Superposición de Ondas en una dimensión
y
Propagacion de pulsos en medios disipativos

Ángel Rincón

Electrodinámica
Pontificia Universidad Católica de Chile.
Instituto de Física.

Santiago, 4 de Noviembre de 2015.

Temas a tratar

- Consideraciones generales
- Series e integrales de Fourier
- Separacion de pulsos en medios disipativos

Consideraciones generales

- **Las ondas monocromáticas** (con una frecuencia y número de onda bien definidos) no se presentan en la naturaleza pues siempre hay una pequeña dispersión de frecuencias o longitud de onda.
- Tal dispersion puede generarse en un **pulso de duración finita**.
- Puesto que las ecuaciones son lineales, es posible aplicar el **principio de superposición** a diferentes frecuecias.

Consideraciones generales

Algunas caracteristicas nuevas son:

1. En medios disipativos, la velocidad de fase no es la misma para cada componente de frecuencia de la onda.

2. En medios disipativos, la velocidad del flujo de energía puede ser muy diferente a la velocidad de fase.

3. En un medio disipativo, un pulso de radiación será atenuado con o sin distorcion, dependiendo de si los efectos disipativos son o no funciones sensibles de la frecuencia.

Series e Integrales de Fourier

- Por simplicidad, tomemos el caso 1D de ondas escalares, donde la amplitud $u(x,t)$ es entendida como una componente del campo electromagnético.
- La solución para $u(x,t)$ viene dada (acorde con Jackson eq.(7.6)) por:

$$u(x,t) = ae^{ikx-i\omega t} + be^{ikx-i\omega t}, \tag{1}$$

donde tenemos el vínculo entre el número de onda y la frecuencia:

$$k = \sqrt{\mu\epsilon}\ \ \omega.$$

- Tomamos el vector número de onda como variable independiente:

$$\omega \equiv \omega(k),$$

y, puesto que las propiedades de la onda deben ser independientes de donde provenga esta se tiene que:

$$\omega(k) = \omega(-k).$$

Series e Integrales de Fourier

- Hay regiones donde se produce una dispersión anomala en la cual la frecuencia varia rapidamente en un intervalo delgado de longitud de onda.
- Suponemos que el número de onda y la frecuencia son reales y que no hay disipación.
- De la eq.(1) podemos construir una solución de la forma:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikx - i\omega(k)t} dk.$$

- Notemos que el coeficiente $A(k)$ describe la propiedad de combinacion lineal de las funciones correspondientes. Así:

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0) e^{-ikx} dk.$$

Series e Integrales de Fourier

- Ejemplo # 1:

  Notar que si $u(x,0)=e^{ik_0x}$ representa una onda armónica, tenemos, vía la relacion de ortogonalidad, que:

$$A(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ik_0x}e^{-ikx}dk,$$

$$A(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(k-k_0)x}dk,$$

$$A(k)=\sqrt{2\pi}\delta(k-k_0).$$

  Note que la solución corresponde a una onda viajera monocromática de la forma

$$u(x,t)=e^{ik_0x-i\omega(k_0)t}.$$

Series e Integrales de Fourier

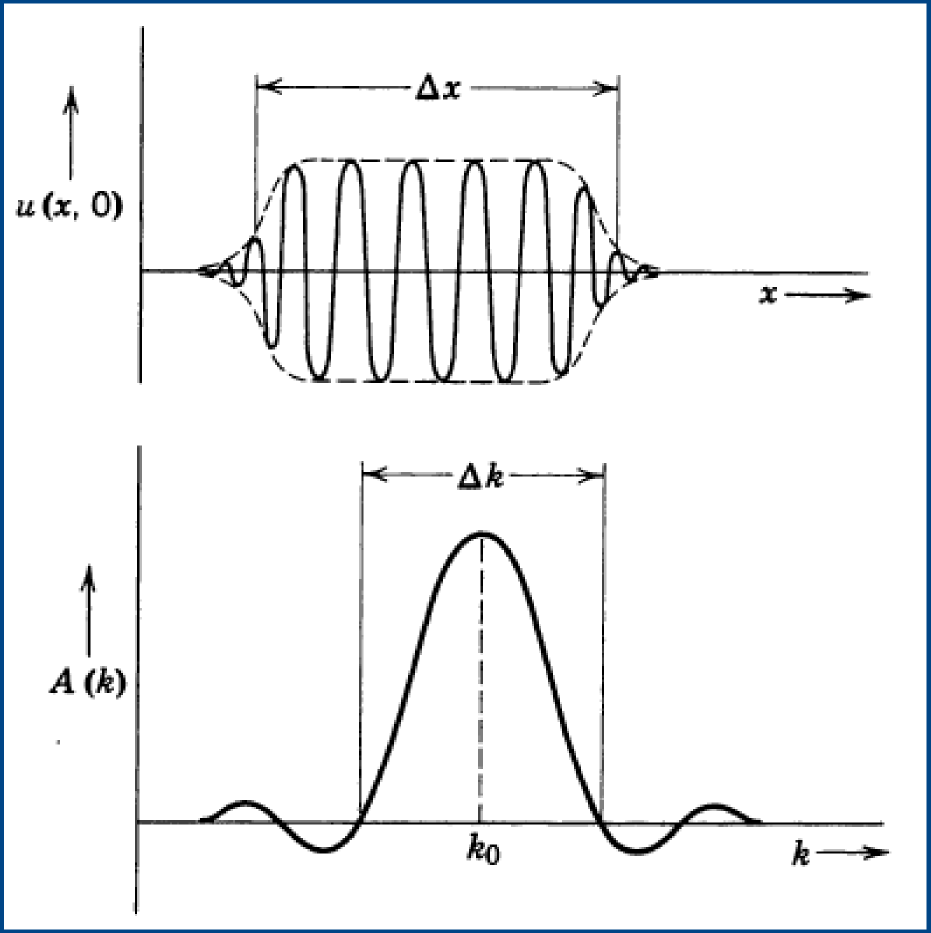


Fig. 1: tren de ondas armónicas de extension finita y su espectro de Fouries en número de ondas.

- Notar que para tiempo nulo, la solución $u(x,0) = e^{ik_0 x}$ no tiene por amplitud una delta. Más bien da una función con un máximo y un ancho $\sim \Delta k$, centrado en k_0.

- Notar que al tomar los valores rms como los deltas del numero de ondas y las frecuencia llegamos a la conocida desigualdad:
$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}.$$
Esta desigualdad es valida siempre que los pulsos no se corten violentamente.

Series e Integrales de Fourier

- Notemos que la desigualdad previamente mostrada tiene notable relevancia pues significa que trenes de onda corta, con algunas longitudes de onda, tendrán una muy amplia distribución de número de ondas de ondas monocromáticas.

Ahora, analisemos el **comportamiento del pulso**, o tren de ondas finito, **temporalmente**:

- Como el pulso tiene diferentes frecuencias, implica que se mueve a velocidad de fases distinta.

- Por lo tanto, se pierde la coherencia y se distoriona la forma del pulso.

Resolver la situación general es complicado, por lo que consideraremos el caso donde el ancho del pulso es pequeño, lo cual implica que la relacion de dispersión tiene la forma:

$$\omega(k) = \omega_0 + \frac{d\omega}{dk}(k - k_0)\Big]_0 + \cdots .$$

Series e Integrales de Fourier

Así, la solución para la relación de dispersión considerada es:

$$u(x,t) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i[k_0(d\omega/dk)|_0]-\omega_0 t]} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i[x-(d\omega/dk)|_0 t]k} dk$$

Usando la definición de $A(k)$ y su inversa, la integral anterior tiene soluion trivial bajo el cambio de variable $x' = x - d\omega/dk|_0 t,$ por lo cual llegamos:

$$u(x,t) \simeq u\left(x - \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_0 t, 0\right) e^{i[k_0(d\omega/dk)|_0]-\omega_0 t]}$$

Notese, dada la forma funcional de la función de onda, que el pulso viaja sin distorción en forma, con una velocidad llamada velocidad de grupo:

$$v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_0 .$$

Series e Integrales de Fourier

Además, si asociamos densidad de energía a la magnitud de la onda, el transporte de energía esta dado al considerar la velocidad de grupo, debido a que es la tasa a la cual el pulso viaja.

En ondas de luz, tenemos la conocida relación:

$$\omega(k) = \frac{ck}{n(k)} \quad \therefore \quad v_p = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{c}{n(k)}$$

Donde c es la rapidez de la luz y $n(k)$ es el índice de refracción.

Acorde a la definición de velocidad de grupo, tenemos para el último caso:

$$v_g = \frac{c}{n(\omega) + \omega(dn/d\omega)}.$$

Series e Integrales de Fourier

Algunas consideraciones importantes:

- Dispersión normal implica la condición
  $$\frac{dn}{d\omega} > 0, \quad n > 1.$$
  donde la velocidad del flujo de energía es menor que la velocidad de fase y también menor que la rapidez de la luz.
- En regiones anomalas, $dn/d\omega$ puede ser muy grande y negativo (esto será expuesto por) y la velocidad de grupo difiere fuertemente de la velocidad de fase.

  Vale decir que en este caso la velocidad de grupo podría violar la cota de la rapidez de la luz, sin embargo generalmente éste concepto no es usado en regiones de dispersión anómala.

Separación y propagación de pulsos en medios disipativos

Basados en los argumentos anteriores, aca mostraremos algunos calculos exactos la propagación de un pulso para un modelo de juguete.

Siendo mas precisos que en la sección previa, necesitamos condiciones iniciales sobre la funcion de onda y sobre la derivada temporal de esta.

Considerando que al tomar la parte real de la definición de la función de onda previamente definida, llegamos a

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} A(k)e^{ikx-i\omega(k)t}dk + \text{c.c.}.}$$

de donde al invertir llegamos a

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\left[u(x,0) + \frac{i}{\omega(k)}\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right]dx.$$

Separación y propagación de pulsos en medios disipativos

Luego, tomemos una función de prueba conveniente (gaussiana)

$$u(x,0) = e^{-x^2/2L^2}\cos(k_0 x),$$

Con la condicion inicial en la derivada

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

Lo cual significa que para tiempos previos que cero la onda consistió en dos pulsos, ambos moviendose hacia el origen y en tiempo igual a cero se unen para tener la forma gaussiana antes mostrada.

Ademas, se espera que la solución gaussiana se separe en dos paquetes identicos, uno que va hacia la derecha y otro a la izquierda.

La amplitud de Fourier para la función gaussiana viene por:

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} e^{-x^2/2L^2}\cos(k_0 x)dx.$$

Separación y propagación de pulsos en medios disipativos

Lo cual conduce a:

$$A(k) = \frac{1}{2}L\left[e^{-(L^2/2)(k-k_0)^2} + e^{-(L^2/2)(k+k_0)^2}\right]dx.$$

Notemos que la amplitud de Fourier presenta una simetría de inversion en el número de onda, esto es $A(k) = A(-k)$, lo cual se verifica por inspección.

Hasta ahora hemos mostrado lo que sucede para el tiempo igual a cero, sin embargo la situación tiempo dependiente requiere especificar la forma explicita de la relación de dispersión.

Como ejemplo, tomemos la relación siguiente:

$$\omega(k) = \nu\left(1 + \frac{1}{2}a^2k^2\right),$$

Separación y propagación de pulsos en medios disipativos

Así, la relación anterior aproxima bien la relación de dispersión para plasmas tenues. Así, la velocidad de grupo es:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}(k_0) = \frac{d}{dk}\nu\left(1 + \frac{1}{2}a^2k^2\right) = \nu a^2 k_0,$$

El comportamiento exacto de la onda es dada al considerar la expresión general enmarcada en el inicio de esta sección, esta es:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} A(k)e^{ikx-i\omega(k)t}dk + \text{c.c.}.$$

En combinación con la amplitud de Fourier. Así se llega a:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{e^{-\frac{(x-\nu a^2k_0t)^2}{2L^2\left(1+\frac{ia^2\nu t}{L^2}\right)}}}{\left(1+\frac{ia^2\nu t}{L^2}\right)^{1/2}}e^{ik_0x-i\nu\left(1+\frac{a^2k_0^2t}{2}\right)} + (k_0 \to -k_0)\right],$$

Separación y propagación de pulsos en medios disipativos

Donde la ecuación anterior representa dos pulsos viajando en direcciones opuestas. El pick de amplitud viaja con la velocidad de grupo antes calculada mientras que la modulación se mantiene de forma gaussiana.

Notemos que el ancho envolvente de la función gaussina no es constante y de hecho se incrementa con el tiempo acorde con:

$$L(t) = \sqrt{L^2 + \left(\frac{a^2 \nu t}{L}\right)^2},$$

Siendo los efectos disipativos más grandes en el tiempo. Sin embargo, se da un campio poco importante en la forma del pulso si se satisface que $L \gg a$.

Finalmente, para tiempos muy grandes, se tiene que:

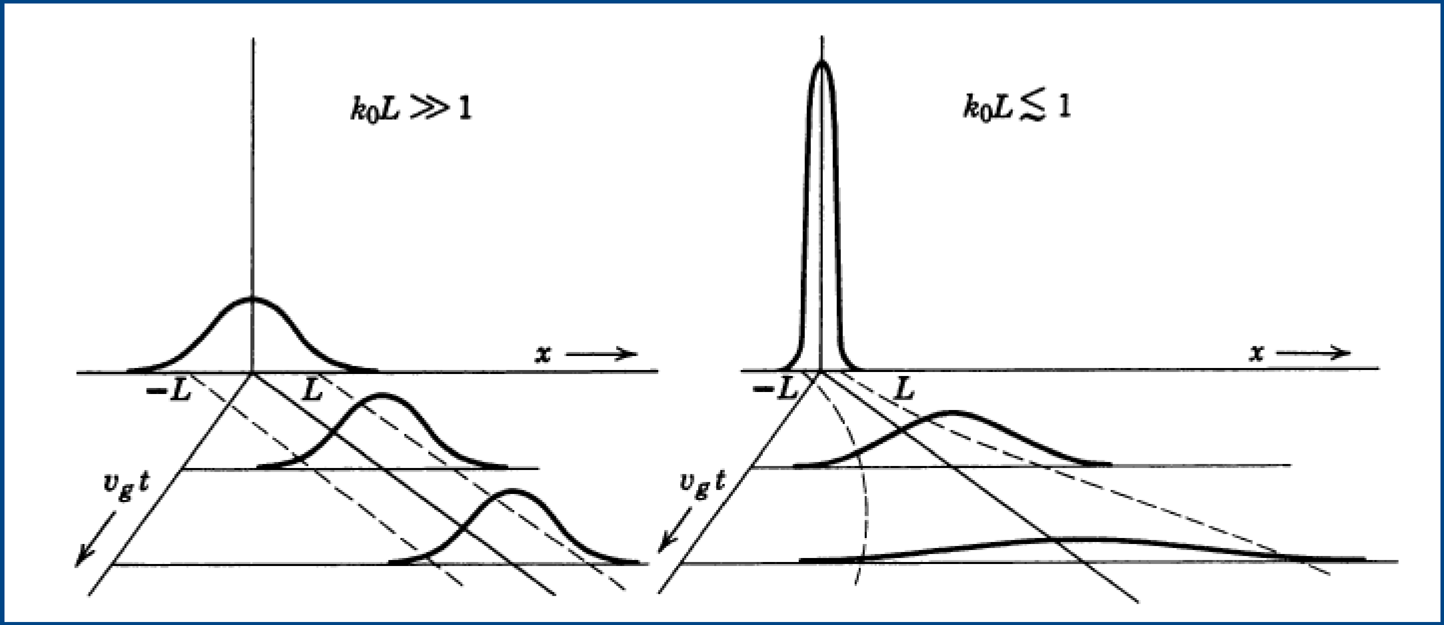
$$L(t) \to \frac{a^2 \nu t}{L}.$$

Separación y propagación de pulsos en medios disipativos

Una medida para estudiar lo rápido que el pulso se separa viene al comparar la longitud de la envolvente con una longitud definida por la velocidad de grupo:

$$\frac{L(t)}{v_g t} = \sqrt{L^2 + \left(\frac{a^2 \nu t}{L}\right)^2} \frac{1}{\nu a^2 k_0 t},$$

Veamos una ejemplo gráfico de esto:



Separación y propagación de pulsos en medios disipativos

Note que a pesar que esta discusión esta basada en un caso particular, es facilmente generalizable al recordar que en la sección anterior definimos una desigualdad valida en general para cualquier número de onda y longitud de onda.

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \omega' \quad \therefore \quad \delta v_g \sim \omega'' \delta k \sim \frac{\omega''}{\delta x_0}$$

Notemos que en el caso general dependiente del tiempo, se puede llegar a que la separación en posición es:

$$\delta x(t) \sim \sqrt{(\delta x_0)^2 + \left(\frac{\omega'' t}{\delta x_0}\right)^2}$$

Continuará

.

.

.

Fín!