

Consideremos la ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

Buscamos una solución por el método de separación de variables:

$$\phi(x, y, z) = A(x)B(y)C(z)$$

$$A''BC + AB''C + ABC'' = 0$$

/ABC

$$\frac{A''}{A} + \frac{B''}{B} + \frac{C''}{C} = 0$$

$$\frac{A''}{A} = -\alpha^2 \quad \frac{B''}{B} = -\beta^2 \quad \frac{C''}{C} = \gamma^2, \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$\Phi = e^{\pm i\alpha x} e^{\pm i\beta y} e^{\pm \gamma z}$$

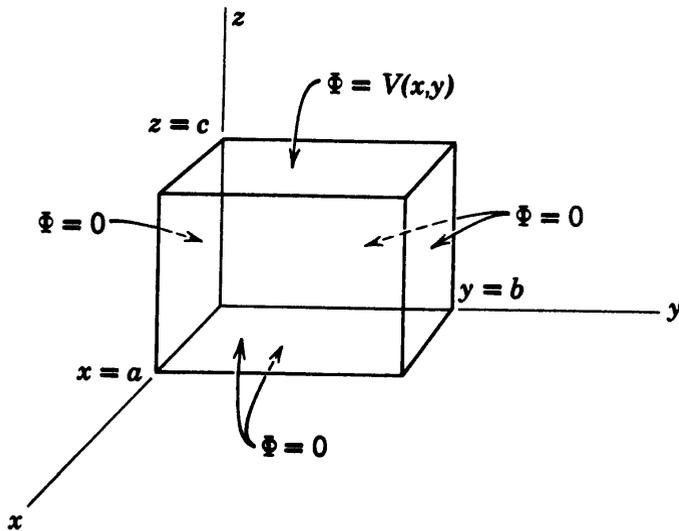


Figura 1.

$$\Phi(x, y, c) = V(x, y)$$

Condición de borde en  $x: A(0) = A(a) = 0$ ,

$$A(x) = \text{sen}(\alpha x), \alpha a = n\pi, n = 1, \dots$$

Condición de borde en  $y: B(0) = B(b) = 0$ ,

$$B(y) = \text{sen}(\beta y), \beta b = m\pi, m = 1, \dots$$

Condición de borde en  $z: C(0) = 0$ ,

$$C(z) = \text{senh}(\gamma z)$$

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n,m} f_{nm} \text{sen}(\alpha_n x) \text{sen}(\beta_n y) \text{senh}(\gamma_{nm} z)$$

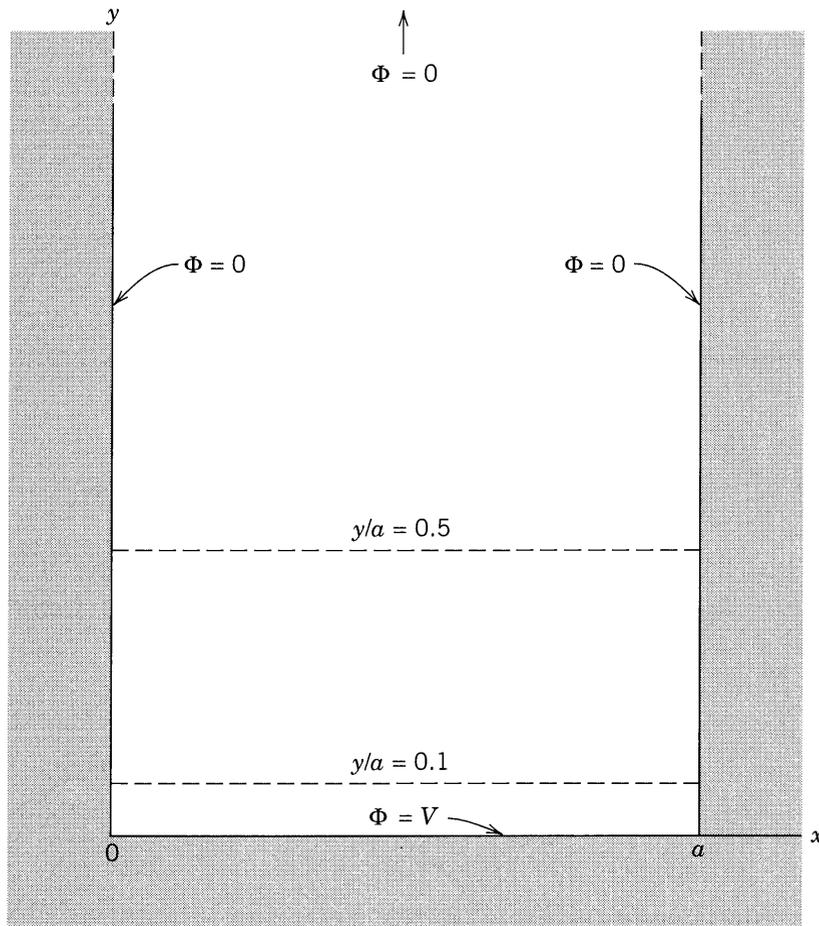
Condición de borde en  $z = c$ :

$$V(x, y) = \sum_{n,m} f_{nm} \text{sen}(\alpha_n x) \text{sen}(\beta_n y) \text{senh}(\gamma_{nm} c)$$

$$\int_0^a dx \text{sen}(\alpha_n x) \text{sen}(\alpha_k x) = \frac{1}{2} \int_0^a dx \{ \cos(\alpha_n - \alpha_k)x - \cos(\alpha_n + \alpha_k)x \} =$$
$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\text{sen}(\alpha_n + \alpha_k)x}{\alpha_n + \alpha_k} - \frac{\text{sen}(\alpha_n - \alpha_k)x}{\alpha_n - \alpha_k} \right\} \Big|_0^a = 0 \quad n \neq k$$

$$= \frac{1}{2a}, n = k$$

$$f_{nm} = \frac{4}{a b \sinh(\gamma_{nm} c)} \int_0^a dx \int_0^b dy V(x, y) \text{sen}(\alpha_n x) \text{sen}(\beta_n y)$$



**Figura 2.**

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{-\frac{n\pi y}{a}}$$

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad f_n = \frac{2}{a} \int_0^a dx V \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \frac{2}{a} V \frac{a}{n\pi} (-\cos(n\pi) + 1)$$

$$= \frac{4V}{n\pi}, \quad n \text{ impar.}$$

$$\Phi(x, y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{-\frac{n\pi y}{a}}$$

$$\Phi(x, y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{-\frac{n\pi y}{a}}$$

$$= \frac{4V}{\pi} \text{Im} \sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(\frac{in\pi x}{a}\right) e^{-\frac{n\pi y}{a}}, \quad Z = e^{i\frac{\pi}{a}(x+iy)}$$

$$\Phi(x, y) = \frac{4V}{\pi} \text{Im} \sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{1}{n} Z^n = \frac{2V}{\pi} \text{Im}(\ln(1+Z) - \ln(1-Z)) =$$

$$\frac{2V}{\pi} \text{Im}\left(\ln\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)\right)$$

$$\frac{1+Z}{1-Z} = \frac{(1+Z)(1-Z^*)}{|1-Z|^2} = \frac{1+Z-Z^*-|Z|^2}{|1-Z|^2} = u + iv$$

$$\ln\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right) = \text{arctg}\left(\frac{2 \text{Im} Z}{1-|Z|^2}\right) = \text{arctg}\left(\frac{2e^{-\frac{\pi y}{a}} \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)}{1-e^{-\frac{2\pi y}{a}}}\right)$$

$$\Phi(x, y) = \frac{2V}{\pi} \text{arctg}\left(\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)}{\text{senh}\left(\frac{\pi y}{a}\right)}\right)$$

La rama de la tangente es  $(0, \frac{\pi}{2})$ .

- La solución bidimensional que encontramos está relacionada al análisis complejo.
- Debido a las condiciones de Cauchy-Riemann que satisface una función analítica  $f(z)$ ,  $\text{Im}(f(z))$  y  $\text{Re}(f(z))$  satisfacen la ecuación de Laplace.

Tema de charla: Métodos de variable compleja para encontrar el potencial en dos dimensiones.

En coordenadas esféricas el laplaciano es:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi(r, \theta, \varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \phi(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} = 0$$

Buscamos una solución por el método de separación de variables:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$$

de modo que la ecuación queda:

$$\frac{1}{R(r)} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{Y(\theta, \varphi)} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{Y(\theta, \varphi)} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} = 0$$

reordenando términos se puede escribir como

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) = -\frac{1}{Y(\theta, \varphi)} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right]$$

nótese que la parte izquierda de esta ecuación no depende de las variables de la parte derecha y viceversa, esto quiere decir que la única forma de satisfacer la igualdad es que ambas partes sean igual a una constante, para que la solución sea físicamente aceptable, la constante de separación debe ser  $l(l+1)$  de modo que se obtienen dos ecuaciones.

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) = l(l+1)R(r)$$

Ansatz:  $R = Ar^a$

$$a(a+1)Ar^a = Al(l+1)r^a,$$

$$a^2 + a - l(l+1) = 0$$

$$a = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + l(l+1)}, \quad a = l, -(l+1)$$

$$R(r) = A_l r^l + B_l r^{-l-1}$$

El potencial es independiente de  $\varphi$ . Esto es  $m = 0$ .

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta} \right) + l(l+1)A(\theta) = 0$$

Sea  $x = \cos \theta$

$$\frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta} = A' \quad (-\sin \theta)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta} \right) = \frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{d}{dx} A$$

La ecuación para  $A$  es:

$$\frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{d}{dx} A + l(l+1)A = 0$$

Esta es la ecuación de Legendre. Sus soluciones son los Polinomios de Legendre.

Cada polinomio de Legendre  $P_n(x)$  es un polinomio de grado  $n$ . Éste puede ser expresado usando la **Fórmula de Rodrigues**:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad n = l.$$

Una importante propiedad de los polinomios de Legendre es que éstos son ortogonales con respecto al producto escalar definido en  $L^2$  en el intervalo  $-1 \leq x \leq 1$ :

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}$$

(donde  $\delta_{mn}$  denota la delta de Kronecker, igual a 1 si  $m = n$  y 0 para otros casos). De hecho, una derivación alternativa de los polinomios de Legendre es llevando a cabo procesos de Gram-Schmidt en los polinomios  $1, x, x^2, \dots$  con respecto a un producto interno. La razón de esta propiedad de ortogonalidad es que la ecuación diferencial de Legendre puede ser vista como un problema de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d}{dx} P(x) \right] = -\lambda P(x),$$

donde los valores propios  $\lambda$  corresponden a  $n(n+1)$ .

<b>n</b>	$P_n(x)$
0	1
1	$x$
2	$\frac{1}{2} (3x^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2} (5x^3 - 3x)$
4	$\frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3)$
5	$\frac{1}{8} (63x^5 - 70x^3 + 15x)$
6	$\frac{1}{16} (231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$
7	$\frac{1}{16} (429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$
8	$\frac{1}{128} (6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)$
9	$\frac{1}{128} (12155x^9 - 25740x^7 + 18018x^5 - 4620x^3 + 315x)$
10	$\frac{1}{256} (46189x^{10} - 109395x^8 + 90090x^6 - 30030x^4 + 3465x^2 - 63)$



Legendre Polynomials

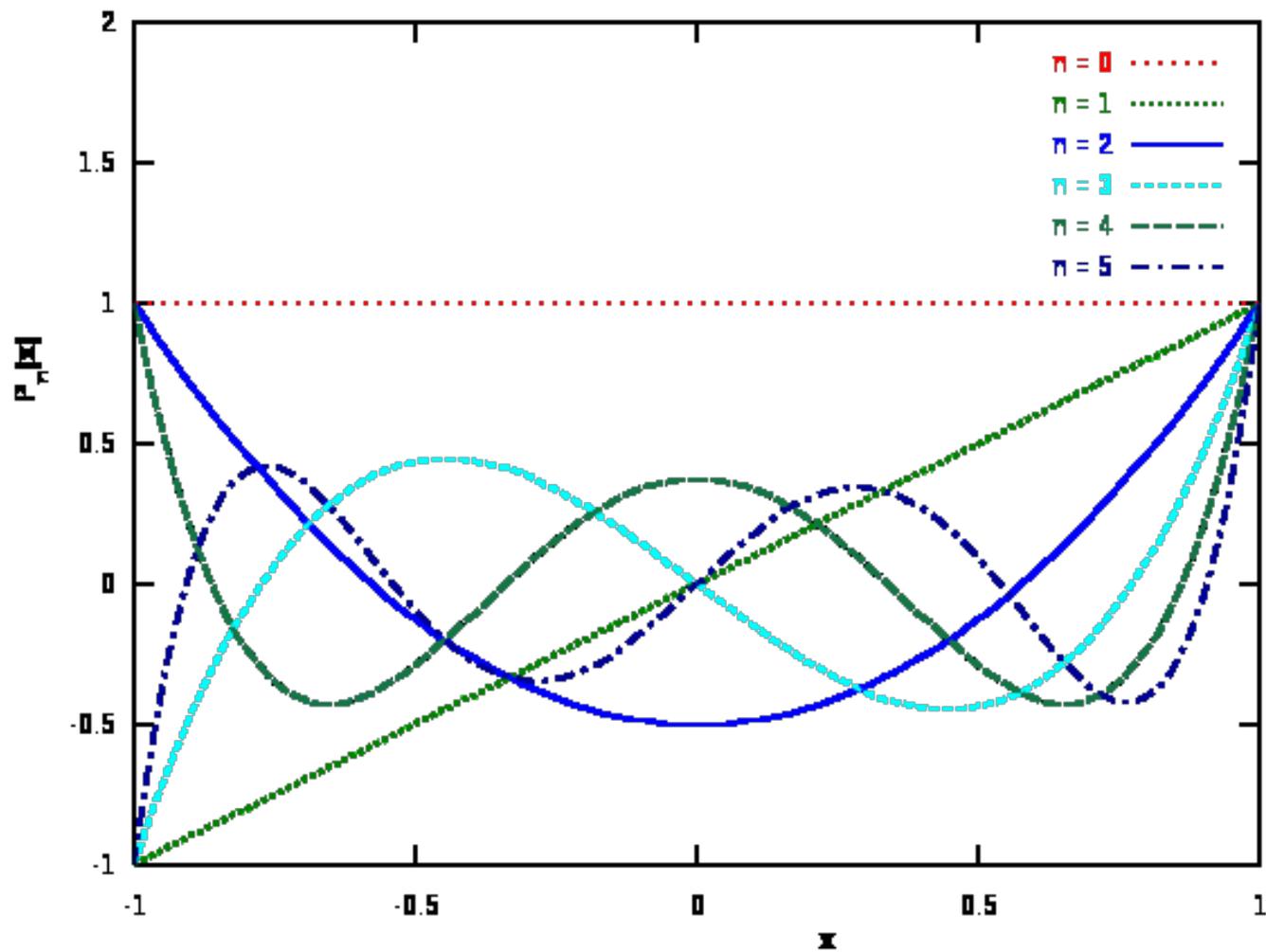


Figura 3.

Los polinomios de Legendre son simétricos o antisimétricos, tal que

$$P_k(-x) = (-1)^k P_k(x).$$

Desde que la ecuación diferencial y la propiedad ortogonal son escalarmente independientes, los polinomios de Legendre definidos son estandarizados (a veces llamados normalizados, pero nótese que la real norma no es la unidad) por ser escalar tal que

$$P_k(1) = 1.$$

La derivada en un punto final está dado por

$$P_k'(1) = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Los polinomios de Legendre pueden construirse usando las tres relaciones de recurrencia

$$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}$$

y

$$\frac{x^2-1}{n} \frac{d}{dx} P_n = xP_n - P_{n-1}.$$

Útil para la integración de polinomios de Legendre es

$$(2n+1)P_n = \frac{d}{dx} [P_{n+1} - P_{n-1}].$$

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} [ A_{\ell} r^{\ell} + B_{\ell} r^{-(\ell+1)} ] P_{\ell}(\cos \theta).$$

Supongamos que se da el potencial sobre la superficie de una esfera de radio  $a$ :  $\Phi(a, \theta) = V(\theta)$ .

Encontrar el potencial al interior de la superficie esférica:

- No hay cargas en el origen:  $B_{\ell} = 0$
- $V(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} a^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)$
- $A_{\ell} = \frac{2l+1}{2a^{\ell}} \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta V(\theta) P_{\ell}(\cos \theta)$

Ejemplo:  $V(\theta) = \begin{cases} V, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ -V, \frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi \end{cases}$

$$\begin{aligned} A_l &= \frac{2l+1}{2a^l} V \left[ \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta P_{\ell}(\cos \theta) - \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \sin \theta P_{\ell}(\cos \theta) \right] = \\ & \frac{2l+1}{2a^l} V \left[ \int_0^1 dx P_{\ell}(x) - \int_{-1}^0 dx P_{\ell}(x) \right] = \\ & \frac{2l+1}{2a^l} V \int_0^1 dx (P_{\ell}(x) - P_{\ell}(-x)) = \frac{2l+1}{2a^l} V (1 - (-1)^l) \int_0^1 dx P_{\ell}(x) \end{aligned}$$

De la fórmula de Rodrigues:  $\int_0^1 dx P_\ell(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{\ell-1}{2}} \frac{(\ell-2)!!}{2\left(\frac{\ell+1}{2}\right)!}$

Da el mismo resultado obtenido con el método de imágenes.

La serie  $\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} [ A_{\ell} r^{\ell} + B_{\ell} r^{-(\ell+1)} ] P_{\ell}(\cos \theta)$  con los coeficientes fijos, da una única solución a la ecuación de Laplace. Por esto se pueden usar casos particulares sencillos para determinar los coeficientes.

Ejemplo: Supongamos conocido el potencial sobre el eje  $z > 0$ ,  $\theta = 0$ .

$$\Phi(r = z, 0) = \sum_{\ell=0}^{\infty} [ A_{\ell} r^{\ell} + B_{\ell} r^{-(\ell+1)} ] = V(r). \quad z > 0.$$

Expandiendo  $V(r)$  en potencias de  $r$  determinamos los coeficientes.

Ejercicio 1: Mostrar usando la función de Green encontrada con el método de imágenes que para la esfera con los dos hemisferios con potencial opuesto, sobre  $z > 0$  se tiene:

$$V(z) = V \left[ 1 - \frac{z^2 - a^2}{z\sqrt{z^2 + a^2}} \right]$$

Ejercicio 2: Encontrar  $A_{\ell}, B_{\ell}$  expandiendo  $V$ .

Los polinomios de Legendre son útiles en el desarrollo por serie, de funciones como

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos\gamma)$$

donde  $r$  y  $r'$  son las longitudes de los vectores  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}'$  respectivamente y  $\gamma$  es el ángulo entre los dos vectores.  $r_{<} = \min\{r, r'\}$ . Esta expresión esta usada, por ejemplo, para obtener el potencial de una carga puntual, que se siente en un punto  $\mathbf{x}$  mientras la carga esta localizada en el punto  $\mathbf{x}'$ . La expansión usando polinomios de Legendre puede ser útil para integrar esta expresión sobre una carga continua distribuida.

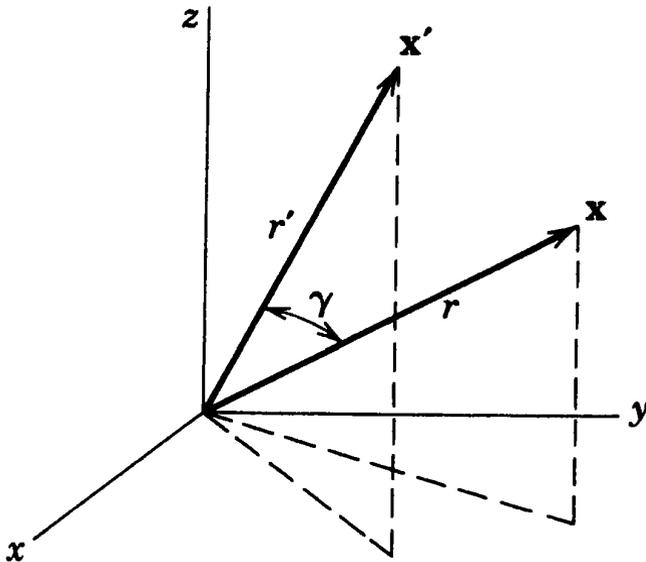


Figura 4.

D: Tomemos el sistema de coordenadas tal que  $\mathbf{x}'$  está a lo largo del eje  $z$ .

Ahora el potencial tiene simetría azimutal.

$$\Phi(r, \gamma) = \sum_{\ell=0}^{\infty} [ A_{\ell} r^{\ell} + B_{\ell} r^{-(\ell+1)} ] P_{\ell}(\cos \gamma)$$

Evaluamos el potencial sobre el eje  $z$ :

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^l, \quad r > r', A_l = 0, B_l = (r')^l$$
$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{r}{r'} \right)^l, \quad r < r', B_l = 0, A_l = (r')^{-l-1}$$

Armónicos esféricos:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} + l(l+1)Y(\theta, \varphi) = 0$$

La solución a esta ecuación es

$$Y(\theta, \varphi) = A_l^m e^{im\varphi} P_l^m(\cos \theta)$$

con

$$A_l^m = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}$$

y los  $P_l^m(\cos \theta)$  los polinomios asociados de Legendre. Estos polinomios son finitos en 0 y  $\pi$  como lo requiere la función potencial aceptable, la forma de construir los polinomios es entre otras, mediante la fórmula de Rodrigues que para estos polinomios es

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{|m|/2} \frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}} (x^2-1)^l$$

evaluando después la en  $x = \cos \theta$ , la razón por la que la constante de separación se eligió como  $l(l+1)$  fue justamente para que la solución fueran estos polinomios, dado que además de ser una solución conocida a la ecuación, es físicamente aceptable, la otra constante  $m$  aparece al aplicar el método de separación a la ecuación de los armónicos esféricos.

- $\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} + l(l+1)Y(\theta, \varphi) = 0$
- $Y(\theta, \varphi) = A(\theta)B(\varphi)$
- $\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta} \right) B(\varphi) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 B(\varphi)}{\partial \varphi^2} A(\theta) + l(l+1)A(\theta)B(\varphi) = 0, /A(\theta)B(\varphi)$
- $\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta} \right) A(\theta)^{-1} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 B(\varphi)}{\partial \varphi^2} B(\varphi)^{-1} + l(l+1) = 0, \sin^2 \theta$
- $\frac{\partial^2 B(\varphi)}{\partial \varphi^2} B(\varphi)^{-1} = -m^2, B(\varphi) = a e^{im\varphi} + b e^{-im\varphi}, B(\varphi + 2\pi) = B(\varphi)$
- $e^{im\varphi} = e^{im\varphi} e^{i2\pi m}, m \in \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta} \right) + \left( l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) A(\theta) = 0$
- $A_{lm}(\theta) = \frac{(\sin \theta)^{|m|}}{2^l l!} \left[ \frac{d}{d(\cos \theta)} \right]^{l+|m|} (\cos^2 \theta - 1)^l$ , funciones asociadas de Legendre.

Ver E.T. Copson "Introduction to the theory of complex variables" Capítulo 11.

- $A_{lm}(\theta)$  debe ser finita en  $\theta = 0, \pi$ . Por lo tanto  $l = 0, 1, 2, \dots$ . Además  $2l \geq l + |m|, l \geq |m|$

$$Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

$$Y_1^{-1}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi}$$

$$Y_1^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta$$

$$Y_1^1(\theta, \varphi) = \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta e^{i\varphi}$$

$$Y_2^{-2}(\theta, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\varphi}$$

$$Y_2^{-1}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{-i\varphi}$$

$$Y_2^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (3\cos^2 \theta - 1)$$

$$Y_2^1(\theta, \varphi) = \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi}$$

$$Y_2^2(\theta, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi}$$

$$Y_3^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{7}{\pi}} (5\cos^3 \theta - 3\cos \theta)$$

$$\int_{-1}^1 dx P_{l'}^m(x) P_l^m(x) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'}, \text{ Ortogonalidad}$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Completitud:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta(\phi - \phi') \delta(\cos\theta - \cos\theta')$$

$$g(\theta, \phi) = \sum A_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

$$A_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \phi) g(\theta, \phi)$$

La serie en  $\theta = 0$  no puede depender de  $\phi$ : Sólo  $m = 0$  contribuye.

$$g(0, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} A_{l0} \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}}$$

$$A_{l0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int d\Omega P_l(\cos \theta) g(\theta, \phi)$$

La solución general a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas es:

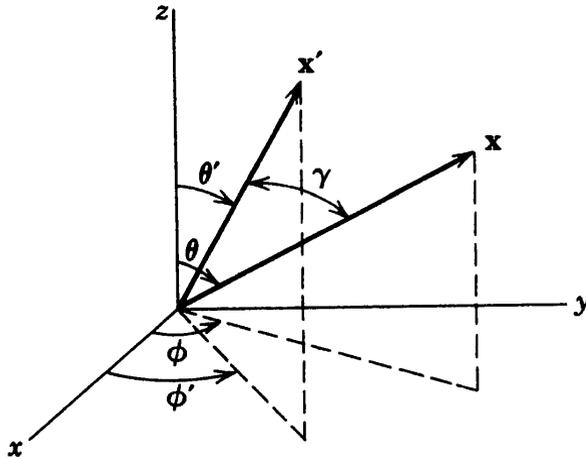
$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Un resultado matemático de sumo interés y utilidad es el llamado teorema de la suma para los armónicos esféricos. Dos vectores  $r$  y  $r'$ , con coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$  y  $(r', \theta', \varphi')$ , respectivamente, tienen un ángulo  $\gamma$  entre ellos dado por la expresión

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi - \varphi').$$

El teorema de la suma expresa un polinomio de Legendre de orden  $l$  en el ángulo  $\gamma$  en términos de los productos de dos armónicos esféricos con coordenadas angulares  $(\theta, \varphi)$  y  $(\theta', \varphi')$ :

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)$$



**Figura 5.**

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{l'} \sum_{m=-l'}^{l'} A_{l'm}(\theta', \phi') Y_{l'm}(\theta, \varphi).$$

Si rotamos el sistema de coordenadas de tal manera que  $\vec{x}' = z'$ ,  $\gamma$  es el ángulo polar y se tiene:

$$\nabla'^2 P_l(\cos \gamma) + \frac{l(l+1)}{r'^2} P_l(\cos \gamma) = 0, r' = r, \quad (1)$$

Dado que  $\nabla'^2 = \nabla^2$ ,  $P_l(\cos \gamma)$  satisface la misma ecuación en el sistema de coordenadas original. Por lo tanto  $A_{l'm}(\theta', \phi') = \delta_{ll'} A_m(\theta', \phi')$ .

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{m=-l}^l A_m(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \varphi), A_m(\theta', \phi') = \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \phi) P_l(\cos \gamma)$$

Evaluación:  $A_m(\theta', \phi')$  es el coeficiente de la expansión de  $\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}^*(\theta, \phi)$  en una serie de  $Y_{lm'}(\gamma, \beta)$  con  $m' = 0$  en el sistema donde (1) es cierta. Dado que sólo un  $l$  contribuye:

$$A_m(\theta', \phi') = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}^*(\theta(\gamma, \beta), \phi(\gamma, \beta))|_{\gamma=0}$$

Pero  $\theta(\gamma, \beta), \phi(\gamma, \beta) \xrightarrow{\gamma=0} (\theta', \phi')$

$$A_m(\theta', \phi') = \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\theta', \phi')$$

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos\gamma)$$

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

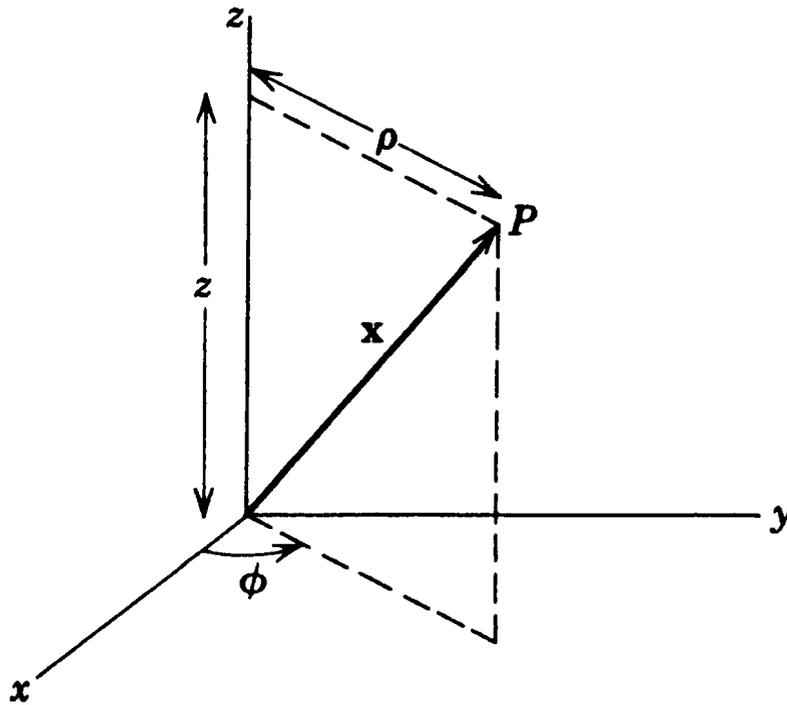


Figura 6.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\Phi(\rho, \phi, z) = R(\rho)Q(\phi)Z(z)$$

$$R^{-1} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \phi^2} Q^{-1} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} Z^{-1} = 0$$

$$Z'' = k^2 Z \quad Q'' = -\nu^2 Q$$

$$R'' + \rho^{-1} R' + \left( k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R = 0$$

$$Z(z) = e^{\pm kz}, \quad Q(\phi) = e^{\pm i\nu\phi}$$

El potencial debe ser univaluado en  $\phi$ .  $\nu \in \mathbb{Z}$

$$R'' + \rho^{-1}R' + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R = 0, \quad x = k\rho$$

$$R'' + x^{-1}R' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)R = 0 \quad \text{Ecuación de Bessel}$$

Las funciones de Bessel son soluciones canónicas  $y(x)$  de la ecuación diferencial de Bessel:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

donde  $\alpha$  es un número real o complejo. El caso más común es cuando  $\alpha$  es un entero  $n$ , aunque la solución para  $\alpha$  no enteros es similar. El número  $\alpha$  se denomina orden de las funciones de Bessel asociadas a dicha ecuación.

Dado que la ecuación anterior es una ecuación diferencial de segundo orden, tiene dos soluciones linealmente independientes.

Aunque  $\alpha$  y  $-\alpha$  dan como resultado la misma función, es conveniente definir diferentes funciones de Bessel para estos dos parámetros, pues las funciones de Bessel en función del parámetro  $\alpha$  son funciones suaves casi en todas partes. Las funciones de Bessel se denominan también funciones cilíndricas, o armónicos cilíndricos porque son solución de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas.

Las funciones de Bessel de primera especie y orden  $\alpha$  son las soluciones de la ecuación diferencial de Bessel que son finitas en el origen ( $x=0$ ) para enteros no negativos  $\alpha$  y divergen en el límite  $x \rightarrow 0$  para  $\alpha$  negativo no entero. El tipo de solución y la normalización de  $J_\alpha(x)$  están definidos por sus propiedades abajo indicadas. Es posible definir la función  $J_\alpha(x)$  por su expansión en serie de Taylor en torno a  $x = 0$ :

$$J_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k + \alpha} = \frac{x^\alpha}{2^\alpha \Gamma(\alpha + 1)} \left[ 1 - \frac{x^2}{2(2\alpha + 2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2\alpha + 2)(2\alpha + 4)} - \dots \right]$$

$\Gamma(z)$  es la función Gamma de Euler, una generalización del factorial para números complejos.

Estas funciones cumplen que:

Si  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ , entonces  $J_\alpha(x)$  y  $J_{-\alpha}(x)$  son linealmente independientes, y por tanto una solución general de la ecuación de Bessel puede expresarse como una combinación lineal de ellas.

Si  $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ , entonces se cumple:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

por lo que las dos soluciones dejan de ser linealmente independientes. En este caso, la segunda solución linealmente independiente será una función de Bessel de segunda especie.

Las funciones de Bessel son funciones oscilatorias (como las funciones seno o coseno) que decaen proporcionalmente a  $1/\sqrt{x}$  (como nos lo mostrarán las formas asintóticas de estas funciones más abajo), aunque los ceros de estas funciones no son, en general, periódicos, excepto de forma asintótica para grandes  $x$ .

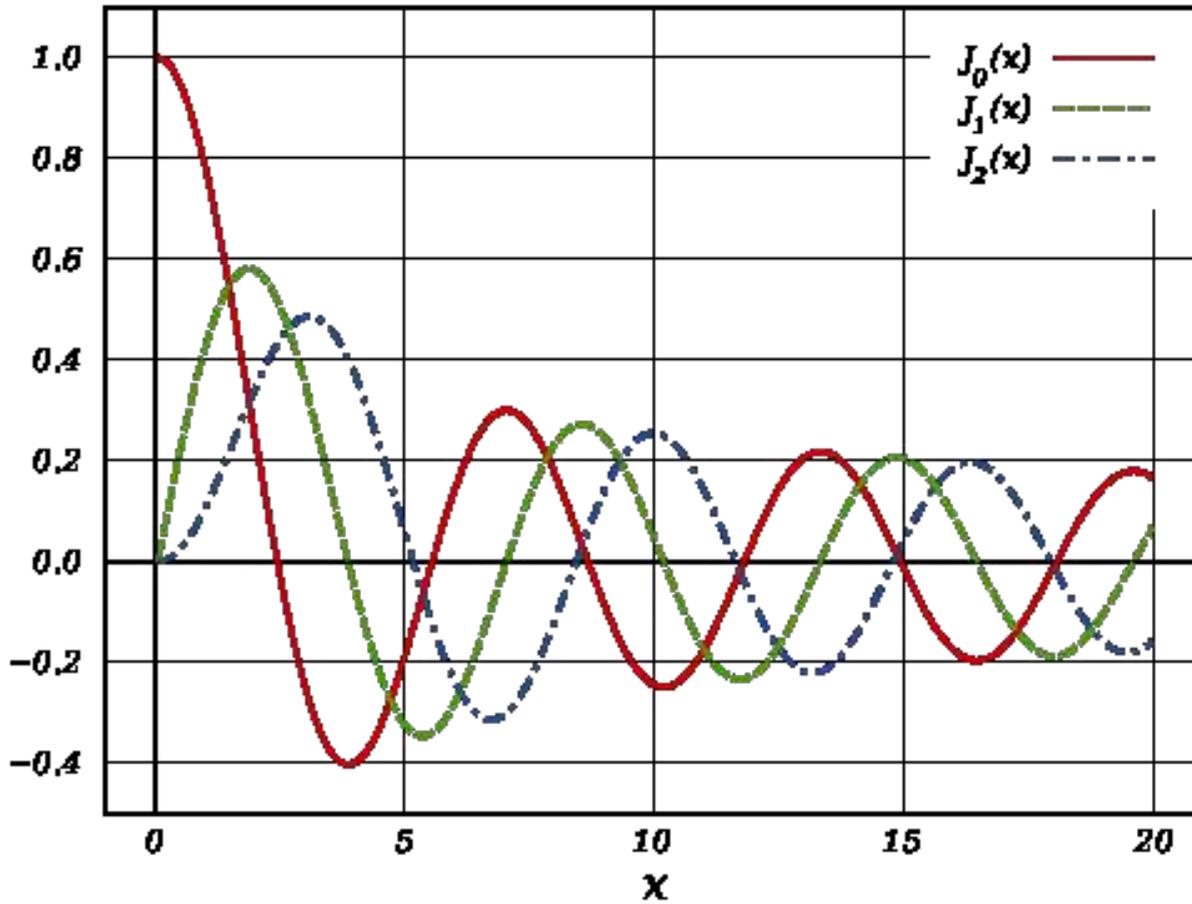


Figura 7. Funciones de Bessel de primera especie,  $J_\alpha(x)$ , para órdenes enteros  $\alpha = 0, 1, 2$ .

Como casos particulares, se tienen las dos primeras funciones de Bessel enteras:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} \cdots \quad J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 4} + \frac{x^5}{2^2 4^2 6} - \frac{x^7}{2^2 4^2 6^2 8} \cdots$$

$$J'_0(x) = \frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x)$$

Para valores enteros de  $n$ , se tiene la siguiente representación integral:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\tau - x \sin \tau) d\tau$$

Que también se puede escribir como:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{-i(n\tau - x \sin \tau)} d\tau$$

Esta definición integral puede extenderse a órdenes no enteros añadiendo otro término integral:

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\alpha\tau - x \sin \tau) d\tau - \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty e^{-x \sinh(t) - \alpha t} dt$$

También se tiene, para  $\alpha > -\frac{1}{2}$

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) \sqrt{\pi} 2^{\alpha-1}} \int_0^x (x^2 - \tau^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cos \tau d\tau.$$

Las funciones de Bessel de segunda especie, denotadas por  $Y_\alpha(x)$ , son soluciones de la ecuación diferencial de Bessel, Estas funciones divergen en el origen ( $x=0$ ).

A estas funciones  $Y_\alpha(x)$  también se les llama a veces funciones de Neumann o de Weber, y a veces se denotan por  $N_\alpha(x)$ . Para  $\alpha$ ; no enteros, se definen a partir de las funciones de primera especie  $J_\alpha(x)$  mediante la siguiente fórmula:

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}, \quad \forall \alpha \notin \mathbb{Z}$$

En el caso en el que tengamos un orden entero  $n$ , la función es definida como el siguiente límite:

$$Y_n(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} Y_\alpha(x), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

que nos da el siguiente resultado en forma integral:

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin \theta - n\theta) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [e^{nt} + (-1)^n e^{-nt}] e^{-x \sinh t} dt$$

Para el caso en el que tengamos  $\alpha$  no enteros, la definición de  $Y_\alpha(x)$  es redundante (como queda claro por su definición de arriba). Por otro lado, cuando  $\alpha$  es entero,  $Y_\alpha(x)$  es la segunda solución linealmente independiente de la ecuación de Bessel, además, de forma similar a lo que ocurría con las funciones de primera especie, se cumple que:

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x) \forall n \in \mathbb{Z}$$

Ambas  $J_\alpha(x)$  y  $Y_\alpha(x)$  son funciones holomorfas de  $x$  en el plano complejo cortado por el eje real negativo. Cuando  $\alpha$  es un entero, no hay puntos de ramificación, y las funciones de Bessel son funciones enteras de  $x$ . Si fijamos  $x$ , entonces las funciones de Bessel son funciones enteras respecto a la variable  $\alpha$ .

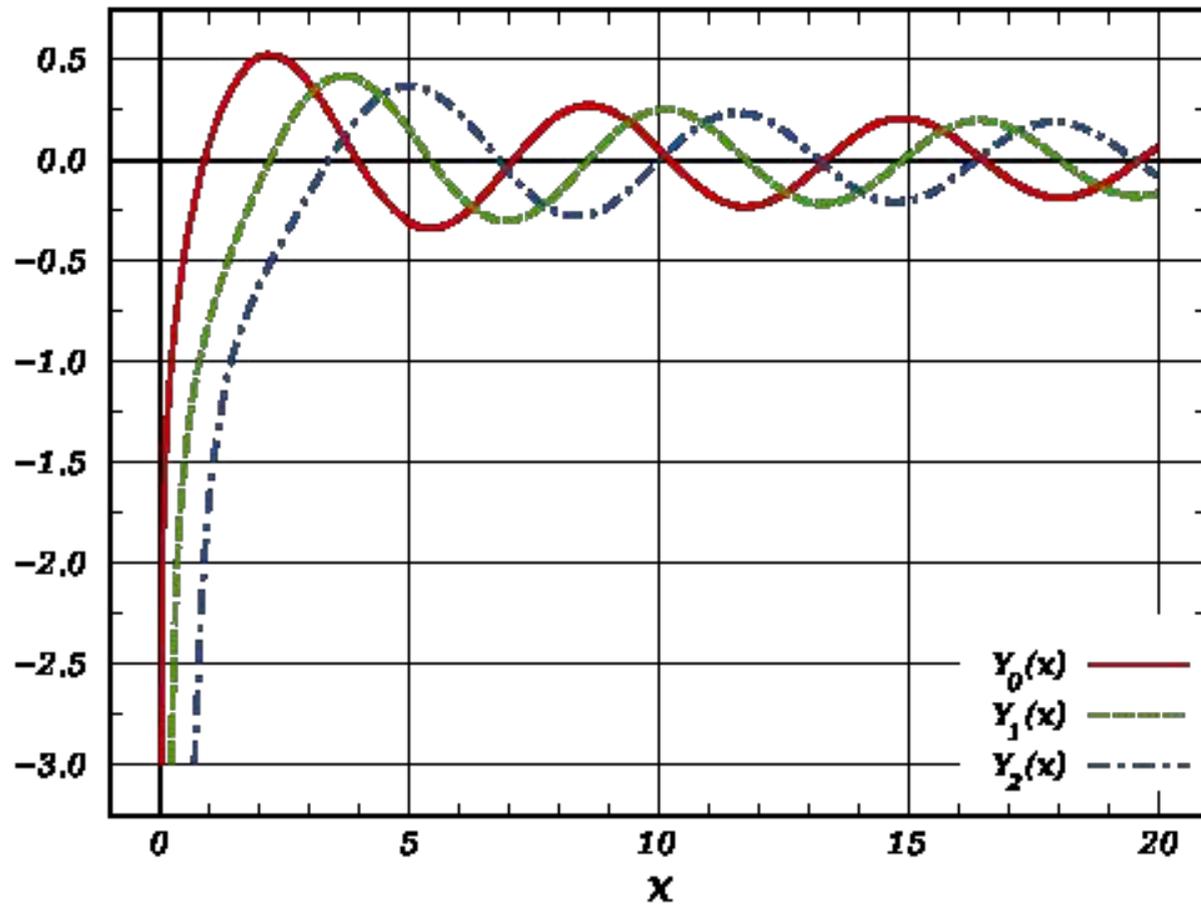


Figura 8. Funciones de Bessel de segunda especie,  $Y_\alpha(x)$ , para órdenes  $\alpha=0, 1, 2$ .

$J_\nu(x)$  tiene un número infinito de ceros:  $x_{\nu n}, n = 1, 2, \dots$

$$\int_0^a d\rho \rho J_\nu\left(x_{\nu m} \frac{\rho}{a}\right) J_\nu\left(x_{\nu m'} \frac{\rho}{a}\right) = \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(x_{\nu m})]^2 \delta_{m m'}$$

Suponiendo que las funciones de Bessel son una base, se obtiene la serie de Fourier-Bessel.

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{\nu n} J_\nu\left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a}\right)$$

$$f_{\nu n} = \frac{2}{a^2} [J_{\nu+1}(x_{\nu n})]^{-2} \int_0^a d\rho f(\rho) J_\nu\left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a}\right)$$

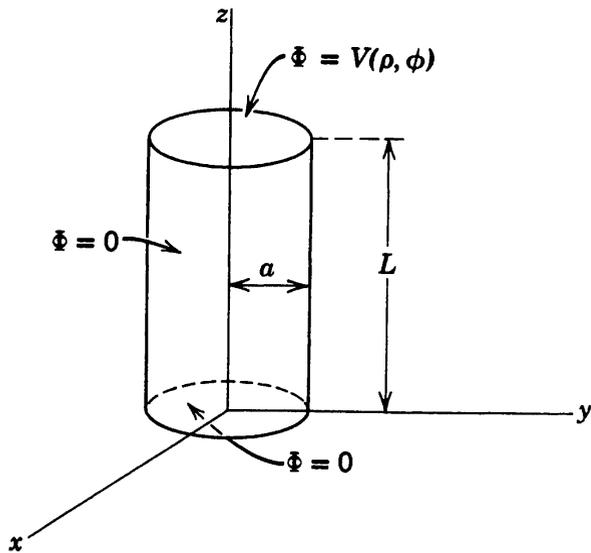


Figura 9.

$$Z(z) = e^{\pm kz}, \quad Q(\phi) = e^{\pm i\nu\phi}$$

El potencial debe ser univaluado en  $\phi$ .  $\nu \in \mathbb{Z}$

$$R'' + \rho^{-1}R' + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R = 0, \quad x = k\rho$$

$$R'' + x^{-1}R' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)R = 0 \quad \text{Ecuación de Bessel}$$

$$J_n\left(x_{nm}\frac{\rho}{a}\right) \quad m = 1, 2, \dots \quad \Phi = 0 \text{ en el manto}$$

$\sinh\left(\frac{x_{nm}}{a}z\right)$   $\Phi = 0$  en la base

$$\Phi(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_m f_{nm} J_n\left(x_{nm} \frac{\rho}{a}\right) \sinh\left(\frac{x_{nm}}{a}z\right) e^{in\phi}$$

$$\Phi(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_m f_{nm} J_n\left(x_{nm} \frac{\rho}{a}\right) \sinh\left(\frac{x_{nm}}{a} z\right) e^{in\phi}$$

$$V(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_m f_{nm} J_n\left(x_{nm} \frac{\rho}{a}\right) \sinh\left(\frac{x_{nm}}{a} L\right) e^{in\phi}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-in\phi} \int_0^a d\rho \rho J_n\left(x_{nm} \frac{\rho}{a}\right) V(\rho, \phi) = f_{nm} \sinh\left(\frac{x_{nm}}{a} L\right) \frac{a^2}{2} [J_{n+1}(x_{nm})]^2$$

$$f_{nm} = \frac{1}{\pi a^2 [J_{n+1}(x_{nm})]^2 \sinh\left(\frac{x_{nm}}{a} L\right)} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-in\phi} \int_0^a d\rho \rho J_n\left(x_{nm} \frac{\rho}{a}\right) V(\rho, \phi)$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi e^{i(n-n')\phi} = 2\pi \delta_{nn'}$$

$$\int_0^a d\rho \rho J_\nu\left(x_{\nu m} \frac{\rho}{a}\right) J_\nu\left(x_{\nu m'} \frac{\rho}{a}\right) = \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(x_{\nu m})]^2 \delta_{mm'}$$

Otra formulación importante de las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel son las funciones de Hankel  $H_\alpha^{(1)}(x)$  y  $H_\alpha^{(2)}(x)$  así definidas:

$$\begin{aligned} H_\alpha^{(1)}(x) &= J_\alpha(x) + iY_\alpha(x) \\ H_\alpha^{(2)}(x) &= J_\alpha(x) - iY_\alpha(x) \end{aligned}$$

donde  $i$  es la unidad imaginaria. Estas combinaciones lineales son también conocidas como las funciones de Bessel de tercera especie. Las funciones de Hankel de primera y segunda especie son usadas para representar las soluciones de ondas entrantes y salientes de una ecuación de ondas en simetrías cilíndricas respectivamente (o viceversa dependiendo de la convención de signo de la frecuencia). Estas funciones son así nombradas en honor de Hermann Hankel.

Usando la definición dada arriba, estas funciones se pueden escribir en función de las funciones de Bessel de primer orden  $J_\alpha(x)$  así:

$$\begin{aligned} H_\alpha^{(1)}(x) &= \frac{J_{-\alpha}(x) - e^{-\alpha\pi i} J_\alpha(x)}{i \sin(\alpha\pi)} \\ H_\alpha^{(2)}(x) &= \frac{J_{-\alpha}(x) - e^{\alpha\pi i} J_\alpha(x)}{-i \sin(\alpha\pi)} \end{aligned}$$

Si  $\alpha$  es un entero, se tiene que calcular de las expresiones de arriba así:

$$H_n^{(1)}(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} H_\alpha^{(1)}(x) \forall n \in \mathbb{Z},$$

$$H_n^{(2)}(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} H_\alpha^{(2)}(x) \forall n \in \mathbb{Z},$$

La siguiente relación es válida para todo valor de  $\alpha$ , sea entero o no:5

$$H_{-\alpha}^{(1)}(x) = e^{\alpha\pi i} H_\alpha^{(1)}(x)$$

$$H_{-\alpha}^{(2)}(x) = e^{-\alpha\pi i} H_\alpha^{(2)}(x)$$

Existe una representación integral de las funciones de Hankel

$$H_\alpha^{(1)}(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha\pi i}}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix \cosh t - \alpha t} dt. H_\alpha^{(2)}(x) = -\frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha\pi i}}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix \cosh t - \alpha t} dt.$$

# 1 Solución general de la ecuación de Bessel

La solución general de la ecuación diferencial de Bessel con parámetro  $\alpha$  viene dada en términos de las funciones de Bessel ordinarias o de las funciones de Hankel. Dicha solución general puede expresarse como:

$$\begin{cases} y(x) = AJ_{\alpha}(x) + BJ_{-\alpha}(x) & \forall \alpha \notin \mathbb{Z} \\ y(x) = AJ_{\alpha}(x) + BY_{\alpha}(x) & \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ y(x) = AH_{\alpha}^{(1)}(x) + BH_{\alpha}^{(2)}(x) & \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Donde A y B son dos constantes arbitrarias.

Las funciones de Bessel ordinarias son válidas para valores complejos del argumento  $x$ , y un caso especialmente importante es aquel con argumento imaginario puro. En este caso, la ecuación de Bessel se transforma en la ecuación de Bessel modificada

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + \alpha^2)y = 0,$$

y sus dos soluciones linealmente independientes son las funciones de Bessel modificadas de primer y segundo tipo:  $I_\alpha(x)$  y  $K_\alpha(x)$  respectivamente.

Funciones de Bessel modificadas de primera especie:  $I_\alpha$

Las funciones de Bessel modificadas de primera especie y orden  $\alpha$  vienen dadas por:

$$I_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k + \alpha} = \frac{x^\alpha}{2^\alpha \Gamma(\alpha + 1)} \left[ 1 + \frac{x^2}{2(2\alpha + 2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2\alpha + 2)(2\alpha + 4)} + \dots \right]$$

Están relacionadas con las funciones de Bessel ordinarias mediante la siguiente igualdad:

$$I_\alpha(x) = i^{-\alpha} J_\alpha(ix) = e^{-\alpha\pi i/2} J_\alpha(ix) .$$

Si  $\alpha \notin \mathbb{Z}$  entonces  $I_\alpha(x)$  y  $I_{-\alpha}(x)$  son linealmente independientes, y por tanto dan una solución general de la ecuación de Bessel. Si  $\alpha \in \mathbb{Z}$  entonces  $J_{-\alpha}(x)$  no está definida en  $x=0$ .

Casos particulares:

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} + \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} \dots, \quad I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^2 4} + \frac{x^5}{2^2 4^2 6} + \frac{x^7}{2^2 4^2 6^2 8} \dots$$

$$I_1'(x) = \frac{dI_0(x)}{dx} = I_1(x)$$

Funciones de Bessel modificadas de segunda especie:  $K_\alpha$

Las funciones de Bessel modificadas de segunda especie y orden  $\alpha$  se definen a partir de las funciones modificadas de primera especie para órdenes no enteros mediante las siguiente fórmula:

$$K_\alpha(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\alpha}(x) - I_\alpha(x)}{\sin(\alpha\pi)} \quad \forall \alpha \notin \mathbb{Z}$$

Para los casos en los que  $\alpha$  sea entero ( $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ ), tenemos que tomar el límite del orden no entero al entero así:

$$K_n(x) = \lim_{p \rightarrow n} K_p(x) = \lim_{p \rightarrow n} \frac{\pi}{2} \frac{I_{-p}(x) - I_p(x)}{\sin(p\pi)} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Además se puede escribir esta función a partir de la función de Hankel de primera especie así:

$$K_\alpha(x) = \frac{\pi}{2} i^{\alpha+1} H_\alpha^{(1)}(ix) = -\frac{\pi}{2} i^{\alpha+1} e^{-i\pi\alpha} H_\alpha^{(2)}(-ix).$$

Existen varias representaciones integrales de estas funciones.

$$K_\alpha(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\alpha\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix \sinh t - \alpha t} dt$$

Funciones de Hankel modificadas

Al contrario que las funciones de Bessel ordinarias,  $J_\alpha; Y_\alpha$ , las cuales son funciones oscilatorias para argumentos reales, las funciones de Bessel modificadas,  $I_\alpha$  y  $K_\alpha$ , son exponencialmente creciente y decreciente respectivamente. Como la función de Bessel ordinaria  $J_\alpha$ , la función  $I_\alpha$  va a cero en  $x = 0$  para  $\alpha > 0$  y es finita en  $x = 0$  para  $\alpha = 0$ . Análogamente,  $K_\alpha$  diverge en  $x = 0$ .

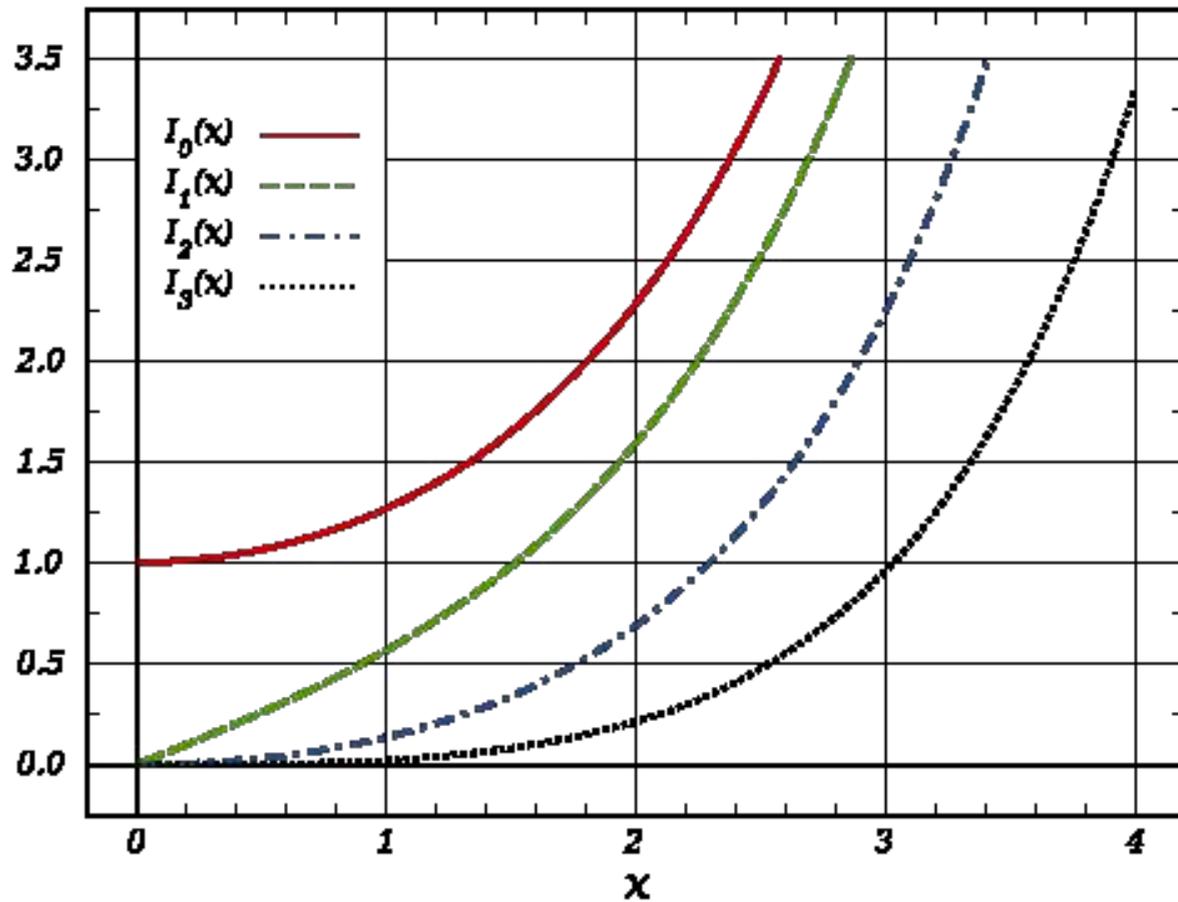


Figura 10. Función de Bessel modificada de primera especie,  $I_\alpha(x)$ , para  $\alpha = 0, 1, 2, 3$ .

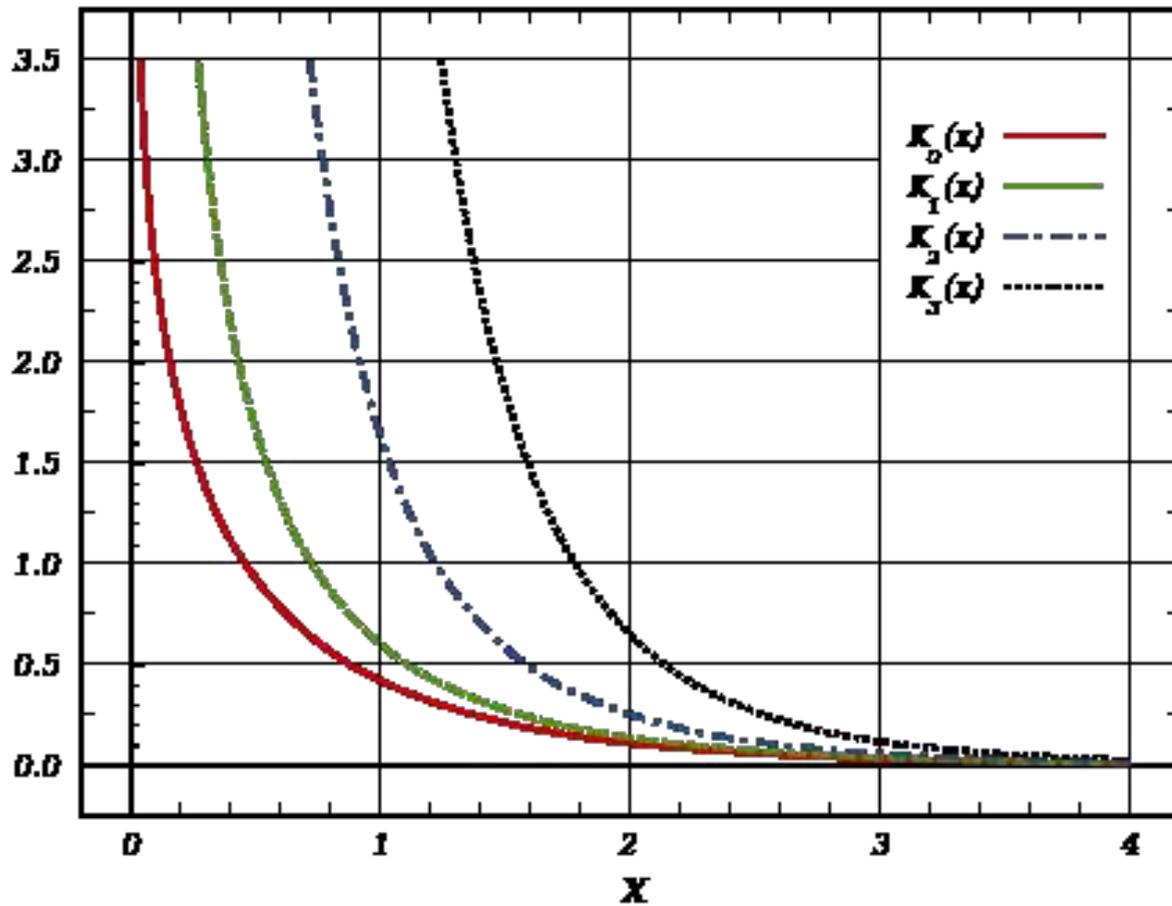


Figura 11. Función de Bessel modificada de segunda especie,  $K_\alpha(x)$ , para  $\alpha = 0, 1, 2, 3$

## 2 Solución general de la ecuación de Bessel modificada

La solución general de la ecuación diferencial de Bessel modificada con parámetro  $\alpha$  viene dada por:

$$\begin{cases} y(x) = AI_{\alpha}(x) + BI_{-\alpha}(x) & \alpha \notin \mathbb{Z} \\ y(x) = AI_{\alpha}(x) + BK_{\alpha}(x) & \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Donde A y B son dos constantes arbitrarias.

Funciones esféricas de Bessel:  $j_n, y_n$

Cuando se soluciona la ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas por separación de variables, la ecuación radial tiene la forma:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + [x^2 - n(n+1)]y = 0.$$

Donde  $n$  es un entero positivo. Las dos soluciones linealmente independientes de esta ecuación se denominan funciones esféricas de Bessel  $j_n(x)$  y  $y_n(x)$ , y están relacionadas con las funciones de Bessel ordinarias  $J_n(x)$  y  $Y_n(x)$  por:10

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x),$$

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+1/2}(x) = (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-n-1/2}(x).$$

$y_n$  se escribe también como  $n_n$  o  $\eta_n$ . A esta función a veces se le llama función esférica de Neumann.

Las funciones esféricas de Bessel se pueden obtener a partir de las siguientes fórmulas:

$$j_n(x) = (-x)^n \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\sin x}{x}, \quad y_n(x) = -(-x)^n \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\cos x}{x}.$$

Para  $n = 0, 1$  y  $2$  tenemos:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x} \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \quad j_2(x) = \frac{3}{x^2} - 1 - \frac{\sin x}{x} - \frac{3\cos x}{x^2}$$

$$j_3(x) = \frac{15}{x^3} - \frac{6}{x} - \frac{\sin x}{x} - \frac{15}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$$

$$y_0(x) = -j_{-1}(x) = -\frac{\cos x}{x} \quad y_1(x) = j_{-2}(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x} \quad y_2(x) = -j_{-3}(x) = -\frac{3}{x^2} + 1 + \frac{\cos x}{x} - \frac{3\sin x}{x^2}$$

La fórmula general es:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{2} \pi x \sum_{i=0}^{n+1} \frac{(-1)^{n-i} \sin x}{x^{n-2i}} \frac{(n-i)!}{i!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2i} - \cos x \sum_{i=0}^{n+1} \frac{(-1)^{n-i} \cos x}{x^{n-2i+1}} \frac{(n-i)!}{i!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2i+1}$$

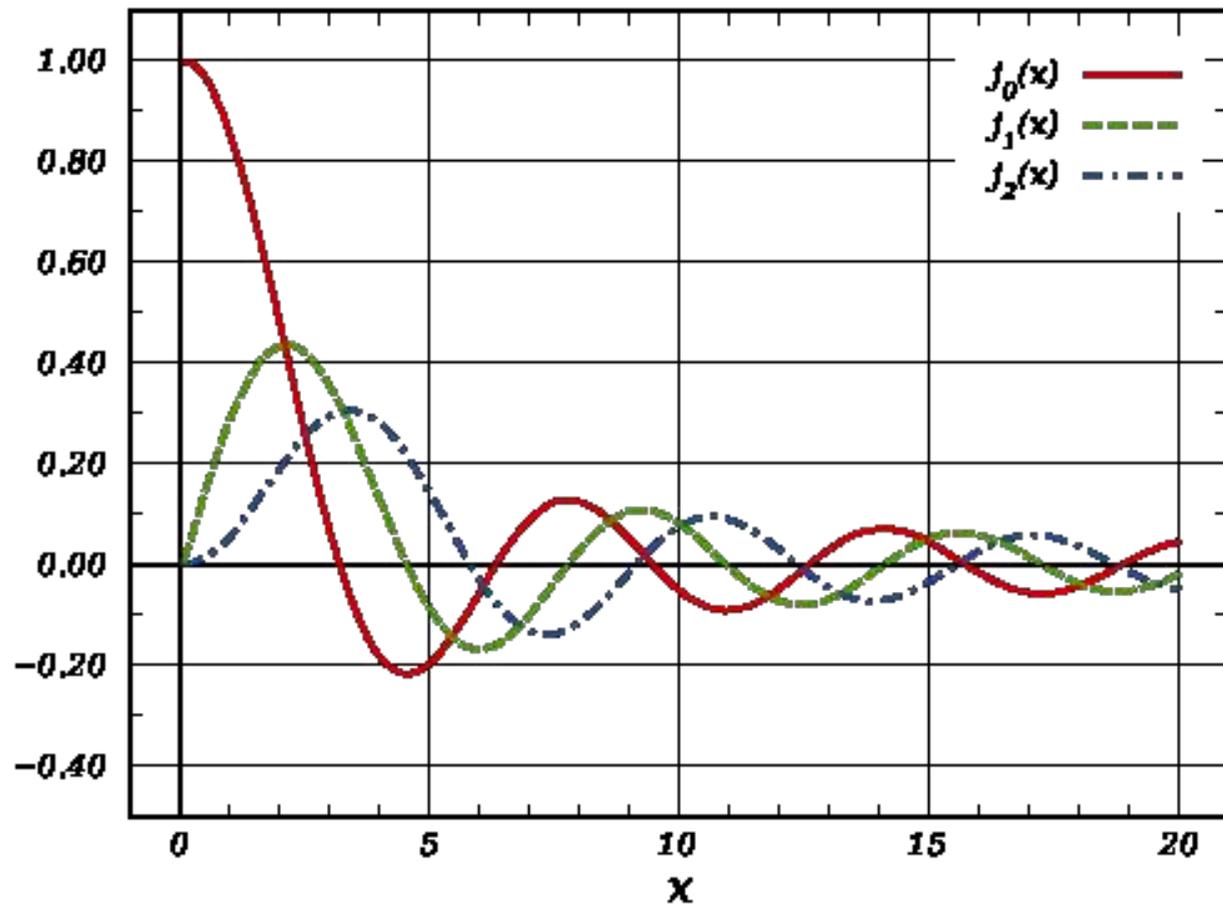


Figura 12. Funciones esféricas de Bessel de primer orden,  $j_n(x)$ , para  $n=0,1,2$ .

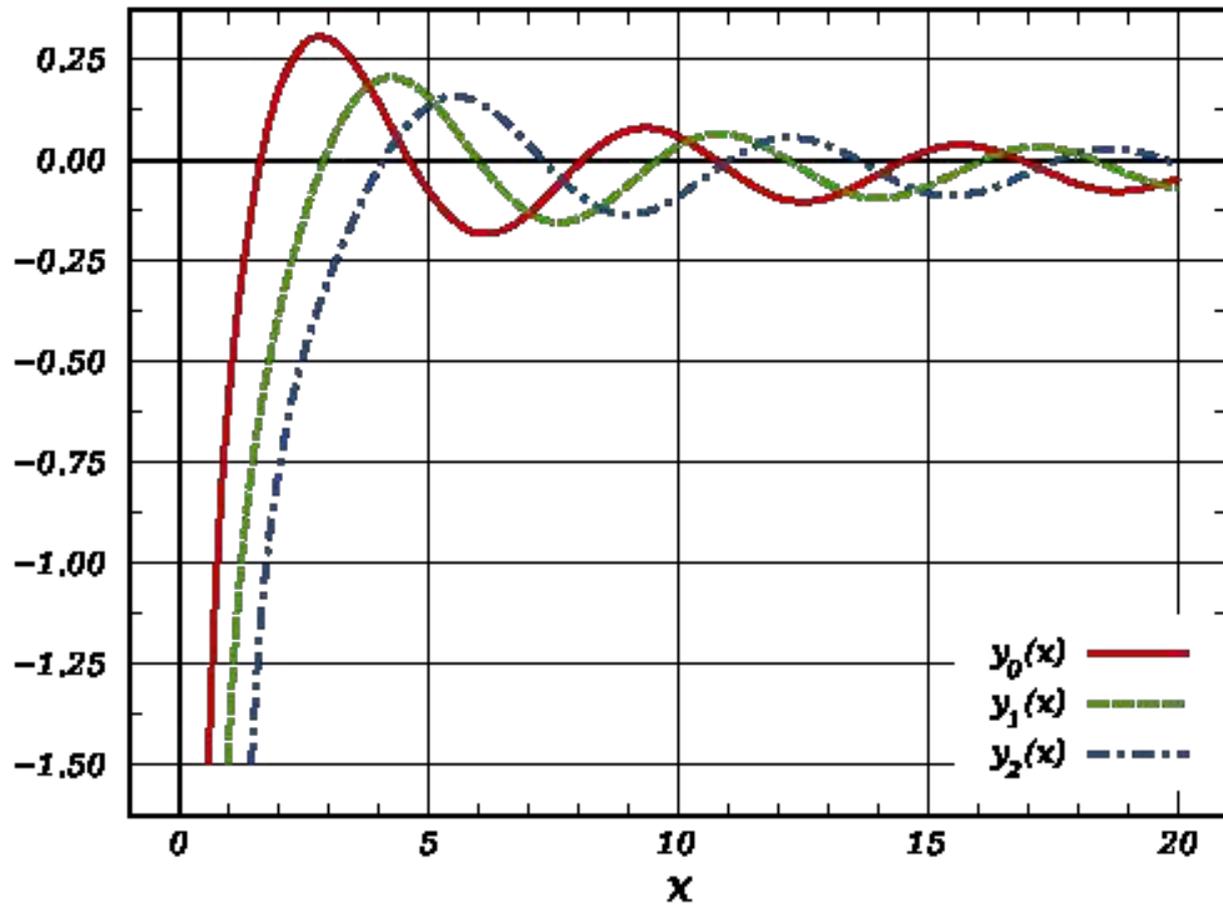


Figura 13. Funciones esféricas de Bessel de segundo orden,  $y_n(x)$ , para  $n=0,1,2$ .

Funciones de Hankel esféricas:  $h_n$

Las funciones esféricas de Hankel se definen de forma análoga a las no esféricas:

$$h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + i y_n(x)$$

$$h_n^{(2)}(x) = j_n(x) - i y_n(x)$$

De hecho, esto nos dice que existen expresiones cerradas de las funciones de Bessel de orden semientero en término de funciones trigonométricas y, por tanto, también de las funciones esféricas de Bessel. De esto se deduce que, para  $n$  entero no negativo se tiene:

$$h_n^{(1)}(x) = (-i)^{n+1} \frac{e^{ix}}{x} \sum_{m=0}^n \frac{i^m}{m!(2x)^m} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

y  $h_n^{(2)}$  es la función compleja conjugada de esta (para  $x$  real). De esta fórmula se pueden deducir las formas cerradas de las funciones esféricas de Bessel ordinarias, por ejemplo,  $j_0(x) = \sin(x)/x$  y  $y_0(x) = -\cos(x)/x$ , y así para cualquier argumento  $n$ .

Funciones esféricas de Bessel modificadas:  $i_n$ ,  $k_n$

También existen análogos esféricos de las funciones de Bessel modificadas:

$$i_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} I_{n+1/2}(x) = i^{-n} j_n(ix) .$$

$$k_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} K_{n+1/2}(x) = \frac{\pi}{2} i^n h_n^{(1)}(ix)$$

$k_n(x)$  se pueden escribir de forma cerrada, usando la fórmula de  $h_n^{(1)}(x)$  dada arriba como:

$$k_n(x) = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-x}}{x} \sum_{m=0}^n \frac{(n+m)!}{m!(n-m)!} \frac{1}{(2x)^m}$$

## 2.1 Función generatriz

Se pueden obtener las funciones de Bessel esféricas a partir de las siguientes funciones generatrices:

$$\frac{1}{z} \cos \sqrt{z^2 - 2zt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} j_{n-1}(z), \quad \frac{1}{z} \sin \sqrt{z^2 + 2zt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} y_{n-1}(z).$$

## 2.2 Relaciones diferenciales

La siguiente relación diferencial se cumple para  $f_n(z) = \{j_n(z), y_n(z), h_n^{(1)}(z), h_n^{(2)}(z)\} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$$\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^m (z^{n+1} f_n(z)) = z^{(n-m)+1} f_{(n-m)}(z).$$

Las funciones de Bessel tienen las siguientes expansiones asintóticas para  $\alpha$  no negativos. Para pequeño argumento  $0 < x \ll \sqrt{\alpha + 1}$ , se tiene:

$$J_\alpha(x) \approx \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left( \frac{x}{2} \right)^\alpha$$

$$Y_\alpha(x) \approx \begin{cases} \frac{2}{\pi} [\ln(x/2) + \gamma] & \text{si } \alpha = 0 \\ -\frac{\Gamma(\alpha)}{\pi} \left( \frac{2}{x} \right)^\alpha & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}$$

donde  $\gamma$  es la constante de Euler-Mascheroni y  $\Gamma(x)$  es la función Gamma de Euler. Como aproximación asintótica al infinito, (cuando tenemos un argumento tal que verifica  $x \gg |\alpha^2 - 1/4|$ ), se obtienen las siguientes aproximaciones:

$$J_\alpha(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left( x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$Y_\alpha(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left( x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right).$$

Para  $\alpha = 1/2$  estas fórmulas son exactas. Las expansiones asintóticas del resto de funciones de Bessel se obtienen a partir de las mostradas arriba y de sus relaciones con las funciones de Bessel de primera especie. Así, las aproximaciones asintóticas al infinito de las funciones de Bessel modificadas (es decir, para argumentos  $x$  que verifiquen  $x \gg |\alpha^2 - 1/4|$ ) se tiene:

$$I_\alpha(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left( 1 + \frac{(1-2\alpha)(1+2\alpha)}{8x} + \dots \right),$$

$$K_\alpha(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}.$$

Mientras que el límite de muy bajo argumento,  $0 < x \ll \sqrt{\alpha + 1}$ , se obtiene:

$$I_\alpha(x) \approx \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left( \frac{x}{2} \right)^\alpha$$

$$K_\alpha(x) \approx \begin{cases} -\ln(x/2) - \gamma & \text{si } \alpha = 0 \\ \frac{\Gamma(\alpha)}{2} \left( \frac{2}{x} \right)^\alpha & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}$$

## Propiedades

Para enteros de orden  $\alpha=n$ ,  $J_n(x)$  se puede definir a partir de la serie de Laurent de la siguiente función generatriz:

$$e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n,$$

Esta expresión puede generalizarse a órdenes no enteros usando integración de contorno u otros métodos. Otra expresión importante para órdenes enteros es

$$e^{iz \cos \phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z) e^{in\phi},$$

Más generalmente, una función se puede expandir en una serie de la forma

$$f(z) = a_0^\nu J_\nu(z) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k^\nu J_{\nu+k}(z),$$

que se denomina expansión de Neumann. Los coeficientes de esta serie en el caso  $\nu=0$  tienen la siguiente forma explícita

$$a_k^0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=c} f(z) O_k(z) dz,$$

donde  $O_k$  son los polinomios de Neumann.

Existen funciones que admiten la siguiente representación especial

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^\nu J_{\nu+2k}(z)$$

con

$$a_k^\nu = 2(\nu + 2k) \int_0^\infty f(z) \frac{J_{\nu+2k}(z)}{z} dz$$

debido a la relación de ortogonalidad

$$\int_0^\infty J_\alpha(z) J_\beta(z) \frac{dz}{z} = \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{2}(\alpha - \beta)\right)}{\pi(\alpha^2 - \beta^2)}.$$

Más generalmente, si  $f$  tiene un punto de ramificación donde  $f(z) = \sum_{k=0} a_k J_{\nu+k}(z)$ ,

entonces

$$\mathcal{L} \left\{ \sum_{k=0} a_k J_{\nu+k} \right\} (s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \sum_{k=0} \frac{a_k}{(s + \sqrt{1+s^2})^{\nu+k}}$$

o

$$\sum_{k=0} a_k \xi^{\nu+k} = \frac{1+\xi^2}{2\xi} \mathcal{L} \{f\} \left( \frac{1-\xi^2}{2\xi} \right),$$

donde  $\mathcal{L} \{f\}$  es la transformada de Laplace de  $f$ .

Otra manera de definir las funciones de Bessel son la representación de Poisson y la fórmula de Mehler-Sonine:

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi}} \int_{-1}^1 e^{izs} (1-s^2)^{\nu-\frac{1}{2}} ds, \\ &= \frac{2}{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)} \int_1^\infty \frac{\sin(zu)}{(u^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}} du, \end{aligned}$$

donde  $\nu > -1/2$  y  $z$  es un número complejo. Esta fórmula es especialmente útil cuando se trabaja con transformadas de Fourier.

Las funciones  $J_\alpha(x), Y_\alpha(x), H_\alpha^{(1)}(x)$  y  $H_\alpha^{(2)}(x)$  cumplen las siguientes relaciones de recurrencia:

$$\frac{2\alpha}{x} Z_\alpha(x) = Z_{\alpha-1}(x) + Z_{\alpha+1}(x)$$

$$2\frac{dZ_\alpha}{dx} = Z_{\alpha-1}(x) - Z_{\alpha+1}(x)$$

Donde  $Z$  denota  $J, Y, H(1),$  o  $H(2)$ .

Estas dos identidades se suelen combinar para obtener otras relaciones distintas. Por ejemplo, se pueden calcular funciones de Bessel de mayores órdenes (o mayores derivadas) a partir de funciones de Bessel de menor orden o de derivadas de menor orden. En particular, se cumple:

$$\left(\frac{d}{x dx}\right)^m [x^\alpha Z_\alpha(x)] = x^{\alpha-m} Z_{\alpha-m}(x)$$

$$\left(\frac{d}{x dx}\right)^m \left[\frac{Z_\alpha(x)}{x^\alpha}\right] = (-1)^m \frac{Z_{\alpha+m}(x)}{x^{\alpha+m}}$$

Las funciones modificadas de Bessel cumplen relaciones similares:

$$e^{(x/2)(t+1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x) t^n,$$

$$e^{z \cos \theta} = I_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(z) \cos(n\theta),$$

Las relaciones de recurrencia serán en este caso:

$$C_{\alpha-1}(x) - C_{\alpha+1}(x) = \frac{2\alpha}{x} C_{\alpha}(x)$$

$$C_{\alpha-1}(x) + C_{\alpha+1}(x) = 2 \frac{dC_{\alpha}}{dx}$$

donde  $C_{\alpha}$  denotará a  $I_{\alpha}$  o a  $e^{\alpha\pi i} K_{\alpha}$ .

La división de la ecuación de Bessel por  $x$  es una ecuación hermítica o auto-adjunta, por lo que sus soluciones deben cumplir determinadas relaciones de ortogonalidad para unas condiciones de contorno adecuadas. En particular, se cumple:

$$\int_0^1 x J_{\alpha}(x u_{\alpha,m}) J_{\alpha}(x u_{\alpha,n}) dx = \frac{\delta_{m,n}}{2} [J_{\alpha+1}(u_{\alpha,m})]^2 = \frac{\delta_{m,n}}{2} [J_{\alpha}'(u_{\alpha,m})]^2,$$

donde  $\alpha > -1$ ,  $\delta_{n,m}$  es la delta de Kronecker, y  $u_{\alpha,m}$  es el  $m$ -ésimo cero de  $J_{\alpha}(x)$ .

Se puede obtener de forma inmediata una relación análoga para funciones de Bessel esféricas:

$$\int_0^1 x^2 j_{\alpha}(x u_{\alpha,m}) j_{\alpha}(x u_{\alpha,n}) dx = \frac{\delta_{m,n}}{2} [j_{\alpha+1}(u_{\alpha,m})]^2$$

Relación de completitud:

$$\int_0^{\infty} x J_{\alpha}(ux) J_{\alpha}(vx) dx = \frac{1}{u} \delta(u-v)$$

para  $\alpha > -1/2$  y siendo  $\delta(x)$  la función delta de Dirac.

Para funciones de Bessel esféricas, la relación de completitud es:

$$\int_0^{\infty} x^2 j_{\alpha}(ux) j_{\alpha}(vx) dx = \frac{\pi}{2u^2} \delta(u-v)$$

para  $\alpha > -1$ . Otra propiedad importante de la ecuación de Bessel, es el Wronskiano de las soluciones:

$$A_\alpha(x) \frac{dB_\alpha}{dx} - \frac{dA_\alpha}{dx} B_\alpha(x) = \frac{C_\alpha}{x},$$

donde  $A_\alpha$  y  $B_\alpha$  son dos soluciones cualesquiera independientes de la ecuación de Bessel y  $C_\alpha$  es una constante independiente de  $x$  (que depende de  $\alpha$  y de las funciones de Bessel consideradas). Por ejemplo, se cumple:

$$J_\alpha(x) \frac{dY_\alpha}{dx} - \frac{dJ_\alpha}{dx} Y_\alpha(x) = \frac{2}{\pi x},$$

$$I_\alpha(x) \frac{dK_\alpha}{dx} - \frac{dI_\alpha}{dx} K_\alpha(x) = \frac{-1}{x},$$

### Teorema del Producto

$$\lambda^{-\nu} J_\nu(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{(1-\lambda^2)z}{2} \right)^n J_{\nu+n}(z)$$

donde  $\lambda$  y  $\nu$  son números complejos cualesquiera. Una fórmula similar se cumple para  $Y_\nu(z)$  y el resto de funciones de Bessel.

Derivadas de  $J_\alpha, Y_\alpha, I_\alpha, H_\alpha, K_\alpha$

Derivada bajando el índice  $p$  a  $p-1$

Para  $y_p(\alpha x) = \{J_p(\alpha x), Y_p(\alpha x), I_p(\alpha x), H_p^{(1)}(\alpha x), H_p^{(2)}(\alpha x)\}$

$$\frac{d}{dx} y_p(\alpha x) = \alpha [y_{p-1}(\alpha x) - \frac{p}{x} y_p(\alpha x)]$$

Mientras que para  $y_p(\alpha x) = K_p(\alpha x)$ , se tiene

$$\frac{d}{dx} y_p(\alpha x) = -\alpha y_{p-1}(\alpha x) - \frac{p}{x} y_p(\alpha x)$$

Derivada subiendo el índice  $p$  a  $p+1$

Para  $y_p(\alpha x) = \{J_p(\alpha x), Y_p(\alpha x), K_p(\alpha x), H_p^{(1)}(\alpha x), H_p^{(2)}(\alpha x)\}$

$$\frac{d}{dx} y_p(\alpha x) = \alpha[-y_{p+1}(\alpha x) + \frac{p}{x} y_p(\alpha x)]$$

Mientras que para  $y_p(\alpha x) = I_p(\alpha x)$ , se tiene

$$\frac{d}{dx} y_p(\alpha x) = \alpha y_{p+1}(\alpha x) + \frac{p}{x} y_p(\alpha x)$$

Otras relaciones importantes

Para  $y_p(\alpha x) = \{J_p(\alpha x), Y_p(\alpha x), H_p^{(1)}(\alpha x), H_p^{(2)}(\alpha x)\}$ , se cumplen las siguientes relaciones:

$$\frac{d}{dx} y_p(\alpha x) = \frac{\alpha}{2} [y_{p-1}(\alpha x) - y_{p+1}(\alpha x)]$$

$$y_{p-1}(\alpha x) + y_{p+1}(\alpha x) = \frac{2p}{\alpha x} y_p(\alpha x)$$

Identidades Seleccionadas

$$I_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{2}\right) + I_{\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{2e^{\frac{z}{2}}}{\sqrt{\pi z}}; \quad I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} J_{\nu+k}(z); \quad J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{k!} I_{\nu+k}(z);$$

$$I_\nu(\lambda z) = \lambda^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((\lambda^2 - 1)\frac{z}{2})^k}{k!} I_{\nu+k}(z); \quad I_\nu(z_1 + z_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_{\nu-k}(z_1) I_k(z_2); \quad J_\nu(z) = \frac{z}{2\nu} (J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z)), \quad I_\nu(z) = \frac{z}{2\nu} (I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z)); \quad J_\nu'(z) = \frac{1}{2} (J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)), \quad I_\nu'(z) = \frac{1}{2} (I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z)); \quad \left(\frac{x}{2}\right)^\nu = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+\nu)}{k!} (2k+\nu) I_{2k+\nu}(x).$$