Lagrangeano de Proca

Esteban Castillo Rojas
edcastillo@uc.cl

Introducción

- Las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot E = 4\pi\, \rho \qquad \nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E + \frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} = 0 \qquad \nabla \times B - \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\, J$$

son invariantes de Lorentz.

Introducción

- Es mas transparente en la notación

$$\partial^{\beta} F_{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J_{\alpha}$$

donde

$$F^{\alpha\beta} = \partial^{\alpha} A^{\beta} - \partial^{\beta} A^{\alpha}$$

e introdujimos las extensiones 4-vectoriales del potencial y las fuentes

$$J^{\alpha} = (cp, \boldsymbol{J}) \qquad A^{\alpha} = (\Phi, \boldsymbol{A})$$

Introducción

- Ecuaciones covariantes = Lagrangeano escalar de Lorentz. Ejemplo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{c}J_\alpha A^\alpha$$

$$\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\beta A^\alpha)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^\alpha}} \longrightarrow \partial^\beta F_{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c}J_\alpha$$

- Posibles extensiones que respeten la simetría ?

Término de masa

- Agregamos un término al Lagrangeano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{c} J_\alpha A^\alpha + \frac{\mu^2}{8\pi} A_\alpha A^\alpha$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\beta A^\alpha)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\alpha}} \longrightarrow \partial^\beta F_{\alpha\beta} + \mu^2 A_\alpha = \frac{4\pi}{c} J_\alpha$$

Lo que le da al fotón una masa

$$m_\gamma = \mu \frac{\hbar}{c}$$

Consecuencias

- Simetría de Gauge?

Tomamos la divergencia (∂^α) de la ecuación de Proca

Cero por simetría

$$\boxed{\partial^\alpha \partial^\beta F_{\alpha\beta}} + \mu^2 \partial^\alpha A_\alpha = \frac{4\pi}{c} \partial^\alpha J_\alpha$$

$$\mu^2 \partial^\alpha A_\alpha = \frac{4\pi}{c} \partial^\alpha J_\alpha = 0$$

La conservación de carga requiere que fijemos el Gauge de Lorentz

Consecuencias

- Ley de Coulomb?

En el límite estático de una carga puntual

$$\nabla^2\Phi - \mu^2\Phi = -\mathrm{q}\delta^{(3)}(\boldsymbol{r})$$

El potencial electrostático toma la forma de un potencial de Yukawa

$$\Phi(r) = q\,\frac{e^{-\mu r}}{r}$$

Evidencias

Posibles Experimentos

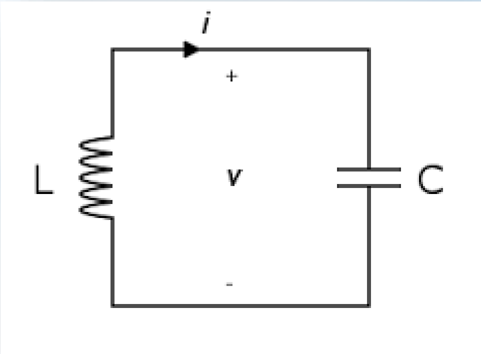
- Circuitos LC
- Campo Magnético Terrestre

Evidencias

- Circuitos LC.

  Ecuación de Proca sin fuentes

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi + \mu^2 \Phi = 0$$



Soluciones oscilatorias

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \mu^2 c^2 \stackrel{?}{=} \omega_0^2 + \mu^2 c^2$$

- Diferencias de frecuencia de resonancia en un circuito LC?

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\mu^2 c^2}{2\omega_0^2}$$

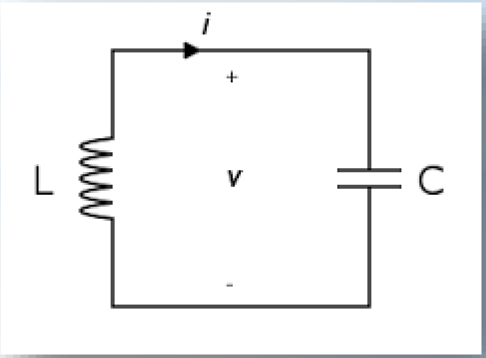
Evidencias

- Diferencias de frecuencia de resonancia en un circuito LC?

  No!

Capacitancia $I = C\,\frac{dV}{dt}$

Inductancia $V = -L\frac{dI}{dt}$



$$\Rightarrow V + LC\frac{d^2V}{dt^2} = 0$$

- Es decir la frecuencia resonante es $\omega_0^2 = (LC)^{-1}$ sin importar la masa del fotón

Evidencias

- Campo magnético terrestre.

La ecuación de Proca cuya fuente es un dipolo magnético estático predice un campo magnético

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{dip}} + \vec{B}_{\text{ext}}$$

- Mediciones del campo magnético terrestre en el Ecuador restringen

$$\frac{B_{\text{ext}}}{B_{\text{dip}}} < 4 \times 10^{-3}$$

En términos de la masa del fotón

$$m_\gamma < 4.4 \times 10^{-48}\text{gm}$$

Aplicación interesante

- Modelo de Superconductividad

Movimiento no relativista de partículas de carga Q, masa m_Q y densidad n_Q

$$\vec{J} = Qn_Q\vec{v} = \frac{Q}{m_Q}n_Q\vec{P} - \frac{Q^2}{m_Q c}n_Q\vec{A}$$

- Estado fundamental de un superconductor tiene $\vec{P} = 0$

$$\nabla^2\vec{A} - \partial_0^2\vec{A} - \frac{Q^2}{m_Q c}n_Q\vec{A}$$

Toma la forma de Proca con

$$\mu^2 = 4\pi Q^2 \frac{n_Q}{m_Q c^2}$$

Aplicación interesante

- Límite estático y geometría plana

$$\vec{A}(x) \propto e^{-\mu x}$$

El campo magnético penetra el superconductor hasta una profundidad μ^{-1}.

- Longitud de penetración de London para los pares de Cooper

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m_e c^2}{4\pi e^2 n}} \sim 4 \times 10^{-6}\text{cm}$$

Conclusiones

- El Lagrangeano de Proca es un ejemplo pedagógico sobre modificación de teorías.
- Un término de masa altera las propiedades del fotón. Vimos: invariancia de Gauge y la Ley de Coulomb
- Vimos como algunas consideraciones sencillas permiten limitar los valores de la masa del fotón. En particular, el campo magnético terrestre impone una restricción fuerte.
- El Lagrangeano de Proca da una buena descripción de la fenomenología de penetración de campo magnético en un superconductor