Monopolos Magnéticos

Monopolo de Dirac

Daniel Pérez Tobar

Pontificia Universidad Católica de Chile

Noviembre 20, 2015

Índice

1 Motivación

2 Postulación
- Idea
- Ecuaciones de Maxwell
- Condición de Cuantización de Dirac

3 Acerca de la Condición de Cuantización de Dirac

4 Conclusiones

Motivación

- La existencia de monopolos magnéticos explicaría la naturaleza discreta de la carga eléctrica.

Idea

- Suponemos que existe una carga magnética y densidad de corriente ρ_m y $\mathbf{J}_m$, de manera similar a ρ_e y $\mathbf{J}$. Con esto, las Ecuaciones de Maxwell adquieren la siguiente forma:

Ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho_e \tag{1}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{J} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 4\pi\rho_m \tag{3}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\vec{J}_m \tag{4}$$

Ecuaciones de Maxwell

Ahora, consideremos las siguientes transformaciones duales

$$\vec{E} = \vec{E}' \cos(\theta) + \vec{H}' \sin(\theta) \tag{5}$$

$$\vec{H} = -\vec{E}' \sin(\theta) + \vec{H}' \cos(\theta) \tag{6}$$

$$\vec{D} = \vec{D}' \cos(\theta) + \vec{B}' \sin(\theta) \tag{7}$$

$$\vec{B} = -\vec{D}' \sin(\theta) + \vec{B}' \cos(\theta) \tag{8}$$

Con esto, las formas cuadráticas como $\vec{E} \times \vec{H}$, $(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$ y las componentes del tensor $T_{\alpha\beta}$, se mantienen invariantes.

Ecuaciones de Maxwell

Se hace el mismo tipo de transformación para las fuentes.

$$\rho_e = {\rho'}_e \cos(\theta) + {\rho'}_m \sin(\theta) \tag{9}$$

$$\rho_m = -{\rho'}_e \sin(\theta) + {\rho'}_m \cos(\theta) \tag{10}$$

$$\vec{J}_e = \vec{J'}_e \cos(\theta) + \vec{J'}_m \sin(\theta) \tag{11}$$

$$\vec{J}_m = -\vec{J'}_e \sin(\theta) + \vec{J'}_m \cos(\theta) \tag{12}$$

De este modo, las Ecuaciones de Maxwell para los *campos primados* se cumplen con las *fuentes primadas*.

Ecuaciones de Maxwell

- La primera (y única) pregunta relevante que surge a partir de estas modificaciones es si todas las partículas tendrían razón entre carga magnética y carga eléctrica.
- Si la carga eléctrica del electrón es $q_e = -e$ y su carga magnética es $q_m = 0$, entonces para un protón $q_p = +e$, donde se tiene el límite de error de

$$\frac{|q_e + q_p|}{e} \sim 10^{-20}$$

$$|q_m(nuc)| < 2 \cdot 10^{-24} e$$

Ecuaciones de Maxwell

- Es necesario tener en cuenta, también, las propiedades de transformación de ρ_m y $\vec{J}_m$ bajo rotación, traslación espacial y reversión temporal.
- De los comportamientos de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ de las ecuaciones de Maxwell usuales, se puede deducir de nuestras nuevas ecuaciones que

$\Longrightarrow$ ρ_m es una *densidad seudoescalar*, impar bajo inversión temporal.

$\Longrightarrow$ $\vec{J}_m$ en una *densidad seudovectorial*, par bajo inversión temporal.

Condición de Cuantización de Dirac

- Dirac, utilizando mecánica cuántica, logró llegar a una condición de cuantización dada por

$$\frac{ge}{\hbar c} = \frac{n}{2}$$

- La carga del electrón queda determinada en función de la carga magnética. Conociendo el valor de la constante de estructura fina, es posible entonces determinar el valor de dicha carga

$$\frac{g^2}{\hbar c} = \frac{n^2}{4}\left(\frac{\hbar c}{e^2}\right) \approx \frac{137}{4}n^2$$

Acerca de la Condición de cuantización de Dirac

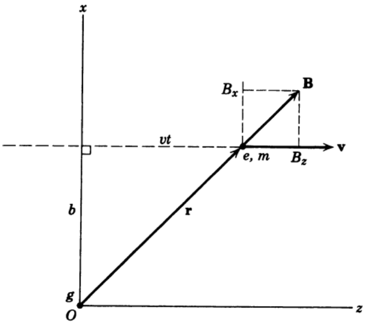

Figura: Partícula paralela al eje z, con parámetro de impacto b, velocidad v, en presencia del campo magnético del monopolo $\vec{B} = g\dfrac{\vec{r}}{r^3}$

Acerca de la Condición de cuantización de Dirac

- Si la partícula no se deflecta, la única fuerza que actúa sobre ella en la colisión es en la componente y, es decir,

$$F_y = \frac{ev}{c} B_x = \frac{eg}{c} \frac{vb}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} \tag{13}$$

- De modo que el impulso en dicha dirección es

$$\Delta p_y = \frac{egvb}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} = \frac{2eg}{cb} \tag{14}$$

Acerca de la Condición de cuantización de Dirac

- El cambio producido en el momento angular, será

$$\Delta L_z = b\Delta p_y = \frac{2eg}{c} \tag{15}$$

- De aquí es posible obtener de manera inmediata la regla de cuantización de Dirac.

Acerca de la Condición de cuantización de Dirac

- El argumento original de Dirac está en considerar que no debieran esperarse grandes cambios, desde el punto de vista de la mecánica cuántica, al problema del electrón en presencia de un monopolo magnético. De modo que el Hamiltoniano de interacción fuera escrito de forma estándar

$$H_{int} = e\Phi - \frac{e}{mc}\vec{p}\cdot\vec{A} \tag{16}$$

- Sin embargo, para poder introducir la carga magnética hay que tomar ciertas consideraciones.

Acerca de la Condición de cuantización de Dirac

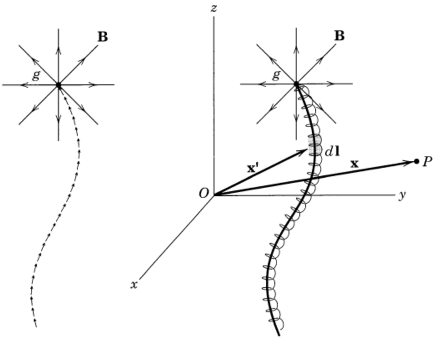

Figura: Dos representaciones del monopolo

Acerca de la Condición de cuantización de Dirac

- El elemento del vector potencial $d\vec{A}$ para un elemento de dipolo magnético $d\vec{m}$ en $\vec{x'}$ está dado por

$$d\vec{A}(\vec{x}) = d\vec{m} \times \nabla \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \tag{17}$$

$$\Longrightarrow \vec{A}_L(\vec{x}) = -g \int_L d\vec{l} \times \nabla \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \tag{18}$$

- De modo que el campo magnético del monopolo sería

$$\vec{B}_{monopolo} = \nabla \times \vec{A} - \vec{B}' \tag{19}$$

Acerca de la Condición de cuantización de Dirac

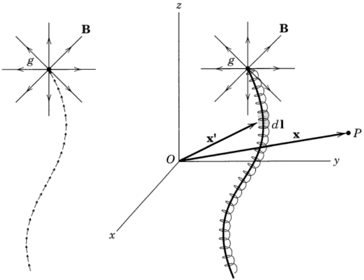

Figura: Debido a la invarianza de gauge los dos caminos diferentes L y L' debiesen dar potenciales vectores que difieran en una transformación de gauge.

Acerca de la Condición de cuantización de Dirac

$$\vec{A}_{L'}(\vec{x}) = \vec{A}_L(\vec{x}) + g\nabla\Omega_c(\vec{x}) \tag{20}$$

- Donde la transformación corresponde a $\Phi \to \Phi' = \Phi - (1/c)(\partial\chi/\partial t)$, $\chi = g\Omega_C$
- Con esta transformación, sabemos que la función de onda se transforma de la forma

$$\psi \to \psi' = \psi \exp^{ie\chi/\hbar c} = \psi \exp^{i(eg/\hbar c)\Omega_C} \tag{21}$$

Acerca de la Condición de cuantización de Dirac

- De modo que finalmente se llega a la conclusión de que

$$\frac{eg}{\hbar c} \cdot 4\pi = 2\pi n \tag{22}$$

Conclusiones

Conclusiones

- Dada la información experimental que hay a la fecha (1975), no existe un monopolo como el de Dirac.

Conclusiones

- Dada la información experimental que hay a la fecha (1975), no existe un monopolo como el de Dirac.
- En ese caso, de existir un monopolo, debiése ser de otra forma.

Conclusiones

- Dada la información experimental que hay a la fecha (1975), no existe un monopolo como el de Dirac.
- En ese caso, de existir un monopolo, debiése ser de otra forma.
- La búsqueda de monopolos sigue siendo un trabajo interesante.

Gracias

Referencias

- Jackson, John D. (1975). Classical Electrodynamics (1st ed.). New York: Wiley.