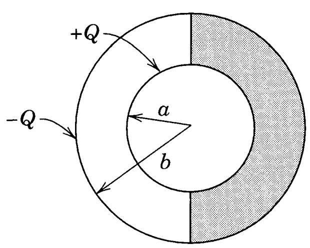
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
Facultad de Física

Electrodinámica
Prof. Jorge Alfaro S.
I1 Viernes 16 de Octubre de 2015

Problema 1.

Dos esferas conductoras concéntricas de radio interior a y radio exterior b, tienen cargas $\pm Q$ respectivamente. El espacio vacío entre las esferas está semilleno por una media esfera de material dieléctrico $K = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ constante, como se muestra en la figura.



a) Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio.

b) Encuentre la densidad de carga superficial de la esfera interior.

c) Calcule la densidad de carga de polarización inducida en la superficie del dieléctrico en $r = a$.

d) Cuál es la capacidad de este condensador?

Sol: Dado que las esferas son conductoras, son superficies equipotenciales. Sean V_a, V_b los potenciales respectivos.

a) $r < a$, $E = 0$. La única solución a la ecuación de Laplace es $\Phi = V_a$.
$E = -\nabla\Phi$.
$a < r < b$.Simetría azimutal.

$$\vec{\nabla}\vec{D} = 0, \ \ \vec{\nabla}\varepsilon\vec{E} = 0$$

Separamos esta región en la zona izquierda y la zona derecha de la esfera.
$\Phi_I(r,\theta) = \sum_l \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\theta)$

$$\sum_l \left(A_l a^l + B_l a^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\theta) = V_a$$

$$\sum_l \left(A_l b^l + B_l b^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\theta) = V_b$$

$$A_0 + B_0 a^{-1} = V_a, A_0 + B_0 b^{-1} = V_b, \ \ A_l a^l + B_l a^{-(l+1)} = 0, \ \ A_l b^l + B_l b^{-(l+1)} = 0, l = 1....$$

$$B_0 = \frac{V_b - V_a}{b^{-1} - a^{-1}}, \quad A_0 = V_a - \frac{V_b - V_a}{a b^{-1} - 1} \quad , A_l = B_l = 0, l = 1, 2...$$

$$\Phi_I(r,\theta) = A_0 + B_0 r^{-1} \qquad E_r = B_0 r^{-2}, \qquad a < r < b$$

$\Phi_R(r,\theta) = \sum_l \left(\tilde{A}_l r^l + \tilde{B}_l r^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\theta)$

$$\sum_l \left(\tilde{A}_l a^l + \tilde{B}_l a^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\theta) = V_a$$
$$\sum_l \left(\tilde{A}_l b^l + \tilde{B}_l b^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\theta) = V_b$$
$$\tilde{A}_0 + \tilde{B}_0 a^{-1} = V_a, \tilde{A}_0 + \tilde{B}_0 b^{-1} = V_b, \quad \tilde{A}_l a^l + \tilde{B}_l a^{-(l+1)} = 0, \quad \tilde{A}_l b^l + \tilde{B}_l b^{-(l+1)} = 0, l = 1....$$
$$\tilde{B}_0 = \frac{V_b - V_a}{b^{-1} - a^{-1}}, \quad \tilde{A}_0 = V_a - \frac{V_b - V_a}{ab^{-1} - 1} \quad , \tilde{A}_l = \tilde{B}_l = 0, l = 1, 2...$$
$$\Phi_R(r,\theta) = A_0 + B_0 r^{-1} \qquad \tilde{E}_r = B_0 r^{-2}, \qquad a < r < b$$

Condiciones de borde en $\theta = \pi/2$:

i. Componente tangencial de $\vec{E}$ continua:$E_r = \tilde{E}_r$. Se satisface.

ii. $\vec{D}_I = \varepsilon_0 B_0 r^{-2}\hat{r}$,$\vec{D}_D = \varepsilon B_0 r^{-2}\hat{r}$

$r > b$,$\Phi(r,\theta) = \sum_l \left(\bar{A}_l r^l + \bar{B}_l r^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\theta)$, $\bar{A}_l = 0, l = 0, 1, ...$,$\Phi(\infty,\theta) = 0$

$$\sum_l \left(\bar{A}_l b^l + \bar{B}_l b^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\theta) = V_b$$
$$\bar{B}_0 b^{-1} = V_b \quad \bar{B}_l = 0, l = 1....$$
$$\Phi(r,\theta) = bV_b r^{-1} \quad E_r = bV_b r^{-2}$$

La ley de Gauss aplicada a una superficie esférica fuera de la esfera, nos da campo eléctrico nulo dado que las cargas libres al interior del volumen son $Q - Q = 0$. Si postulamos que el potencial se anula en∞, $V_b = 0$.

b) $D_a.\hat{r} = \sigma_a$.

$$\varepsilon_0 K(\theta) B_0 a^{-2} = \sigma_a(\theta), \qquad K(\theta) = \frac{\varepsilon(\theta)}{\varepsilon_0}, \qquad \varepsilon(\theta) = \begin{cases} \varepsilon, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ \varepsilon_0, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases}$$
$$Q = \int_0^\pi d\theta \operatorname{sen}\theta 2\pi K(\theta)\varepsilon_0 B_0 =$$
$$2\pi B_0 K\varepsilon_0 \int_0^{\pi/2} d\theta \operatorname{sen}\theta + 2\pi B_0 \varepsilon_0 \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \operatorname{sen}\theta = \quad 2\pi B_0 (K+1)\varepsilon_0 = Q, \quad B_0 = \frac{Q}{2\pi\,(\varepsilon + \varepsilon_0)}$$

c)

$$\sigma_{\text{pol}} = -(P_2 - P_1) n_{21}, D = \varepsilon_0 E + P$$
$$P = (\varepsilon - \varepsilon_0) E$$
$$\sigma_{\text{pol}} = -(\varepsilon(\theta) - \varepsilon_0) B_0 a^{-2}$$

d) $C = \frac{Q}{|V_a - V_b|}$

$$B_0 = \frac{Q}{2\pi(\,\varepsilon + \varepsilon_0)} = \frac{V_b - V_a}{b^{-1} - a^{-1}}, \quad C = \frac{2\pi(\varepsilon + \varepsilon_0)}{a^{-1} - b^{-1}}$$

Problema 2. Una esfera conductora cargada con carga Q se encuentra en presencia de un plano conductor infinito conectado a tierra. Use el método de imágenes para encontrar:

a) El potencial fuera de la esfera

b) El campo eléctrico fuera de la esfera

c) La densidad de carga inducida sobre el plano

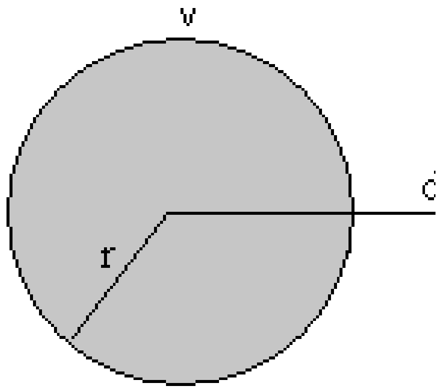


Figura 1.

Sol:

1. Carga q_0 situada en el centro de la esfera. La superficie esférica es equipotencial $V = k\frac{q_0}{r}$,$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$
2. Para tener potencial 0 en el plano, ponemos una carga imagen $-q_0$ en $z = -d$
3. Potencial V en la esfera, agregar carga imagen al interior de la esfera:$q_1 = \frac{q_0\, r}{2d}$,$d_1 = d - \frac{r^2}{2d}$
4. Potencial 0 en el plano, agregar carga imagen $-q_1$ en $z = -d_1$
5. Carga imagen al interior de la esfera: $q_2 = \frac{q_1\, r}{(d_1 + d)}$,$d_2 = d - \frac{r^2}{(d_1 + d)}$
6. $q_{i+1} = \frac{q_i\, r}{(d_i + d)}$,$d_{i+1} = d - \frac{r^2}{(d_i + d)}$, $d_0 = d$, $-q_i$ en $z = -d_i$.

$$\Phi(x, y, z) = k\sum_{i=0}^{\infty} q_i\left\{\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d_i)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d_i)^2}}\right\}$$

$$\vec{E} = -\nabla\Phi$$

$$\sigma(x, y) = \frac{1}{4\pi}\sum_{i=0}^{\infty} q_i\left\{\frac{-d_i}{(x^2 + y^2 + d_i^2)^{3/2}} - \frac{d_i}{(x^2 + y^2 + d_i^2)^{3/2}}\right\} =$$

$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{q_i\, d_i}{(x^2 + y^2 + d_i^2)^{3/2}}$$

Problema 3. Un cilindro muy largo, hueco, de sección transversal circular, está hecho de hierro de permeabilidad μ. El cilindro se sitúa en presencia de un campo magnético $\overrightarrow{B_0}$, inicialmente uniforme, perpendicular al eje del cilindro. Suponga que B_0 es pequeño, de tal manera que no satura el hierro y que μ es constante. El cilindro tiene radio exterior a y radio interior b.

Encuentre $\vec{B}$ al interior del cilindro.

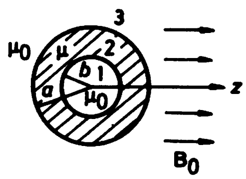


Figura 2.

Sol: Como no hay corrientes libres $\nabla \times H = 0, H = -\nabla\Phi$. μ constante $,\nabla H = 0$, $\nabla^2\Phi = 0$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

Dado que el cilindro es muy largo(infinito), Φ no depende de z.

Separación de variables:

$$\Phi = A(r)B(\theta)$$

$$A^{-1}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 B}{\partial\theta^2}B^{-1} = 0$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial\theta^2}B^{-1} = -m^2, \quad B = e^{\pm im\theta} \quad \text{Univaluado implica}\, m\varepsilon Z$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right) - \frac{m^2}{r^2}A = 0 \qquad A = r^a \qquad a^2 - m^2 = 0, a = \pm m, m \neq 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right) = 0, m = 0 \qquad rA' = c, \qquad A = c\ln r + d$$

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{m=0} (c_m r^m + d_m r^{-m})(e_m \cos m\theta + f_m \mathrm{sen}\, m\theta)$$

Medimos θ respecto al eje x que apunta en la dirección de B_0. La geometría es invariante si la reflejo en el eje x.Por lo tanto $\Phi(r,-\theta) = \Phi(r,\theta)$. Esto es $f_m = 0$.

$\Phi(r,\theta) = \sum_{m=0} (c_m r^m + d_m r^{-m})\cos m\theta$

Consideremos las tres zonas de la fig. 2

$\Phi_3(r,\theta) = \sum_{m=0} d_{3m} r^{-m}\cos m\theta - \frac{B_0}{\mu_0} r\cos\theta$, no hay componente ln en $r = \infty$

$\Phi_2(r,\theta) = \sum_{m=0} (c_{2m} r^m + d_{2m} r^{-m})\cos m\theta + f\ln r$

$\Phi_1(r,\theta) = \sum_{m=0} c_{1m} r^m \cos m\theta$, no hay singularidad en $r = 0$.

Condiciones de Borde:$\partial_\theta\Phi$ continua

$$-\sum_{m=1} d_{3m} a^{-m} m\,\mathrm{sen}\, m\theta + \frac{B_0}{\mu_0} a\,\mathrm{sen}\,\theta = -\sum_{m=1} (c_{2m}a^m + d_{2m}a^{-m}) m\,\mathrm{sen}\, m\theta$$

$$d_{3m}a^{-m} = c_{2m}a^m + d_{2m}a^{-m} \quad m = 2, ...$$

$$d_{31}a^{-1} - \frac{B_0}{\mu_0}a = c_{21}a + d_{21}a^{-1}$$

$$-\sum_{m=1} (c_{2m}b^m + d_{2m}b^{-m}) m\,\mathrm{sen}\, m\theta = -\sum_{m=1} c_{1m} b^m\, m\,\mathrm{sen}\, m\theta$$

$$c_{2m}b^m + d_{2m}b^{-m} = c_{1m}b^m \quad m = 1, 2....$$

Componente normal de B continua:

$$\mu_0\left(\sum_{m=1} d_{3m}a^{-m-1}(-m)\ \cos\ m\theta\ -\ \frac{B_0}{\mu_0}\ \cos\ \theta\right)\ =\ \mu\left(\sum_{m=1}\ (c_{2m}a^{m-1}m\ +\ d_{2m}a^{-m-1}(-m))\cos m\theta + fa^{-1}\right)$$

$$\mu_0 d_{3m}a^{-m-1} = \mu(d_{2m}a^{-m-1} - c_{2m}a^{m-1}) \quad m = 2, ...$$

$$\mu_0 d_{31}a^{-2} + \frac{B_0}{\mu_0} = \mu(d_{21}a^{-2} - c_{21}), \qquad f = 0$$

$$\mu\sum_{m=1} (c_{2m}b^{m-1}m + d_{2m}b^{-m-1}(-m))\cos m\theta = \mu_0\sum_{m=1} c_{1m}b^{m-1}m\cos m\theta$$

$$\mu(c_{2m}b^{m-1} - d_{2m}b^{-m-1}) = \mu_0 c_{1m}b^{m-1} \quad m = 1, ...$$

Los coeficientes con $m = 2, ...$ el determinante del sistema no es cero . Todos estos coeficientes se anulan. Quedan:

$$d_{31}a^{-1} - \frac{B_0}{\mu_0}a = c_{21}a + d_{21}a^{-1} \quad , \quad d_{31} = \frac{B_0}{\mu_0}a^2 + c_{21}a^2 + d_{21}$$

$$c_{21}b + d_{21}b^{-1} = c_{11}b \quad , \quad c_{11} = c_{21} + d_{21}b^{-2}$$

$$\mu_0 d_{31}a^{-2} + \frac{B_0}{\mu_0} = \mu(d_{21}a^{-2} - c_{21})$$

$$\mu(c_{21} - d_{21}b^{-2}) = \mu_0 c_{11}$$

$$\mu(c_{21} - d_{21}b^{-2}) = \mu_0(c_{21} + d_{21}b^{-2}) \qquad , \qquad c_{21} = \frac{\mu + \mu_0}{\mu - \mu_0}b^{-2}d_{21}$$

$$\mu_0\left(\frac{B_0}{\mu_0}a^2 + c_{21}a^2 + d_{21}\right)a^{-2} + \frac{B_0}{\mu_0} = \mu(d_{21}a^{-2} - c_{21})$$

$$2\frac{B_0}{\mu_0} + \mu_0 c_{21} + \mu_0 d_{21}a^{-2} = \mu(d_{21}a^{-2} - c_{21})$$

$$2\frac{B_0}{\mu_0} + \frac{(\mu + \mu_0)^2}{\mu - \mu_0}b^{-2}d_{21} + \mu_0 d_{21}a^{-2} = \mu d_{21}a^{-2}$$

$$d_{21} = 2\frac{B_0}{\mu_0}\frac{1}{\mu a^{-2} - \frac{(\mu+\mu_0)^2}{\mu-\mu_0}b^{-2} - \mu_0 a^{-2}}$$

$$c_{21} = \frac{\mu + \mu_0}{\mu - \mu_0}b^{-2}2\frac{B_0}{\mu_0}\frac{1}{\mu a^{-2} - \frac{(\mu+\mu_0)^2}{\mu-\mu_0}b^{-2} - \mu_0 a^{-2}}$$

$$c_{11} = \left(\frac{\mu + \mu_0}{\mu - \mu_0}b^{-2} + b^{-2}\right)2\frac{B_0}{\mu_0}\frac{1}{\mu a^{-2} - \frac{(\mu+\mu_0)^2}{\mu-\mu_0}b^{-2} - \mu_0 a^{-2}} \xrightarrow[\mu\to\infty]{} 4\frac{B_0}{\mu_0\mu}\frac{a^2}{b^2 - a^2}$$

$$\vec{H}_1 = -c_{11}\hat{x},$$

$$\vec{B}_1 = 4\frac{B_0}{\mu}\frac{a^2}{a^2 - b^2}\hat{x}$$

$$c_{11} = 4\frac{B_0\mu}{\mu_0}\frac{a^2}{(\mu - \mu_0)^2b^2 - (\mu + \mu_0)^2a^2}$$

Problema 4. Un cilindro muy largo aislante de constante dieléctrica ε, de largo L y radio R, $L \gg R$, tiene una carga Q uniformemente distribuida sobre su superficie exterior. El cilindro rota en torno a su eje con velocidad angular ω.

a) Encuentre el campo magnético al interior del cilindro(magnitud y dirección).

b) Una espira de radio $2R$ y resistencia ρ se enrolla alrededor del cilindro como en la Fig 3. La velocidad de rotación disminuye como $\omega(t) = \omega_0\left(1 - \frac{t}{t_0}\right)$. Encontrar la corriente inducida sobre la espira, en magnitud y dirección.

c) En lugar de la espira de la parte b), se pasa una espira a través del cilindro como en la Fig4. La velocidad de rotación disminuye como en b). Encontrar la corriente inducida sobre la nueva espira.

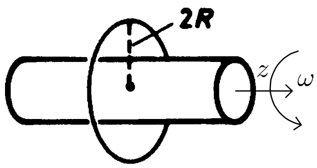


Figura 3.

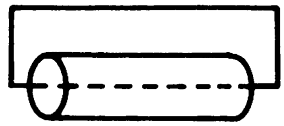


Figura 4.

Sol: Como el cilindro es muy largo(infinito), el campo magnético no depende de z. De hecho es constante, apuntando en la dirección de z.Fuera del cilindro, el campo magnético se anula.Para encontrarlo usamos la ley de Ampére aplicada a la trayectoria de la Fig. 4:

a)

$$BL = \mu_0 I, \;\; I = \frac{Q}{2\pi RL} LR\dot{\theta} = \frac{Q\omega}{2\pi}, \;\; \vec{B} = \frac{\mu_0 Q\omega}{2\pi L}\hat{z}$$

b)flujo magnético:$\Phi_B = \pi R^2 B$, $E4\pi R = -\pi R^2 \dot{B} = \pi R^2 \frac{\mu_0 Q}{2\pi L}\frac{\omega_0}{t_0}$,

$$V = \pi R^2 \frac{\mu_0 Q}{2\pi L}\frac{\omega_0}{t_0} = i\rho, \;\; i = \frac{\mu_0 Q R^2}{2L\rho}\frac{\omega_0}{t_0}$$

Por la ley de Lenz, la corriente gira en el sentido contrario a la manillas del reloj, mirando desde el eje z(dirección de giro).

c) $i = 0$. No hay flujo magnético a través de la espira.

Algunas fórmulas útiles

Laplaciano en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

Tiempo: 3:30 horas