Trayectoria Electrón Acelerado

Ricardo Arturo Rojas Aedo

Pontificia Universidad Católica de Chile

20/11/2015

Índice

introducción

La dinámica de la partícula cargada acelerada es más compleja de lo que esperamos:

introducción

La dinámica de la partícula cargada acelerada es más compleja de lo que esperamos:

Las partículas deben irradiar....

introducción

La dinámica de la partícula cargada acelerada es más compleja de lo que esperamos:

Las partículas deben irradiar.... cambio en la trayectoria (conservación de energía y momentum)

introducción

La dinámica de la partícula cargada acelerada es más compleja de lo que esperamos:

Las partículas deben irradiar.... cambio en la trayectoria (conservación de energía y momentum)

Sin embargo, no es para alarmarse. La teoría que no consideran esta radiación es muy aceptables con los experimentos:

introducción

La dinámica de la partícula cargada acelerada es más compleja de lo que esperamos:

Las partículas deben irradiar.... cambio en la trayectoria (conservación de energía y momentum)

Sin embargo, no es para alarmarse. La teoría que no consideran esta radiación es muy aceptables con los experimentos:

Ordenes de magnitud y límites de la teoría

introducción (órdenes de magnitud)

Según la formula de Larmor:

$$E_{rad} \sim \frac{e^2 a^2 T}{6\pi\epsilon_0 c^3} \tag{1}$$

introducción (órdenes de magnitud)

Según la formula de Larmor:

$$E_{rad} \sim \frac{e^2 a^2 T}{6\pi\epsilon_0 c^3} \tag{1}$$

Los efectos son poco importantes si (con E_0 energía cinética

$E_0 \sim m(aT)^2$

introducción (órdenes de magnitud)

Según la formula de Larmor:

$$E_{rad} \sim \frac{e^2 a^2 T}{6\pi\epsilon_0 c^3} \tag{1}$$

Los efectos son poco importantes si (con E_0 energía cinética $E_0 \sim m(aT)^2$):

$$E_{rad} \ll E_0 \tag{2}$$

introducción (órdenes de magnitud)

Según la formula de Larmor:

$$E_{rad} \sim \frac{e^2 a^2 T}{6\pi\epsilon_0 c^3} \tag{1}$$

Los efectos son poco importantes si (con E_0 energía cinética $E_0 \sim m(aT)^2$):

$$E_{rad} \ll E_0 \tag{2}$$

$$T \gg \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \sim \tau \tag{3}$$

introducción (órdenes de magnitud)

$$T \gg \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \sim \tau \tag{4}$$

Con τ tiempo característico para el movimiento radiativo

introducción (órdenes de magnitud)

$$T \gg \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \sim \tau \tag{4}$$

Con τ tiempo característico para el movimiento radiativo

τ para el electrón $6x10^{-24}$ segundos. La luz viaja apenas 10^{-15} metros

introducción (órdenes de magnitud)

$$T \gg \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \sim \tau \tag{4}$$

Con τ tiempo característico para el movimiento radiativo

τ para el electrón $6x10^{-24}$ segundos. La luz viaja apenas 10^{-15} metros

Sin embargo resulta interesante estudiarlo con miras a casos extremos

Dinámica:

La ecuación de Newton puede ser escrita como:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{rad} \tag{5}$$

Dinámica:

La ecuación de Newton puede ser escrita como:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{rad} \tag{5}$$

De $\mathbf{F}_{rad}$ sólo sabemos que:

Dinámica:

La ecuación de Newton puede ser escrita como:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{rad} \tag{5}$$

De $\mathbf{F}_{rad}$ sólo sabemos que:

- debe ser igual a cero si $\dot{\mathbf{v}} = 0$

Dinámica:

La ecuación de Newton puede ser escrita como:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{rad} \tag{5}$$

De $\mathbf{F}_{rad}$ sólo sabemos que:

- debe ser igual a cero si $\dot{\mathbf{v}} = 0$
- Debe ser independiente del signo de e. Proporcional a e^2

Dinámica:

La ecuación de Newton puede ser escrita como:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{rad} \tag{5}$$

De $\mathbf{F}_{rad}$ sólo sabemos que:

- debe ser igual a cero si $\dot{\mathbf{v}} = 0$
- Debe ser independiente del signo de e. Proporcional a e^2
- Debe incorporar información del tiempo característico

Dinámica:

La ecuación de Newton puede ser escrita como:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{rad} \tag{5}$$

De $\mathbf{F}_{rad}$ sólo sabemos que:

- debe ser igual a cero si $\dot{\mathbf{v}} = 0$
- Debe ser independiente del signo de e. Proporcional a e^2
- Debe incorporar información del tiempo característico
- Trabajo hecho en un ΔT debe ser igual a la energía radiada.

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{rad} \cdot \mathbf{V} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{V}} \cdot \dot{\mathbf{V}} dt \tag{6}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{rad} \cdot \mathbf{V} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{V}} \cdot \dot{\mathbf{V}} dt \qquad (6)$$

Integrando por partes, y asumiendo movimiento periódico $\mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{V}} = 0$ en t_1 y t_2

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{F}_{rad} - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{V}} \right) \cdot \mathbf{V} dt = 0 \qquad (7)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{rad} \cdot \mathbf{V} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{V}} \cdot \dot{\mathbf{V}} dt \tag{6}$$

Integrando por partes, y asumiendo movimiento periódico $\mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{V}} = 0$ en t_1 y t_2

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{F}_{rad} - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{V}} \right) \cdot \mathbf{V} dt = 0 \tag{7}$$

$$\mathbf{F}_{rad} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon c^3} = m\tau \ddot{\mathbf{V}} \tag{8}$$

$$m \left(\dot{\mathbf{V}} - \tau \ddot{\mathbf{V}} \right) = \mathbf{F}_{ext} \tag{9}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{rad} \cdot \mathbf{V} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{V}} \cdot \dot{\mathbf{V}} dt \tag{6}$$

Integrando por partes, y asumiendo movimiento periódico $\mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{V}} = 0$ en t_1 y t_2

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{F}_{rad} - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{V}} \right) \cdot \mathbf{V} dt = 0 \tag{7}$$

$$\mathbf{F}_{rad} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon c^3} = m\tau\ddot{\mathbf{V}} \tag{8}$$

$$m \left(\dot{\mathbf{V}} - \tau\ddot{\mathbf{V}} \right) = \mathbf{F}_{ext} \tag{9}$$

Esta se conoce como la ecuación de Abraham Lorentz

Si tenemos un potencial conservativo central:

$$\dot{\mathbf{V}} = \frac{-1}{m}\left(\frac{dV}{dr}\right)\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{10}$$

Si tenemos un potencial conservativo central:

$$\dot{\mathbf{V}} = \frac{-1}{m}\left(\frac{dV}{dr}\right)\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{10}$$

Por conservación de energía:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{-e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\dot{\mathbf{V}}^2 = -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m^2}\left(\frac{dV}{dr}\right)^2 \tag{11}$$

Si tenemos un potencial conservativo central:

$$\dot{\mathbf{V}} = \frac{-1}{m}\left(\frac{dV}{dr}\right)\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{10}$$

Por conservación de energía:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{-e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\dot{\mathbf{V}}^2 = -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m^2}\left(\frac{dV}{dr}\right)^2 \tag{11}$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\tau}{m}\left(\frac{dV}{dr}\right)^2 \tag{12}$$

A su vez la otra constante de movimiento, el momentum angular, variará haciedo un promedio como:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -\frac{\tau}{mr}\left(\frac{dV}{dr}\right)\mathbf{L} \tag{13}$$

A su vez la otra constante de movimiento, el momentum angular, variará haciedo un promedio como:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -\frac{\tau}{mr}\left(\frac{dV}{dr}\right)\mathbf{L} \tag{13}$$

Donde se usa el hecho que $\frac{d}{dt} = \mathbf{V} \cdot \nabla$

A su vez la otra constante de movimiento, el momentum angular, variará haciedo un promedio como:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -\frac{\tau}{mr}\left(\frac{dV}{dr}\right)\mathbf{L} \tag{13}$$

Donde se usa el hecho que $\frac{d}{dt} = \mathbf{V} \cdot \nabla$

Ambas variaciones de constantes de movimiento dan cuenta de la diferente dinámica de la partícula.

Avancemos un paso más allá:

Avancemos un paso más allá:

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\phi + \frac{e}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} \tag{14}$$

Avancemos un paso más allá:

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\phi + \frac{e}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} \tag{14}$$

Donde debemos tomar los potenciales retardados:

$$\phi = \int \frac{\rho_{t-R/c}}{R} dv \tag{15}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}_{t-R/c}}{R} dv \tag{16}$$

Y debemos considerar:

$$[]_{ret} = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{R^n}{c^n} \frac{\partial^n}{\partial t^n} [] \tag{17}$$

Y debemos considerar:

$$[]_{ret} = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{R^n}{c^n} \frac{\partial^n}{\partial t^n} [] \tag{17}$$

Así quedará, considerando que el orden uno se anula para ϕ

$$\phi = \int \frac{\rho}{R} dv + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho R dv - \frac{1}{6c^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int \rho R^2 dv \tag{18}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}}{R} dv - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{J} dv \tag{19}$$

Concentrándonos en los últimos términos de la expansión, dado que los anteriores dan las ecuaciones corrientes:

Concentrándonos en los últimos términos de la expansión, dado que los anteriores dan las ecuaciones corrientes:

Podemos usar la libertad de Gauge (20) y (21) que satisfaga la condición de Lorentz (22) para que se satisfaga (23)

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{1}{c}\partial_t f \tag{20}$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla f \tag{21}$$

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} f = 0 \tag{22}$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\phi} = 0 \tag{23}$$

Con

$$f = -\frac{1}{6c^3}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \rho R^2 dv \tag{24}$$

Con

$$f = -\frac{1}{6c^3}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \rho R^2 dv \tag{24}$$

Nos quedará, notado que R contiene la información de la velocidad:

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(2)} = -\frac{2}{3c^2}\sum e\dot{\mathbf{V}} \tag{25}$$

Con

$$f = -\frac{1}{6c^3}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \rho R^2 dv \tag{24}$$

Nos quedará, notado que R contiene la información de la velocidad:

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(2)} = -\frac{2}{3c^2}\sum e\dot{\mathbf{V}} \tag{25}$$

Ahora, haciendo uso de $\mathbf{E} = \frac{-1}{c}\dot{\tilde{\mathbf{A}}}^{(2)}$

$$\mathbf{E} = \frac{2}{3c^2}\dddot{\mathbf{d}} \tag{26}$$

Luego, la fuerza será $\mathbf{E}e$ y asumiendo que $\dot{d} \cdot \ddot{d} = 0$ en los extremos nos quedará

$$\sum \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} = \frac{-2}{3c^2} \ddot{\mathbf{d}}^2 \tag{27}$$

Luego, la fuerza será $\mathbf{E}e$ y asumiendo que $\dot{d} \cdot \ddot{d} = 0$ en los extremos nos quedará

$$\sum \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} = \frac{-2}{3c^2} \ddot{\mathbf{d}}^2 \tag{27}$$

Desde donde hemos dado una nueva interpretación a la teoría, además de extenderla

Luego, la fuerza será $\mathbf{E}e$ y asumiendo que $\dot{d} \cdot \ddot{d} = 0$ en los extremos nos quedará

$$\sum \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} = \frac{-2}{3c^2} \ddot{\mathbf{d}}^2 \tag{27}$$

Desde donde hemos dado una nueva interpretación a la teoría, además de extenderla

Sin embargo, estos esfuerzos son estériles ante cargas puntuales como el electrón

Luego, la fuerza será $\mathbf{E}e$ y asumiendo que $\dot{d} \cdot \ddot{d} = 0$ en los extremos nos quedará

$$\sum \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} = \frac{-2}{3c^2} \ddot{\mathbf{d}}^2 \tag{27}$$

Desde donde hemos dado una nueva interpretación a la teoría, además de extenderla

Sin embargo, estos esfuerzos son estériles ante cargas puntuales como el electrón.....es necesario hacer una teoría del electrón y las cargas.

Modelo de Partícula Cargada:

Consideremos una partícula como una pelota muy pequeña con cargas internas localizadas.

Modelo de Partícula Cargada:

Consideremos una partícula como una pelota muy pequeña con cargas internas localizadas.

Propuesta: El ímpetu aparentemente mecánico de una partícula es de origen completamente electromagnético:

Modelo de Partícula Cargada:

Consideremos una partícula como una pelota muy pequeña con cargas internas localizadas.

Propuesta: El ímpetu aparentemente mecánico de una partícula es de origen completamente electromagnético:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}_{ext} \tag{28}$$

Así nos quedará:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_{ext} \tag{29}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_s + \mathbf{B}_{ext} \tag{30}$$

Así nos quedará:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_{ext} \tag{29}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_s + \mathbf{B}_{ext} \tag{30}$$

Así quedará:

$$\mathbf{f}_{ext} = \int \rho \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{J} x \mathbf{B}_{ext} dv \tag{31}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\int \rho \mathbf{E}_s + \mathbf{J} x \mathbf{B}_s dv \tag{32}$$

Suponemos además que: La partícula está intantáneamente en reposo

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\int \rho(x,t)\left(\nabla\phi(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A(x,t)}\right) dv \tag{33}$$

Con:

$$\mathbf{A}^{\alpha}(x,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{J^{\alpha}(\tilde{x},\tilde{t})_{ret}}{R} d\tilde{v} \tag{34}$$

Usando la ecuación de continuidad y usando el hecho que segundo miembro es el importante:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=0}\frac{(-1)^n}{n!c^{n+2}}\int dv \int d\tilde{v}\rho(x,t)R^{n-1}\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}N \qquad (35)$$

$$N = \rho(\tilde{x},t)v(t)\left(\frac{n+1}{n+2} - \frac{n-1}{n+2}\left(\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{V}}{RV}\right)^2\right) \qquad (36)$$

Usando la ecuación de continuidad y usando el hecho que segundo miembro es el importante:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=0}\frac{(-1)^n}{n!c^{n+2}}\int dv\int d\tilde{v}\rho(x,t)R^{n-1}\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}N \tag{35}$$

$$N = \rho(\tilde{x},t)v(t)\left(\frac{n+1}{n+2}-\frac{n-1}{n+2}\left(\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{V}}{RV}\right)^2\right) \tag{36}$$

Usando el hecho que todas las direcciones son igualmente probables, el segundo término valdrá un 1/3:

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_0 = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^2}\dot{\mathbf{v}} \int dv \int d\tilde{v} \frac{\rho(x)\rho(\tilde{x})}{R} \tag{37}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_1 = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3}\ddot{\mathbf{v}} \int dv \int d\tilde{v}\, \rho(x)\rho(\tilde{x}) \tag{38}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_n = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^{n+2}}\mathbf{v}^{(n+1)} a^{n-1} \tag{39}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_0 = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^2}\dot{\mathbf{v}}\int dv \int d\tilde{v}\frac{\rho(x)\rho(\tilde{x})}{R} \tag{37}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_1 = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3}\ddot{\mathbf{v}}\int dv \int d\tilde{v}\rho(x)\rho(\tilde{x}) \tag{38}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_n = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^{n+2}}\mathbf{v}^{(n+1)}a^{n-1} \tag{39}$$

La expansión hasta 1 se justifica en el pequeño radio de electrón, o mi partícula cargada

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_0 = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^2}\dot{\mathbf{v}} \int dv \int d\tilde{v} \frac{\rho(x)\rho(\tilde{x})}{R} \tag{37}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_1 = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3}\ddot{\mathbf{v}} \int dv \int d\tilde{v} \rho(x)\rho(\tilde{x}) \tag{38}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_n = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^{n+2}}\mathbf{v}^{(n+1)} a^{n-1} \tag{39}$$

La expansión hasta 1 se justifica en el pequeño radio de electrón, o mi partícula cargada... el potencial es casi instantáneo.

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_0 = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^2}\dot{\mathbf{v}} \int dv \int d\tilde{v} \frac{\rho(x)\rho(\tilde{x})}{R} \tag{37}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_1 = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3}\ddot{\mathbf{v}} \int dv \int d\tilde{v} \rho(x)\rho(\tilde{x}) \tag{38}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_n = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^{n+2}}\mathbf{v}^{(n+1)} a^{n-1} \tag{39}$$

La expansión hasta 1 se justifica en el pequeño radio de electrón, o mi partícula cargada... el potencial es casi instantáneo.

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_0 = \frac{4}{3}\frac{U}{c^2}\dot{\mathbf{v}} \tag{40}$$

$$\frac{4}{3}m\dot{\mathbf{v}} - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}_{ext} \tag{41}$$

Que es el resultado que ya habiamos logrado desde otras perspectivas.

$$\frac{4}{3}m\dot{\mathbf{v}} - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}_{ext} \tag{41}$$

Que es el resultado que ya habiamos logrado desde otras perspectivas. En otra forma de expandir este mismo producto podemos constatar que (haciendo la transformada de fourier de v(t)) :

$$-i\omega M(\omega)\mathbf{v}(\omega) = \mathbf{f}_{ext}(\omega) \tag{42}$$

$$M(\omega) = m_0 + \frac{2}{3c^2}\int dv \int d\tilde{v}\rho(x)\rho(\tilde{x})\frac{e^{i\omega R/c}}{R} \tag{43}$$

Haciendo una transformada de Fourier en la carga:

$$M(\omega) = m_0 + \frac{2}{3\pi^2 c^2} \int d^3\mathbf{k} \frac{f(\mathbf{k})^2}{k^2 - (w/c)^2} \tag{44}$$

Conclusión:

Hemos dado con un modelo desde un punto de vista heurístico y formal, para el movimiento de un electrón o partículas cargadas a segundo orden o radiativo, además de dar con caracterísiticas aparentemente mecánicas desde una perspectiva únicamente electromagnética de nuestra partícula.