{ret}}$$

$$S = \frac{c}{4\pi} (E \times B) = \frac{c}{4\pi} |E_a|^2 n$$

La potencia total radiada por unidad de ángulo sólido:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} |RE_a|^2 = \frac{e^2}{4\pi c} \left| \hat{n} \times \left(\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}} \right) \right|^2$$

$$\hat{n} \times \left(\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}} \right) = \hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} \hat{n} - \dot{\vec{\beta}},$$

$$\left(\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} \hat{n} - \dot{\vec{\beta}} \right)^2 = - \left(\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} \right)^2 + \left(\dot{\vec{\beta}} \right)^2 = \left(\dot{\vec{\beta}} \right)^2 \text{sen}^2 \Theta$$

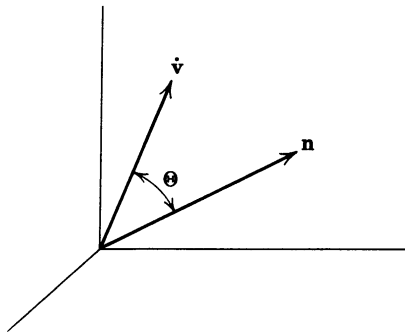


Figura 2.

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \dot{v}^2 \text{sen}^2 \Theta$$

La radiación está polarizada en el plano que contiene $\dot{\vec{v}}$ y \hat{n} : $\hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}}) = \hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} \hat{n} - \dot{\vec{\beta}}$

Para calcular la potencia total radiada, tomamos el eje z en la dirección de la aceleración.

$$P = \frac{e^2}{4\pi c^3} \dot{v}^2 2\pi \int_0^\pi d\Theta \sin^3 \Theta = \quad , x = \cos \Theta$$

$$\frac{e^2}{2c^3} \dot{v}^2 \int_{-1}^1 dx (1 - x^2) = \frac{e^2}{2c^3} \dot{v}^2 \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{v}^2$$

Fórmula de Larmor:

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{v}^2$$

Generalización relativista de la fórmula de Larmor:

$P dt = dE$, P es un invariante de Lorentz

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3 m^2} \frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau},$$

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau} = \left(\frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{d\tau} \right)^2$$

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{\beta} \gamma^4, \quad ,$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 &= m^2 c^2 \left(\dot{\vec{\beta}} \dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{\beta} \gamma^4 + \gamma^2 \dot{\vec{\beta}} \right)^2 = \\ &= m^2 c^2 \left(\beta^2 \left(\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{\beta} \right)^2 \gamma^8 + 2 \left(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}} \right)^2 \gamma^6 + \gamma^4 \left(\dot{\vec{\beta}} \right)^2 \right) \\ &\quad \left(\frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{d\tau} \right)^2 = \\ &= m^2 c^2 \left(\beta^2 \left(\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{\beta} \right)^2 \gamma^8 + 2 \left(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}} \right)^2 \gamma^6 + \gamma^4 \left(\dot{\vec{\beta}} \right)^2 \right) - m^2 c^2 \left(\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{\beta} \right)^2 \gamma^8 = \\ &= m^2 c^2 \left\{ -\gamma^6 \left(\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{\beta} \right)^2 + 2 \left(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}} \right)^2 \gamma^6 + \gamma^4 \left(\dot{\vec{\beta}} \right)^2 \right\} = \\ &= m^2 c^2 \gamma^6 \left\{ \left(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}} \right)^2 + (1 - \beta^2) \left(\dot{\vec{\beta}} \right)^2 \right\} = \\ &= m^2 c^2 \gamma^6 \left[\left(\dot{\vec{\beta}} \right)^2 - \left(\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \right)^2 \right] \\ &= \left(\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \right)^2 = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{iclh} \beta_i \dot{\beta}_j \beta_c \dot{\beta}_l = \end{aligned}$$

2 Distribución angular de la radiación

$$[S \cdot n]_{\text{ret}} = \frac{e^2}{4\pi c} \left\{ \frac{1}{R^2} \left| \frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^3} \right|^2 \right\}_{\text{ret}}$$

La energía radiada en un intervalo de aceleración de $t'\varepsilon(T_1, T_2)$

$$E = \int_{T_1 + \frac{R(T_1)}{c}}^{T_2 + \frac{R(T_2)}{c}} [S.n]_{\text{ret}} dt = \int_{T_1}^{T_2} S.n \frac{dt}{dt'}$$

Definimos la potencia radiada por unidad de ángulo sólido, referida al tiempo de la partícula:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = R^2 S.n \frac{dt}{dt'} = R^2 S.n (1 - \beta.n)$$

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{\left| \hat{n} \times \left[(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right] \right|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^5}$$

Partícula en movimiento lineal:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2 \left| \hat{n} \times \left[\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}} \right] \right|^2}{4\pi c (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^5} =$$

$$\frac{e^2 \dot{\vec{\beta}}^2 \sin^2 \theta}{4\pi c (1 - \beta \cos \theta)^5}$$

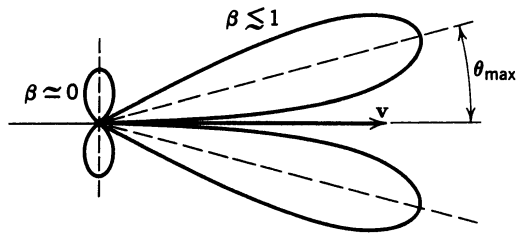


Figura 3.

Para $\beta \rightarrow 1$ la emisión máxima sucede para un ángulo θ con $\cos \theta = x$ que da un máximo para $\frac{1-x^2}{1-\beta x}$,

$$\theta_{\text{máx}} = \arccos \left[\frac{1}{3\beta} \left(\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1 \right) \right] \rightarrow \frac{1}{2\gamma}$$

Carga ultrarelativista:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} \simeq \frac{8 e^2 \dot{v}^2}{\pi c^3} \gamma^8 \frac{(\gamma\theta)^2}{(1 + \gamma^2\theta^2)^5}$$

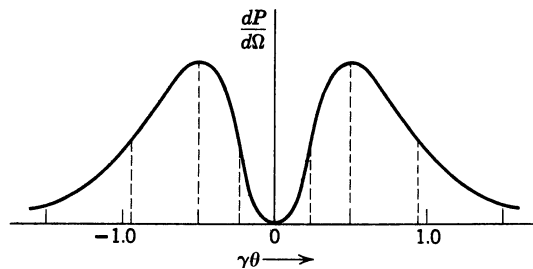


Figura 4.

2.1 Carga en un movimiento circular instantáneo

La velocidad es perpendicular a la aceleración:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{\left| \hat{n} \times \left[(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right] \right|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^5}$$

Velocidad proporcional a \hat{z} , aceleración en \hat{x} .

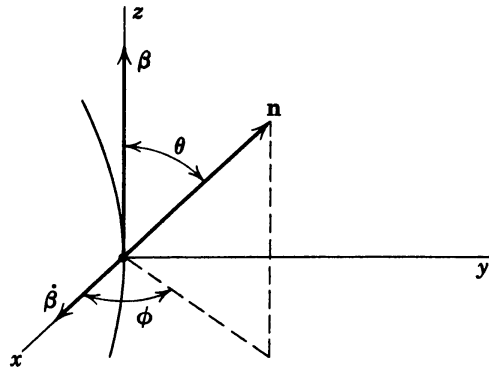


Figura 5.

$$(\vec{B} \times \vec{A})^2 = B^2(A)^2 - (\vec{B} \cdot \vec{A})^2$$

$$\begin{aligned}
\left| \hat{n} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}] \right|^2 &= [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]^2 - [\dot{\vec{\beta}} \cdot ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \hat{n})]^2 = \\
&= (1 - 2\hat{n} \cdot \beta + \beta^2) \dot{\vec{\beta}}^2 - (n \cdot \dot{\vec{\beta}} - \vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 - [\dot{\vec{\beta}} \cdot (\vec{\beta} \times \hat{n})]^2 = \\
&= (1 - 2\beta \cos\theta + \beta^2) \dot{\beta}^2 - \dot{\beta}^2 (\sin\theta \cos\phi)^2 - \dot{\beta}^2 \beta^2 (\sin\theta \sin\phi)^2 = \\
&= \dot{\beta}^2 \{1 - 2\beta \cos\theta + \beta^2 - \sin^2\theta \cos^2\phi - \beta^2 \sin^2\theta \sin^2\phi\} = \\
\dot{\beta}^2 \{1 - 2\beta \cos\theta + \beta^2 - \sin^2\theta \cos^2\phi + \beta^2 \sin^2\theta \cos^2\phi - \beta^2 \sin^2\theta\} &= \\
\dot{\beta}^2 \{(1 - \beta \cos\theta)^2 - \gamma^{-2} \sin^2\theta \cos^2\phi\} &
\end{aligned}$$

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{\dot{v}^2}{(1 - \beta \cos\theta)^3} \left\{ 1 - \frac{\gamma^{-2} \sin^2\theta \cos^2\phi}{(1 - \beta \cos\theta)^2} \right\}$$

Límite relativista $\gamma \gg 1$:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} \simeq \frac{2e^2}{\pi c^3} \gamma^6 \frac{\dot{v}^2}{(1 + (\gamma\theta)^2)^3} \left\{ 1 - \frac{4\gamma^2 \theta^2 \cos^2\phi}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^2} \right\}$$

Ejercicio 1. Demuestre la última ecuación.

3 Distribución en frecuencias de la radiación

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = |\vec{A}(t)|^2,$$

$$\vec{A}(t) = \left(\frac{c}{4\pi}\right)^{1/2} [R \vec{E}]_{\text{ret}}$$

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} dt |\vec{A}(t)|^2$$

$$\vec{A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \vec{A}(t) e^{i\omega t},$$

$$\vec{A}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \vec{A}(\omega) e^{-i\omega t}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{d\Omega} &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \vec{A}(\omega) e^{-i\omega t} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \vec{A}^*(\omega') e^{i\omega' t} = \\
& \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \vec{A}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \vec{A}^*(\omega') & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega' - \omega)t} = \\
& \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |\vec{A}(\omega)|^2 = \int_0^{\infty} d\omega \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \quad , \\
\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} &= |\vec{A}(\omega)|^2 + |\vec{A}(-\omega)|^2 = 2|\vec{A}(\omega)|^2, \quad \text{si } \vec{A}(t) \text{ es real}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\omega) &= \left(\frac{e^2}{8\pi^2 c} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \left[\frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^3} \right]_{\text{ret}} = \\
& \left(\frac{e^2}{8\pi^2 c} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega(t' + R(t')/c)} \frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^2},
\end{aligned}$$

Punto de observación lejano: \hat{n} independiente del tiempo

$$R(t') = x - \hat{n} \cdot \vec{r}(t') \quad ,$$

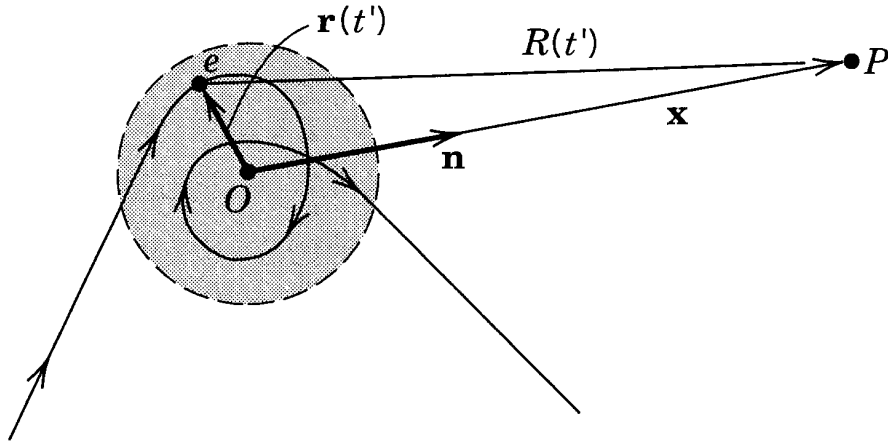


Figura 6.

Salvo por la fase $e^{i\omega x}$

$$\vec{A}(\omega) = \left(\frac{e^2}{8\pi^2 c} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega(t - \hat{n} \cdot \vec{r}(t)/c)} \frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^2}$$

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega(t - \hat{n} \cdot \vec{r}(t)/c)} \frac{\hat{n} \times \left[(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^2} \right|^2$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} = \hat{n} \times \left[(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right] &= \hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} (\hat{n} - \vec{\beta}) - (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}) \dot{\vec{\beta}} \\ &\quad \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta}) = \vec{\beta} \cdot \hat{n} \hat{n} - \vec{\beta} \\ (\dot{\vec{\beta}} \cdot \hat{n} \hat{n} - \dot{\vec{\beta}}) (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}) &+ (\vec{\beta} \cdot \hat{n} \hat{n} - \vec{\beta}) \hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} = \\ -(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}) \dot{\vec{\beta}} &+ \hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} (\hat{n} - \vec{\beta} \cdot \hat{n} \hat{n} + \vec{\beta} \cdot \hat{n} \hat{n} - \vec{\beta}) = \\ -(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}) \dot{\vec{\beta}} &+ \hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} (\hat{n} - \vec{\beta}) \end{aligned}$$

$$\frac{\hat{n} \times \left[(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta})}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})} \right)$$

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega(t - \hat{n} \cdot \vec{r}(t)/c)} \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta}) \right|^2$$

4 Scattering Thomson

Radiación emitida con polarización $\vec{\varepsilon}$:

La polarización de la onda (dirección de \vec{E}) es $\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} \hat{n} - \dot{\vec{\beta}}$ Su proyección sobre $\vec{\varepsilon}$ es $\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} \hat{n} \cdot \vec{\varepsilon} - \dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{\varepsilon} = -\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{\varepsilon}$, dado que $\hat{n} \cdot \vec{\varepsilon} = 0$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} |\vec{\varepsilon}^* \cdot \dot{\vec{v}}|^2$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \hat{\varepsilon}_0 E_0 e^{i(\vec{k}_0 \vec{x} - \omega t)}$$

$$\dot{\vec{v}} = \hat{\varepsilon}_0 \frac{e E_0}{m} e^{i(\vec{k}_0 \vec{x} - \omega t)}$$

Si la carga se desplaza en un ciclo una fracción despreciable de longitud de onda, se tiene $\langle \dot{\vec{v}}^2 \rangle = \frac{1}{2} \dot{\vec{v}}^* \dot{\vec{v}}$. Entonces,

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^4 |E_0|^2}{8\pi m^2 c^3} |\vec{\varepsilon}^* \cdot \hat{\varepsilon}_0|^2 = \frac{c}{8\pi} |E_0|^2 \left(\frac{e^2}{m c^2} \right)^2 |\vec{\varepsilon}^* \cdot \hat{\varepsilon}_0|^2$$

Sección eficaz diferencial:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{energía radiada/unidad de tiempo/unidad de ángulo sólido}}{\text{flujo de energía incidente /unidad de área/unidad de tiempo}}$$

Flujo de energía incidente: $\langle \vec{S} \cdot \hat{n} \rangle = \frac{c}{8\pi} |E_0|^2$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |\vec{\epsilon}^* \cdot \hat{\epsilon}_0|^2$$

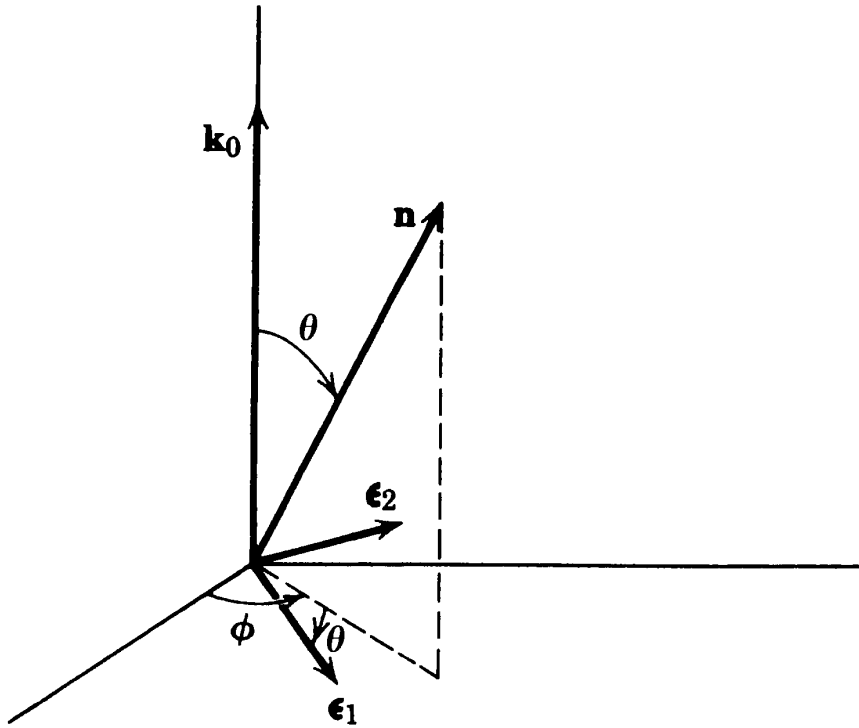


Figura 7.

$$\hat{\epsilon}_1 = \cos \theta (\hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi) - \hat{z} \sin \theta$$

$$\hat{\varepsilon}_2 = -\hat{x} \sin \phi + \hat{y} \cos \phi$$

$$\hat{n} = \sin \theta (\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}) + \cos \theta \hat{z}$$

Radiación incidente no polarizada, suma sobre las polarizaciones finales:

$$|\vec{\varepsilon}^* \cdot \hat{\varepsilon}_0|^2 \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_\alpha^{(i)} \varepsilon_{0\alpha}^{(j)} \varepsilon_\beta^{(i)} \varepsilon_{0\beta}^{(j)}$$

$$\sum_i \varepsilon_{0\alpha}^{(i)} \varepsilon_{0\beta}^{(i)} = A \delta_{\alpha\beta} + B k_{0\alpha} k_{0\beta}, \quad k_0 \cdot \varepsilon_0 = 0, \quad A = -B k_0^2$$

$$2 = 3A + B k_0^2, \quad A = 1 \quad B = -\frac{1}{k_0^2}$$

$$\sum_i \varepsilon_{0\alpha}^{(i)} \varepsilon_{0\beta}^{(i)} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{0\alpha} k_{0\beta}}{k_0^2}$$

Finalmente:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_{\alpha}^{(i)} \varepsilon_{0\alpha}^{(j)} \varepsilon_{\beta}^{(i)} \varepsilon_{0\beta} = \frac{1}{2} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{0\alpha} k_{0\beta}}{k_0^2} \right) (\delta_{\alpha\beta} - n_{\alpha} n_{\beta}) =$$
$$\frac{1}{2} (1 + n_3^2) = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta)$$

Fórmula de Thomson

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta)$$

Ejercicio 2. Mostrar que $\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2$, llamada sección eficaz de Thomson.

$\frac{e^2}{mc^2} = 2.82 \times 10^{-13} \text{cm}$ es el **radio clásico del electrón**.

La fórmula de Thomson vale sólo a bajas frecuencias de la luz incidente.

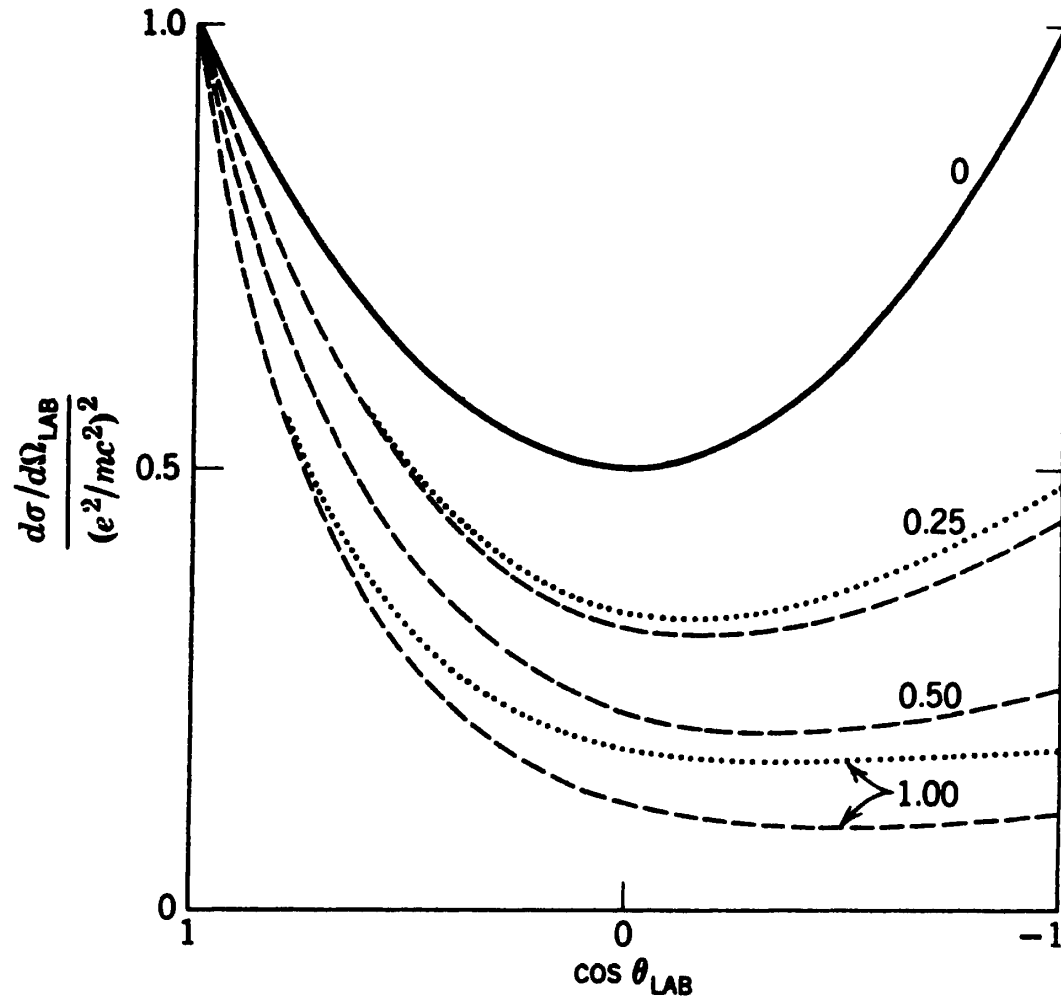


Figura 8. Línea sólida es el resultado clásico. Línea punteada es el cálculo mecánico-cuántico para espín 1/2(Fórmula de Klein-Nishina). La línea con guiones es el resultado mecánico cuántico para espín cero.

5 Radiación de Cerenkov