Mapeos Conformes

Diego García

Pontificia Universidad Católica de Chile

ddgarcia@uc.cl

November 20, 2015

Panorama general

Objetivos

- Cimentar las bases de las funciones armónicas en el plano complejo, para la resolución de problemas de potencial que satisface la ecuación de Laplace.
- Entender las bases fundamentales de las transformaciones conformes.
- Comprender la aplicación de las transformaciones conformes a la solución de problemas electrostáticos.

Funciones armónicas

Sea el laplaciano de una función f, armónica, definida en coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se puede escribir la solución de esta ecuación como dos funciones $\phi, \psi \in \mathbb{R}$, tal que si $z = x + iy$

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \tag{2}$$

Ambas funciones ϕ y ψ satisfacen la ecuación (2), nuevamente a partir de las condiciones de Cauchy-Riemann. Las funciones ϕ y ψ se denominan *funciones conjugadas*.

Función corriente

Diferenciando con respecto a x y a y, podemos escribir explícitamente relaciones entre ϕ y ψ

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}(\phi + i\psi)\right)\\ &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}\\ &= f'(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial z}(\phi + i\psi)\right)\\ &= if'(z)\end{aligned}$$

Función corriente

A partir de estas ecuaciones podemos ver explícitamente las condiciones de Cauchy Riemann

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{3}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{4}$$

Las condiciones anteriores muestran que las familias de curvas $\psi = c_1$ y $\phi = c_2$ sean mutuamente ortogonales (c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$).

Respecto a la aplicación electrostática de esta teoría, podemos considerar a f(z) como el potencial complejo, y las funciones ϕ y ψ *la función corriente y la función potencial, respectivamente.*

Campo eléctrico

Sea f(z) el potencial complejo, entonces

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} - i\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial y} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}$$

Luego, si definimos el campo eléctrico como

$$E = -\left(\frac{df}{dz}\right)^{*} \tag{5}$$

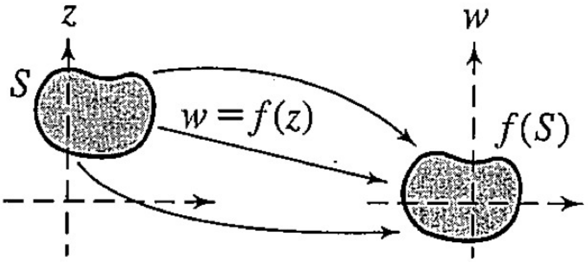
Entonces las componentes del campo eléctrico vienen dadas por

$$E_x = \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{6}$$

$$E_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{7}$$

Transformaciones conformes

Una transformación conforme es una función que mapea los puntos del plano $z = x + iy$, en el plano $w = u + iv$. Este mapeo posee inversa, preserva ángulos y es conforme en todos los puntos donde su derivada es distinta de cero.



Transformaciones bilineales

Las transformaciones bilineales se escriben de la forma

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \tag{8}$$

Y llevan círculos y rectas en círculos y rectas.

Ejemplo: el mapeo

$$w = \frac{z-1}{z+1}$$

Lleva los puntos del semiplano derecho en el círculo unitario.

Funciones para una línea de carga

El potencial para una línea de carga viene dado por

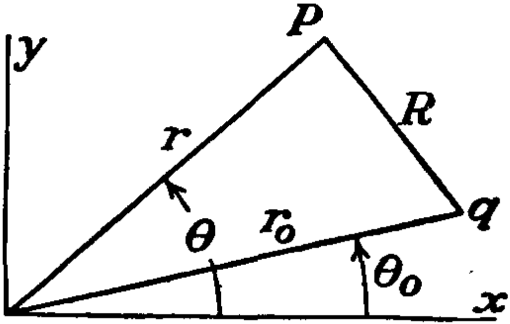
$$\phi(r) = -\frac{q}{2\pi\epsilon}\ln(r) \tag{9}$$

El potencial complejo lo podemos escribir como

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{q}{2\pi\epsilon}\ln(z) \\ &= -\frac{q}{2\pi\epsilon}(\ln(r) + i\theta) \\ &= -\frac{q}{2\pi\epsilon}\ln(x + iy) \\ &= -\frac{q}{2\pi\epsilon}\left(\ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + i\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right) \end{aligned}$$

Funciones para una línea de carga

Ahora es posible escribir el potencial complejo, para una línea de carga en z_0.



Funciones para una línea de carga

$$\begin{aligned}
\phi &= -\frac{q}{2\pi\epsilon}(\ln(R)) \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon}(\ln(|\vec{r}-\vec{r_0}|^2)) \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon}(\ln(r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\theta-\theta_0))) \\
&= -\frac{q}{2\pi\epsilon}\ln(\sqrt{A^2+B^2})
\end{aligned}$$

Luego, el potencial complejo viene dado por

$$f(z) = -\frac{q}{2\pi\epsilon}\ln(z-z_0) \tag{10}$$

La función potencial complejo, que describe el potencial para N líneas de corriente situadas en z_i con carga q_i, viene dado por

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi\epsilon}\sum_{i=1}^{N} q_i \ln(z-z_i) \tag{11}$$

Capacitancia entre dos cilindros circulares

Primero, escribimos el potencial complejo de dos líneas de carga $q = 2\pi\epsilon$ y $-q$ en las posiciones $y = a$ e $y = -a$, respectivamente. Así, podemos escribir el potencial de esta configuración como

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \ln\left(\frac{z+ia}{z-ia}\right) && (12)\\
&= 2i\cot^{-1}\left(\frac{z}{a}\right) && (13)
\end{aligned}
$$

$\forall z \neq \pm a.$

Capacitancia entre dos cilindros circulares

Resolviendo la expresión para z se obtiene que

$$\begin{aligned} z &= \frac{a\cot(u+iv)}{2i} \\ &= \frac{-a\sin(u/i)+a\sin(v)}{\cos(u/i)-\cos(v)} \end{aligned}$$

Separando la parte real e imaginaria, se obtiene que

$$x = \frac{a\sin(v)}{\cosh(u)-\cos(v)} \tag{14}$$

$$y = \frac{a\sinh(u)}{\cosh(u)-\cos(v)} \tag{15}$$

Capacitancia entre dos cilindros circulares

Eliminando V de las ecuaciones, podemos escribir que

$$x^2 + (y - a\coth(u))^2 = \frac{a^2}{\sinh^2(u)} \tag{16}$$

Eliminando u de las ecuaciones, podemos escribir que

$$(x - a\cot(v))^2 + y^2 = \frac{a^2}{cos^2(v)} \tag{17}$$

En términos de mapeos conformes

El problema descrito anteriormente, puede interpretarse en términos de transformaciones conformes. Esto lo podemos separar en 2 mapeos

1. El mapeo

$$w_1 = \frac{z + ia}{z - ia} \tag{18}$$

   Lleva puntos del semiplano superior sobre el círculo unitario. Este es un buen ejemplo de transformación bilineal.

2. El mapeo $w = e^z$ lleva la franja $0 \leq y \leq 2\pi$, $x \in \mathbb{R}$, en círculos. Por lo tanto, dado que el mapeo es conforme, entonces la transformación inversa lleva de círculos a franjas.

En términos de mapeos conformes

Por lo tanto, el mapeo

$$w = \ln\left(\frac{z+ia}{z-ia}\right) \tag{19}$$

Lleva los puntos de dos círculos, que pueden intersectarse o no, en la franja $0 \leq y \leq 2\pi$.

Respecto a nuestro problema electrostático, podemos volver a verificar (por supuesto), las ecuaciones (16) y (17).

Capacitancia

La capacitancia por unidad de longitud, entre los cilindros $u = u_1$ y $u = u_2$, se calcula dividiendo la carga por la diferencia de potencial. Sean R_1 y R_2 los radios de los cilindros, podemos escribir de la ecuación (16) que

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{a^2}{\sinh^2(u_1)} \\ R_2 &= \frac{a^2}{\sinh^2(u_2)} \end{aligned}$$

Y la distancia D entre los ejes

$$D = a(|\coth(u_1)| \pm |\coth(u_2)|) \tag{20}$$

Capacitancia

$$\begin{aligned} \cosh(u_2 - u_1) &= \cosh(u_2)\cosh(u_1) \pm |\sinh(u_2)\sinh(u_1)| \\ &= (|\coth(u_2)\coth(u_1)| \pm 1)\,|\sinh(u_2)\sinh(u_1)| \end{aligned}$$

Luego escribimos que

$$\pm 1 = \pm\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\coth^2(u_i) - \frac{1}{\sinh^2(u_i)}\right)$$

Con lo que obtenemos que

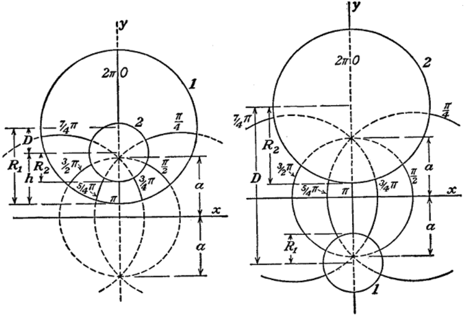
$$\cosh(u_2 - u_1) = \frac{\pm(\coth(u_2) - \coth(u_1))^2 \mp \frac{1}{\sinh^2(u_2)} \mp \frac{1}{\sinh^2(u_1)}}{2\left|\frac{1}{\sinh(u_1)\sinh(u_2)}\right|}$$

Capacitancia

Es posible demostrar que la capacitancia por unidad de longitud, con los datos que se tienen, puede escribirse como

$$C = 2\pi\epsilon \left[\cosh^{-1}\left(\pm\frac{D^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1R_2}\right)\right]^{-1} \qquad (21)$$

Donde el signo - es tomado cuando un cilindro está dentro de otro y $+$ cuando son externos.



(a) (b)

Referencias

Smythe
Static and Dynamic Electricity
Mc Graw Hill

Ruel V.Churchill & James Ward Brown
Variable compleja y aplicaciones
Quinta edición