PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
Facultad de Física

Electrodinámica
Prof. Jorge Alfaro S.
Examen Martes 1 de Diciembre de 2015

Problema 1.

Considere un electrón en el átomo de H. Suponga que el electrón se mueve siempre en una órbita circular de radio r.

a)Encuentre la dependencia temporal de r, dado que la energía se pierde por radiación. El movimiento es No-Relativista.

b) Cuánto tiempo demora el átomo en desaparecer si en $t = 0$ se encuentra en el radio de Bohr $r_B = 5.3 \times 10^{-11} m$.

Sol:

$$E = K + U$$
$$U = -\frac{e^2}{r}$$
$$m\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}$$
, por lo tanto
$$mv^2 = -U. \text{Esto es:}$$
$$E = -\frac{e^2}{2r}$$
$$\frac{dE}{dt} = -P = -\frac{2e^2}{3c^3}\left(\frac{e^2}{mr^2}\right)^2$$
. Se obtiene la siguiente ecuación para r
$$\dot{r} = -\frac{4e^4}{3c^3m^2}\frac{1}{r^2}$$
Esto es:
$$-r_B^3 = -\frac{4e^4}{c^3m^2}T$$
$$T = \frac{c^3 m^2 r_B^3}{4e^4} = \left(\frac{r_B}{r_0}\right)^3\frac{r_0}{4c} = 1.6 \times 10^{-11} s$$
$r_0 = 2.8 \times 10^{-15} m$ es el radio clásico del electrón

Problema 2. a) Escriba las ecuaciones de conservación del momentum y la energía para el efecto Compton (un fotón chocando contra un electrón estacionario).

b) Encuentre la energía del fotón dispersado en un ángulo θ respecto a su dirección inicial.

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos\alpha + q\cos\beta$$

$0 = \frac{h}{\lambda'} \operatorname{sen}\alpha - q \operatorname{sen}\beta$

$h\nu = h\nu' + \sqrt{q^2 + m^2}$

$p + q = p' + q'$, p es el $4-$momentum del fotón, q es el $4-$momentum del electrón

$-m^2 = q'^2 = (p + q - p')^2$

$(p - p').q = p.p'$, evaluemos este invariante en el sistema de laboratorio, recordando que $\nu = \frac{1}{\lambda}$

$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m}(1 - \cos\theta)$

Problema 3. Se tiene una esfera conductora conectada a tierra, de radio a, en presencia de un dipolo puntual $\vec{p}$, que apunta radialmente hacia afuera, situado a una distancia R del centro de la esfera ($R > a$).

(a) Encuentre el potencial electrostático en todo el espacio[1].

(b) Cuánto vale la carga total inducida sobre la esfera?

(c) Calcule la energía potencial del dipolo puntual en presencia de la esfera.

AYUDA: Suponga conocido el potencial creado por una carga puntual en presencia de la esfera conductora conectada a tierra.

La energía potencial de un dipolo eléctrico en presencia de un campo eléctrico es:

$$U = -\vec{p}.\vec{E}$$

Sol: El dipolo está descrito por dos cargas q y $-q$ situadas en R y $R-b$, tal que:

$$qR - q(R-b) = qb = p, \text{en el límite b->0}$$

Para hacer nulo el potencial sobre la esfera debemos poner dos cargas imágenes situadas al interior de la esfera:

$$q' = -q\frac{a}{R}, \qquad R' = \frac{a^2}{R}$$

$$q' = q\frac{a}{R-b}, \quad R'' = \frac{a^2}{R-b}$$

$$\Phi(x) = \frac{-q\frac{a}{R}}{\left|x - \frac{a^2}{R}p\right|} + \frac{q\frac{a}{R-b}}{\left|x - \frac{a^2}{R-b}p\right|} + \frac{q}{|x - Rp|} - \frac{q}{|x - (R-b)\,p|} \sim$$

$$\frac{\frac{qa}{R}\left(1 + \frac{b}{R}\right)}{\left|x - \frac{a^2}{R}p\right|[1]}$$

$$\left|x - \frac{a^2}{R-b}p\right| = \left|x - \frac{a^2}{R}\left(1 + \frac{b}{R}\right)p\right|, \quad \vec{u} = \vec{x} - \frac{a^2}{R}\hat{p}$$

$$= \sqrt{u^2 - 2u.\frac{a^2}{R}\frac{b}{R}p} \sim u\left[1 - \frac{a^2}{R}\frac{b}{R}\frac{\vec{u}.\hat{p}}{u^2}\right]$$

$$\Phi(x) = \frac{pa/R^2}{\left|\vec{x} - \frac{a^2}{R}\hat{p}\right|} + \frac{qa/R\frac{a^2}{R}\frac{b}{R}\frac{\vec{u}.\hat{p}}{1}}{\left|\vec{x} - \frac{a^2}{R}\hat{p}\right|^3} + \text{dipolo} =$$

$$\frac{pa/R^2}{\left|\vec{x} - \frac{a^2}{R}\hat{p}\right|} + \frac{a^3\vec{u}.\vec{p}}{R^3\left|\vec{x} - \frac{a^2}{R}\hat{p}\right|^3} + \text{dipolo}$$

b) La carga total sobre la esfera corresponde a las cargas imágenes. Esto es:

$$Q = -q\frac{a}{R} + q\frac{a}{R-b} = pa/R^2$$

c) $U = -\vec{p}.\vec{E}$, donde $\vec{E}$ es el campo creado por las cargas imágenes:

$$\vec{E} = E\hat{p}, E = k\frac{q'}{(R'-R)^2} + k\frac{q''}{(R''-R)^2} \quad =$$

$$k\left\{\frac{-q\frac{a}{R}}{\left(\frac{a^2}{R} - R\right)^2} + \frac{q\frac{a}{R-b}}{\left(\frac{a^2}{R-b} - R\right)^2}\right\} =$$

$$kqb\frac{(a^3 + aR^2)}{R^6 - 3\cdot a^2\cdot R^4 + 3\cdot a^4\cdot R^2 - a^6} = kpa\frac{a^2+R^2}{(R^2-a^2)^3}$$

$$U = -kp^2a\frac{a^2+R^2}{(R^2-a^2)^3}$$

1. Note que la imagen no es solamente un dipolo

Problema 4. En un medio superconductor se satisface que $\vec{J} = \lambda\vec{A}$,$\lambda < 0$(ecuación de London). $\vec{J}$ es la corriente eléctrica superconductora, $\vec{A}$ es el potencial vector y λ es una constante característica del superconductor.

a) Encuentre la ecuación que satisface $\vec{B}$ dentro del superconductor.

b) Considere un medio superconductor infinito situado en la región $z < 0$. Encuentre $\vec{B}$ dentro del superconductor.

Sol:

$$\begin{aligned}
\nabla \times B &= \frac{4\pi}{c} J = \frac{4\pi}{c}\lambda A \\
\nabla \times (\nabla \times B) &= \frac{4\pi}{c}\lambda B \\
\nabla \times (\nabla \times A) &= \nabla(\nabla A) - \nabla^2 A \\
\nabla(\nabla B) - \nabla^2 B &= \frac{4\pi}{c}\lambda B \\
\nabla^2 B + \frac{4\pi}{c}\lambda B &= 0
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \vec{B}(z) \\
\frac{d^2}{dz^2}\vec{B}(z) &= -\frac{4\pi}{c}\lambda\vec{B}(z), \;\; \omega^2 = -\frac{4\pi}{c}\lambda \\
\vec{B}(z) &= A_- e^{-\omega z} + A_+ e^{\omega z}
\end{aligned}$$

Condición de borde B es finito para $z \to -\infty$. Por lo tanto:

$$\vec{B}(z) = A_+ e^{\omega z}$$

Algunas fórmulas útiles

$$P = \frac{2e^2 \vec{a}^{\,2}}{3c^3}$$

Tiempo: 4 horas