PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
Facultad de Física

Electrodinámica
Prof. Jorge Alfaro S.
I2 Viernes 13 de Noviembre de 2015

Problema 1.

Un electrón rápido, entra en un condensador haciendo un ángulo α como se muestra en la fig. 1. V es el voltaje entre las placas del condensador y d es la distance entre las placas.

Derive una ecuación para la trayectoria del elecrón en el condensador.

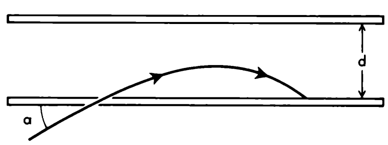


Figura 1.

R:Conservación de la energía:

$$mc^2\gamma + eEy = mc^2\gamma(v_0)$$
$$\gamma = \gamma(v_0) - \frac{eEy}{mc^2}$$
$$c\sqrt{p_x^2+p_y^2+m^2c^2} + eEy = c\sqrt{p_{0x}^2+p_{0y}^2+m^2c^2} = cA$$
$$\text{El lagrangiano no depende de } x \rightarrow \quad p_x = p_{0x}$$
$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{m\gamma v_y}{m\gamma v_x} = \frac{dy}{dx}$$
$$p_x^2+p_y^2+m^2c^2 = \left(A - \frac{eEy}{c}\right)^2$$
$$p_y = \sqrt{\left(A-\frac{eEy}{c}\right)^2 - m^2c^2 - p_{0x}^2}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{p_{0x}}\sqrt{\left(A-\frac{eEy}{c}\right)^2 - m^2c^2 - p_{0x}^2}$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{\left(A-\frac{eEy}{c}\right)^2 - m^2c^2 - p_{0x}^2}{p_{0x}^2}$$
$$2y'y'' = 2\left(A - \frac{eEy}{c}\right)\left(-\frac{eEy'}{cp_{0x}^2}\right)$$
$$y'' = -A\frac{eE}{cp_{0x}^2} + \frac{e^2E^2}{c^2p_{0x}^2}y, \quad \lambda = \frac{eE}{cp_{0x}}$$
$$y = y_0 + B\,\mathrm{senh}(\lambda x + \beta),$$
$$B\lambda^2\mathrm{senh}(\lambda x+\beta) = -A\frac{eE}{cp_{0x}^2} + \frac{e^2E^2}{c^2p_{0x}^2}(y_0 + B\,\mathrm{senh}(\lambda x+\beta)), \quad y_0 = \frac{A}{\lambda p_{0x}}$$

$$y = \frac{A}{\lambda p_{0x}} + B\,\mathrm{senh}(\lambda x + \beta)$$

Camino alternativo:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\frac{1}{p_{0x}}\sqrt{\left(A - \frac{eEy}{c}\right)^2 - m^2c^2 - p_{0x}^2}} = x - x_0 \qquad =$$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right)^2 + \frac{m^2c^2}{p_{0x}^2} - \frac{eEy}{cp_{0x}^2}\right)^2 - \frac{m^2c^2}{p_{0x}^2}}} \qquad ,$$

$$-1 - \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right)^2 - \frac{m^2c^2}{p_{0x}^2} + \frac{eEy}{cp_{0x}^2} = \frac{mc}{p_{0x}}\mathrm{senhh}\alpha,$$

$$dy = \frac{mc^2 p_{0x}}{eE}\cosh\alpha\, d\alpha$$

$$\frac{mc^2 p_{0x}}{eE}\frac{p_{0x}}{mc}(\alpha - \alpha_0) = x - x_0$$

$$\alpha = \frac{eE}{cp_{0x}^2}(x - x_0) + \alpha_0$$

$$y = \frac{cp_{0x}^2}{eE}\left\{\frac{mc}{p_{0x}}\mathrm{senh}\left[\frac{eE}{cp_{0x}^2}x + \beta'\right] + 1 + \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right)^2 + \frac{m^2c^2}{p_{0x}^2}\right\}$$

$$E = \frac{V}{d}$$

$$\vec{p}_0 = m\gamma(v_0)v_0(\cos\alpha\,\hat{x} + \mathrm{sen}\,\alpha\,\hat{y})$$

Problema 2. Los sistemas de coordenadas S_1 y S_2 se desplazan a lo largo del eje x del sistema de coordenadas S con velocidad v_1 y v_2 respectivamente, referida a S. Un reloj en S_1 da una vuelta completa en un intervalo de tiempo t_1.

Encuentre el intervalo de tiempo t_2, medido en S_2, para que el mismo reloj de una vuelta completa.

R: S se mueve respecto a S_1 con velocidad $-v_1$, S_2 se mueve con respecto a S con velocidad v_2, luego S_2 se mueve respecto a S_1 con velocidad $u = \frac{-v_1 + v_2}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}}$. Tenemos que:

$$t_2 = t_1\gamma(u)$$

Método alternativo:

$$t = \gamma_1(t_1 + x_1 v_1), \quad x = \gamma_1(x_1 + v_1 t_1), \quad t_2 = \gamma_2(t - x v_2),$$

$$x_1 = 0, \qquad t = \gamma_1 t_1, \qquad x = \gamma_1 v_1 t_1$$

$$t - x v_2 = \gamma_1 t_1 - v_2\gamma_1 v_1 t_1 = \gamma_1 t_1(1 - v_1 v_2),$$

$$t_2 = \gamma_1\gamma_2(1 - v_1 v_2)t_1$$

$$\gamma(u) = \frac{(1 - v_1 v_2)}{\sqrt{(1 - v_1 v_2)^2 - (v_1 - v_2)^2}}$$

$$(1 - v_1 v_2)^2 - (v_1 - v_2)^2 = 1 - 2v_1 v_2 + v_1^2 v_2^2 - v_1^2 + 2v_1 v_2 - v_2^2 =$$

$$1 + v_1^2 v_2^2 - v_1^2 - v_2^2$$

$$(1 - v_1^2)(1 - v_2^2) = 1 - v_2^2 - v_1^2 + v_1^2 v_2^2$$

Dan el mismo resultado.

Problema 3. Considere la contribución dipolar eléctrica al campo de radiación dado por:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3x'\vec{J}(\vec{x}\,')$$

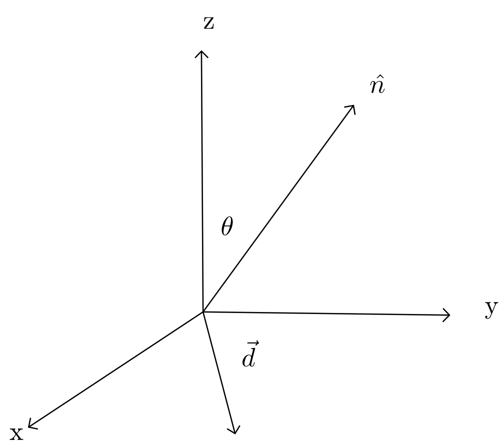
a) Encuentre el campo magnético en la zona de radiación, como función del dipolo eléctrico $\int d^3x'\rho(\vec{x}\,')\vec{x}\,'$

b) Use su resultado de a) para encontrar la potencia por unidad de ángulo sólido emitida por un dipolo eléctrico $\vec{d}_0$ que rota en el plano xy con velocidad angular ω.

c) Encuentre la potencia total radiada por el dipolo.

d) Encuentre la polarización de la onda emitida en función de las coordenadas de $\hat{n}$. Muestre que la onda está elípticamente polarizada y encuentre el cuociente entre el eje mayor y el eje menor de la elipse.

Indicación: Use la base perpendicular a $\hat{n}$.:$\hat{n}\times\hat{z}$,$\hat{n}\times(\hat{n}\times\hat{z})$



R:

$$\vec{d} = \mathrm{Re}\,\vec{d}_0 e^{i\omega t} = d_0\cos\omega t\hat{x} + d_0\mathrm{sen}\,\omega t\hat{y}$$

$$\vec{d}_0 = d_0\hat{x} + d_0 e^{-i\pi/2}\hat{y}$$

$$\begin{aligned}\frac{dP}{d\Omega} &= \frac{Z_0}{32\pi^2c^2}\omega^4|(\hat{n}\times\vec{p})\times\hat{n}|^2\\ |(\hat{n}\times\vec{p})\times\hat{n}|^2 = |\hat{n}.\vec{p}\hat{n} - \vec{p}|^2 = (\hat{n}.\vec{p}\hat{n} - \vec{p})(\hat{n}.\vec{p}^\star\hat{n} - \vec{p}^\star) &=\\ -|\hat{n}.\vec{p}|^2 + |\vec{p}|^2 = 2d_0^2 - d_0^2n_x^2 - d_0^2n_y^2 &=\\ 2d_0^2 - d_0^2\mathrm{sen}^2\theta = d_0^2(1+\cos^2\theta)&\\ \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{Z_0}{32\pi^2c^2}\omega^4d_0^2(1+\cos^2\theta)\end{aligned}$$

Potencia total:

$$P = \frac{Z_0}{32\pi^2c^2}\omega^4d_0^2 2\pi\int_{-1}^{1}dx(1+x^2) = \frac{Z_0}{6\pi c^2}\omega^4 d_0$$

Polarización para un momento dipolar eléctrico:-$(\hat{n}\times\vec{p})\times\hat{n} = (-\hat{n}.\vec{p}\;\hat{n} + \vec{p})$=

$$\hat{x} + e^{-i\pi/2}\hat{y} - \left(n_x + e^{-i\pi/2}n_y\right)\hat{n}$$

Base perpendicular a $\hat{n}$.:$\hat{n}\times\hat{z}$,$\hat{n}\times(\hat{n}\times\hat{z})$

$$-\hat{n}.\vec{p}\,\hat{n}+\vec{p}=a\,\hat{n}\times\hat{z}+b\hat{n}\times(\hat{n}\times\hat{z})$$

$$a=(\hat{n}\times\hat{z}).\vec{p}\,,\quad b=[\hat{n}\times(\hat{n}\times\hat{z})].\vec{p}$$

$$\left(\hat{n}\times\hat{b}\right).(\hat{n}\times\hat{a})=\varepsilon_{ijk}n_jb_k\varepsilon_{iln}n_la_n=(\delta_{jl}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{kl})n_jb_kn_la_n=$$
$$a.b-n.ab.n$$
$$\hat{n}\times(\hat{n}\times\hat{z})=\hat{n}.\hat{z}\hat{n}-\hat{z}$$

$$a=-n_xd_y+n_yd_x,\qquad b=\cos\theta(n_xd_x+n_yd_y)$$
$$a=d_0\left(n_y-n_xe^{-i\pi/2}\right),\quad b=d_0\cos\theta\left(n_x+n_ye^{-i\pi/2}\right)\quad=d_0\cos\theta e^{-i\pi/2}\left(n_xe^{i\pi/2}+n_y\right)$$
$$\left|\frac{b}{a}\right|=\cos\theta$$

Problema 4. Una onda electromagnética plana incide normalmente sobre un plano infinito que separa dos zonas como se muestra en la fig.3

a) Imponga las condiciones de borde en la interfase para encontrar la amplitud del campo eléctrico de las ondas reflejadas y refractadas en función del campo eléctrico de la onda incidente.

b) Calcule los coeficientes de reflexión y transmisión(cuocientes entre los flujos de Poynting de la onda reflejada y transmitida y el flujo de la onda incidente).

c) Para $\mu'=\mu$, escriba los resultados de a) y b) en función de los índices de refracción de los dos medios.

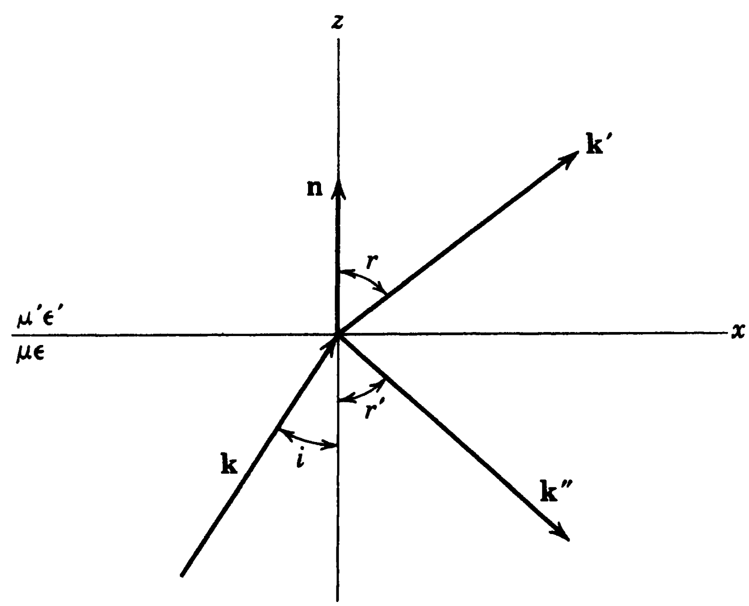


Figura 2.

R:Las tres ondas son:

- Incidente:$\vec{E}=\vec{E}_0e^{i(\vec{k}.\vec{x}-\omega t)}$, $\vec{B}=\sqrt{\mu\varepsilon}\frac{\vec{k}\times\vec{E}}{k}$
- Refractada: $\vec{E}'=\vec{E}_0'e^{i\left(\vec{k}'.\vec{x}-\omega t\right)}$, $\vec{B}'=\sqrt{\mu'\varepsilon'}\frac{\vec{k}'\times\vec{E}'}{k'}$
- Reflejada: $\vec{E}''=\vec{E}_0''e^{i(\vec{k}''.\vec{x}-\omega t)}$, $\vec{B}''=\sqrt{\mu\varepsilon}\frac{\vec{k}''\times\vec{E}''}{k''}$
- $|\vec{k}|=|\vec{k}''|=k=\frac{\omega}{c}\sqrt{\mu\varepsilon}$, $|\vec{k}'|=k'=\frac{\omega}{c}\sqrt{\mu'\varepsilon'}$

$n\,\mathrm{sen}\,i=n'\mathrm{sen}\,r$, $i=0=r$, $\vec{k}=k\hat{n}$,$\vec{k}''=-k\hat{n}$, $\vec{k}'=k'\hat{n}$

Condiciones de Borde: Continuidad de la componente normal de $\vec{D}$ y $\vec{B}$ y de la componente tangencial de $\vec{E}$ y $\vec{H}$.

$$\left[\varepsilon\left(\vec{E}_0+\vec{E}_0''\right)-\varepsilon'\vec{E}_0'\right].\hat{n}=0 \tag{1}$$

$$\left[\vec{k}\times\vec{E}_0+\vec{k}''\times\vec{E}_0''-\vec{k}'\times\vec{E}_0'\right].\hat{n}=0 \tag{2}$$

$$\left(\vec{E}_0+\vec{E}_0''-\vec{E}_0'\right)\times\hat{n}=\vec{0} \tag{3}$$

$$\left[\frac{1}{\mu}\left(\vec{k}\times\vec{E}_0+\vec{k}''\times\vec{E}_0''\right)-\frac{1}{\mu'}\vec{k}'\times\vec{E}_0'\right]\times\hat{n}=\vec{0} \tag{4}$$

(1,2) se satisfacen automáticamente. (3,4) implican:

$$\begin{aligned}\vec{E}_0+\vec{E}_0''-\vec{E}_0'&=\vec{0}\\ \frac{k}{\mu}\left(\vec{E}_0-\vec{E}_0''\right)-\frac{k'}{\mu'}\vec{E}_0'&=\vec{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{E}_0+\vec{E}_0''&=\vec{E}_0'\\ \frac{k}{\mu}\left(\vec{E}_0-\vec{E}_0''\right)-\frac{k'}{\mu'}\left(\vec{E}_0+\vec{E}_0''\right)&=\vec{0}\\ -\vec{E}_0''\left(\frac{k}{\mu}+\frac{k'}{\mu'}\right)&=\vec{E}_0\left(\frac{k'}{\mu'}-\frac{k}{\mu}\right)\end{aligned}$$

$$\vec{E}_0''=\vec{E}_0\left(\frac{k}{\mu}-\frac{k'}{\mu'}\right)/\left(\frac{k}{\mu}+\frac{k'}{\mu'}\right)=\vec{E}_0\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}-\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}\right)/\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}+\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}\right)=\vec{E}_0\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon\mu'}{\varepsilon'\mu}}-1}{\sqrt{\frac{\varepsilon\mu'}{\varepsilon'\mu}}+1}$$

$$\vec{E}_0'=\vec{E}_0\left(2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\right)/\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}+\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}\right)=\vec{E}_0\frac{2}{1+\sqrt{\frac{\varepsilon'\mu}{\mu'\varepsilon}}}$$

Promedio temporal del flujo de energía:$=\frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}|E_0|^2\hat{k}$, $n=\frac{c}{v}=\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}}$

$$R=\left(\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon\mu'}{\varepsilon'\mu}}-1}{\sqrt{\frac{\varepsilon\mu'}{\varepsilon'\mu}}+1}\right)^2$$

$$T=\left(\frac{2}{1+\sqrt{\frac{\varepsilon'\mu}{\mu'\varepsilon}}}\right)^2\sqrt{\frac{\varepsilon'\mu}{\mu'\varepsilon}}$$

Si $\mu'=\mu$:

$$\vec{E}_0'=\vec{E}_0=\frac{2}{1+n'/n}$$

$$\vec{E}_0''=\vec{E}_0\frac{n-n'}{n'+n}$$

$$R=\left(\frac{\frac{n}{n'}-1}{\frac{n}{n'}+1}\right)^2$$

$$T=\left(\frac{2}{1+\frac{n'}{n}}\right)^2\frac{n'}{n}$$

Algunas fórmulas útiles

$$x'=\gamma(x-ut), t'=\gamma\left(t-\frac{u}{c^2}x\right)$$

$$\left(\hat{n}\times\hat{b}\right).(\hat{n}\times\hat{a})=\vec{a}.\vec{b}-\hat{n}.\vec{a}\,\vec{b}.\hat{n}$$

En la zona de radiación:$\vec{E} = Z_0 \vec{H} \times \hat{n}$, $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}[r^2 \hat{n}.\vec{E} \times \vec{H}^\star]$$

$$\nabla \times (\psi \vec{p}) = \nabla \psi \times \vec{p} + \psi \nabla \times (\vec{p})$$

Tiempo: 4 horas