Ondas Magnetohidrodinámicas

Leandro Monje Apablaza

Instituto de Física, Facultad de Física, Pontificia Universidad Católica de Chile

20 de Noviembre, 2015

1. Introducción

2. Descripción de la MHD
   - Primera suposición: un fluido ideal, perfectamente conductor
   - Velocidad de Alfvén
   - Onda Plana. Caso perpendicular/paralelo.
   - Ejemplos

3. Campos Magnéticos para las ondas posibles
   - Comportamiento de las líneas de fuerza

Introducción

La magnetohidrodinámica (MHD) es una disciplina que estudia fluidos conductores en presencia de campos electromagnéticos. Ejemplo de estos fluidos son:

- Plasmas,

Introducción

La magnetohidrodinámica (MHD) es una disciplina que estudia fluidos conductores en presencia de campos electromagnéticos. Ejemplo de estos fluidos son:

- Plasmas,
- metales líquidos.

Introducción

La magnetohidrodinámica (MHD) es una disciplina que estudia fluidos conductores en presencia de campos electromagnéticos. Ejemplo de estos fluidos son:

- Plasmas,
- metales líquidos.

el concepto MHD fue inicialmente introducido a principios de la década de 1940 por Hannes Alfvén.

Descripción de la MHD

Generalmente se analiza la propagación de ondas en términos de un dieléctrico constante en un plasma diluido con un campo magnético externo sin colisiones.

Descripción de la MHD

Generalmente se analiza la propagación de ondas en términos de un dieléctrico constante en un plasma diluido con un campo magnético externo sin colisiones.
Las MHD es descrita por un sistema de ecuaciones donde:

Descripción de la MHD

Generalmente se analiza la propagación de ondas en términos de un dieléctrico constante en un plasma diluido con un campo magnético externo sin colisiones.
Las MHD es descrita por un sistema de ecuaciones donde:
Un fluido conductor (o gas densamente ionizado) tal que ocurran colisiones suficientemente rápidas para que la ley de Ohm se mantenga para un amplio rango de frecuencias. Que bajo la acción de un campo los electrones e iones se muevan sin separación de carga (aunque puede haber flujo de corriente).

Descripción de la MHD

Generalmente se analiza la propagación de ondas en términos de un dieléctrico constante en un plasma diluido con un campo magnético externo sin colisiones.

Las MHD es descrita por un sistema de ecuaciones donde:

Un fluido conductor (o gas densamente ionizado) tal que ocurran colisiones suficientemente rápidas para que la ley de Ohm se mantenga para un amplio rango de frecuencias. Que bajo la acción de un campo los electrones e iones se muevan sin separación de carga (aunque puede haber flujo de corriente).

Entonces los campos eléctricos se deben a cargas externas, flujos de corrientes, o campos magnéticos variables en el tiempo. Y además, el movimiento mecánico (no relativista) se deba a la dinámica de fluidos, usando variables usuales de densidad, velocidad y presión.

Descripción de la MHD

Las ecuaciones relevantes para comenzar son:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \qquad \mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{2}$$

donde la última ecuación es la ley de Ohm generalizada para un fluido en movimiento. Además considerando la ecuación de difusión para inducción magnética

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \mathbf{B}, \tag{3}$$

con la permeabilidad y conductividad independientes de la posición.

Suponiendo un fluido ideal, perfectamente conductor

Ahora supongamos un fluido compresible, no viscoso y "perfectamente conductor" que está en ausencia de gravedad, pero con un campo magnético externo. Dado que se tiene conductor perfecto (σ muy grande), podemos despreciar el último término de (3). Por otro lado, las ecuaciones de hidrodinámica son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p - \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}). \end{aligned} \tag{4}$$

La primera ecuación es conservación de materia, la segunda es la ecuación de movimiento de Newton con densidad de fuerza de presión mecánica y donde la densidad de fuerza magnética, $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$, se le reemplaza $\mathbf{J}$ por $\nabla \times \mathbf{H}$.

Fuerza Magnética

La fueza magnética puede ser escrita como

$$-\frac{1}{\mu}\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\nabla\left(\frac{1}{2\mu}\mathbf{B}^2\right) + \frac{1}{2}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} \tag{5}$$

el primer término representa un gradiente de presión magnética, el segundo es una tensión adicional. Además, las ecuaciones mecánicas deben ser complementadas con una ecuación de estado.

Ecuación de estado

Idea para la ecuación de estado

En ausencia de un campo magnético, las ecuaciones mecánicas pueden describir ondas (sonoras) de pequeñas amplitudes, longitudinales y compresibles a cierta rapidez s, el cuadrado del cual es la derivada de la presión p con respecto a la densidad ρ a entropía constante.
Con una ley de gas adiabático, $p = K\rho^{\gamma}$, donde γ es la razón de calores específicos, se tiene que $s^2 = \gamma p_0/\rho_0$.

Ecuación de estado

Idea para la ecuación de estado

En ausencia de un campo magnético, las ecuaciones mecánicas pueden describir ondas (sonoras) de pequeñas amplitudes, longitudinales y compresibles a cierta rapidez s, el cuadrado del cual es la derivada de la presión p con respecto a la densidad ρ a entropía constante.
Con una ley de gas adiabático, $p = K\rho^\gamma$, donde γ es la razón de calores específicos, se tiene que $s^2 = \gamma p_0/\rho_0$.

Por analogía entonces, ondas longitudinales en MHD en un fluido conductor en un campo externo B_0 será del orden

$$v_{\mathrm{MHD}} = O\left(\sqrt{{B_0}^2/2\mu\rho_0}\right)$$

Condiciones para las ondas

Para captar estas ondas, consideramos las ecuaciones de movimiento (3) y (4), ya despreciando el término $\nabla^2 \mathbf{B}/\mu\sigma$ en (3). Podemos tomar una configuración con pequeñas perturbaciones para una indución magnética a lo largo de un fluido de densidad constante,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t), \\ \rho &= \rho_0 + \rho_1(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \tag{6}$$

Condiciones para las ondas

Si las ecuaciones mecánicas (4) y de difusión (3) están linealizadas en pequeñas cantidades, entonces quedan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} + s^2 \nabla \rho_1 + \frac{\mathbf{B}_0}{\mu} \times (\nabla \times \mathbf{B}_1) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

donde s^2 es el cuadrado de la velocidad del sonido.

Velocidad de Alfvén

Estas ecuaciones si se combinan llevan a una ecuación para $\mathbf{v_1}$:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial t^2} - s^2 \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{v}_1 \right) + \mathbf{v}_A \times \nabla \times \left[\nabla \times \left(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_A \right) \right] = 0 \qquad (8)$$

Velocidad de Alfvén

Estas ecuaciones si se combinan llevan a una ecuación para $\mathbf{v_1}$:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial t^2} - s^2 \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{v}_1 \right) + \mathbf{v}_A \times \nabla \times \left[\nabla \times \left(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_A \right) \right] = 0 \tag{8}$$

En este punto hemos introducido la *velocidad de Alfvén* vectorial:

$$\mathbf{v}_A = \frac{\mathbf{B}_0}{\sqrt{\mu \rho_0}} \tag{9}$$

Veamos las soluciones de la ec. (8) en los casos más simples, propagación paralela y perpendicular a la dirección del campo magnético.

Onda Plana, caso perpendicular

Consideremos para $\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t)$ una onda plana con vector de onda $\mathbf{k}$ y frecuencia ω:

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_1 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t} \tag{10}$$

Onda Plana, caso perpendicular

Consideremos para $\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t)$ una onda plana con vector de onda $\mathbf{k}$ y frecuencia ω:

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_1 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t} \tag{10}$$

La ecuación de onda queda

$$\begin{aligned} -\omega^2 \mathbf{v}_1 + (s^2 + {v_A}^2)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1)\,\mathbf{k} + \mathbf{v}_A\cdot\mathbf{k}[(\mathbf{v}_A\cdot\mathbf{k})\,\mathbf{v}_1 \\ -(\mathbf{v}_A\cdot\mathbf{v}_1)\,\mathbf{k} - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1)\,\mathbf{v}_A] &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Notar que si $\mathbf{k}$ es perpendicular a $\mathbf{v_A}$ el último término desaparece. De modo que la solución para $\mathbf{v_1}$ es una onda magnetosónica longitudinal con una velocidad de fase:

$$u_{\text{long}} = \sqrt{s^2 + v_A^2} \tag{12}$$

Onda Plana, caso paralelo

Si $\mathbf{k}$ es paralelo a $\mathbf{v}_A$ entonces se tiene

$$(k^2 v_A^2 - \omega^2)\mathbf{v}_1 + \left(\frac{s^2}{v_A^2} - 1\right) k^2 (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_A = 0 \tag{13}$$

en este caso hay dos tipos de movimientos de onda posibles.

Onda Plana, caso paralelo

Si $\mathbf{k}$ es paralelo a $\mathbf{v}_A$ entonces se tiene

$$(k^2 v_A^2 - \omega^2)\mathbf{v}_1 + \left(\frac{s^2}{v_A^2} - 1\right) k^2 (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_A = 0 \tag{13}$$

en este caso hay dos tipos de movimientos de onda posibles.

- Hay una onda longitudinal ordinaria ($\mathbf{v}_1$ paralela a $\mathbf{k}$ y $\mathbf{v}_A$) con una velocidad de fase igual a la velocidad del sonido s.

Onda Plana, caso paralelo

Si $\mathbf{k}$ es paralelo a $\mathbf{v}_A$ entonces se tiene

$$(k^2 v_A^2 - \omega^2)\mathbf{v}_1 + \left(\frac{s^2}{v_A^2} - 1\right) k^2(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_A = 0 \tag{13}$$

en este caso hay dos tipos de movimientos de onda posibles.

- Hay una onda longitudinal ordinaria ($\mathbf{v}_1$ paralela a $\mathbf{k}$ y $\mathbf{v}_A$) con una velocidad de fase igual a la velocidad del sonido s.
- Pero también hay una onda tranversal ($\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_A = 0$) con una velocidad de fase igual a la velocidad de Alfvén v_A

Onda Plana, caso paralelo

Si $\mathbf{k}$ es paralelo a $\mathbf{v}_A$ entonces se tiene

$$(k^2 v_A^2 - \omega^2)\mathbf{v}_1 + \left(\frac{s^2}{v_A^2} - 1 \right) k^2 (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_A = 0 \tag{13}$$

en este caso hay dos tipos de movimientos de onda posibles.

- Hay una onda longitudinal ordinaria ($\mathbf{v}_1$ paralela a $\mathbf{k}$ y $\mathbf{v}_A$) con una velocidad de fase igual a la velocidad del sonido s.
- Pero también hay una onda tranversal ($\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_A = 0$) con una velocidad de fase igual a la velocidad de Alfvén v_A

Esta onda de Alfvén es un fenómeno puramente magnetohidrodinámico, que depende solo del campo magnético y la densidad.

Dos casos interesantes

Supongamos dos casos posibles:

- Para el mercurio a temperatura ambiente la velocidad de Alfvén es $7.67B_0$ m/s [1] y se compara con la velocidad del sonido, $1.45 \cdot 10^3$ m/s. La velocidad de Alfvén es mucho menor que la velocidad del sonido
- En un caso astrofísico, la velocidad de Alfvén es mucho más importante debido a densidades bastante menores.

[1] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, p. 321

[2] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, p. 322

Dos casos interesantes

Supongamos dos casos posibles:

- Para el mercurio a temperatura ambiente la velocidad de Alfvén es $7.67B_0$ m/s [1] y se compara con la velocidad del sonido, $1.45 \cdot 10^3$ m/s. La velocidad de Alfvén es mucho menor que la velocidad del sonido
- En un caso astrofísico, la velocidad de Alfvén es mucho más importante debido a densidades bastante menores.
  Por ejemplo, en la fotósfera del Sol, la densidad es del orden de 10^{-4} kg/m^3 [2] dejando $v_A \approx 10^5 B$ m/s. Con un campo magnético aproximado del orden de 1 a $2 \cdot 10^{-4}$ T. Comparando, la velocidad del sonido aquí es del orden de 10^4 m/s.

[1] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, p. 321

[2] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, p. 322

Analizando el campo magnético

El campo magnético en estas diferentes ondas se pueden hallar de la tercera ecuación de (7)

$$\mathbf{B}_1 = \begin{cases} \frac{k}{\omega} v_1 \mathbf{B}_0 & \text{para } \mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0 \\ 0 & \text{para } \mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0 \text{ longitudinal} \\ -\frac{k}{\omega} B_0 \mathbf{v}_1 & \text{para } \mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0 \text{ transversal} \end{cases} \tag{14}$$

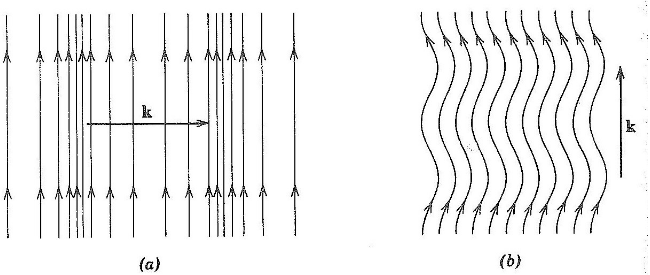

Figure : Ondas Magnetohidrodinámicas

- Ondas magnetosónicas que se mueven perpendicular al campo $\mathbf{B}_0$ causan compresión y rarefacción en las líneas sin cambiar su dirección, Figura (a).
- Ondas de Alfvén paralelas a $\mathbf{B}_0$ hacen que las líneas de fuerza oscilen lateralmente, Figura (b).

Referencias

John David Jackson
Classical Electrodynamics
7.7 Magnetohydrodynamic Waves, 319 – 322.

Gracias.