Condiciones de Borde

- $\vec{\nabla}.\vec{D}(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$, ρ:densidad de cargas libres.
- $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$

Las condiciones de borde al cruzar una superficie que separa dos materiales dieléctricos diferentes son:

$$\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right).\hat{n}_{21} = \sigma$$
$$\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) \times \hat{n}_{21} = \vec{0}$$

σ:densidad superficial de carga libre. $\hat{n}_{21}$ es la normal a la superficie que apunta del medio 1 al 2.

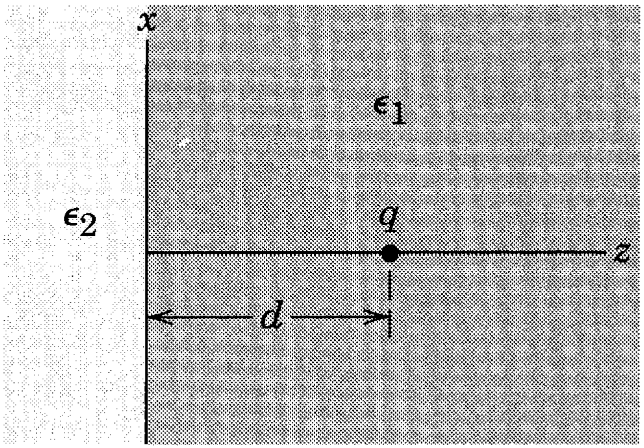


Figura 1. Dos dieléctricos semi-infinitos.

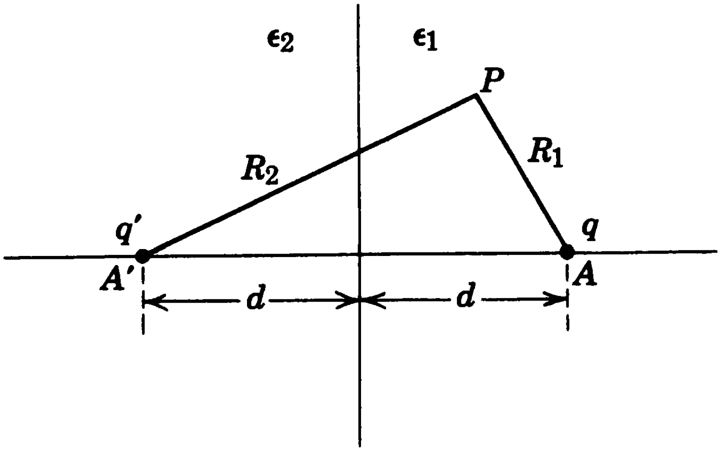


Figura 2.

$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ en todas partes.$\vec{D}(x) = \varepsilon\, \vec{E}(x)$,$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$

Potencial para $z > 0$. Ponemos una carga imagen q'situada en $z = -d$. En coordenadas cilíndricas centradas en la línea que conecta q, q'se tiene:

$$\Phi_1(\rho, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{q}{R_1} + \frac{q'}{R_2}\right), R_1 = \sqrt{\rho^2 + (z-d)^2}, R_2 = \sqrt{\rho^2 + (z+d)^2}, z > 0$$

Potencial para $z < 0$. No hay cargas libres en el medio 2. Así que la fuente del campo debe estar en el medio 1. Por simetría, postulamos una carga q'' situada en la posición de la carga q:

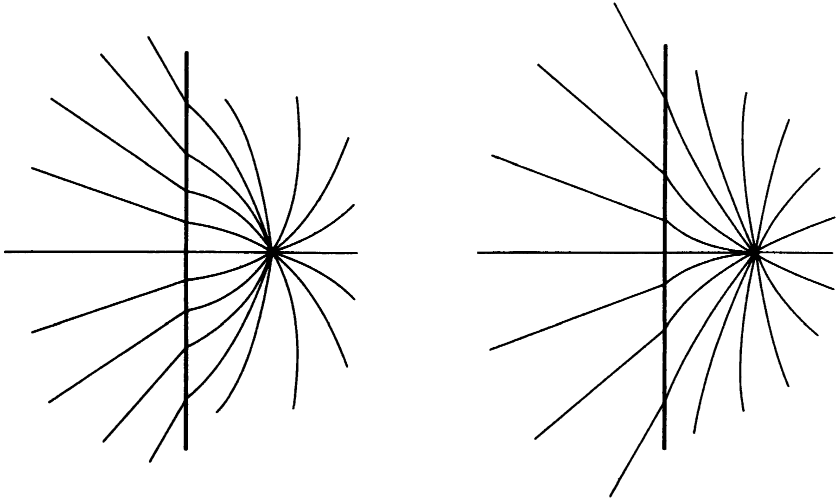
$$\Phi_2(\rho, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\left(\frac{q''}{R_1}\right), z < 0$$

En la interfase tenemos que:

$$\varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial z}\Phi_2(\rho,z)|_{z=0} = \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial z}\Phi_1(\rho,z)|_{z=0}$$
$$\frac{\partial}{\partial \rho}\Phi_2(\rho,z)|_{z=0} = \frac{\partial}{\partial \rho}\Phi_1(\rho,z)|_{z=0}$$

$$q - q' = q''$$
$$\frac{1}{\varepsilon_1}(q+q') = \frac{1}{\varepsilon_2}q''$$

$$q' = -\left(\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\right)q$$
$$q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}q$$



$\epsilon_2 > \epsilon_1$ $\epsilon_2 < \epsilon_1$

Figura 3.

Encontrar:

1) Densidad de carga de polarización

2) Densidad superficial de carga de polarización

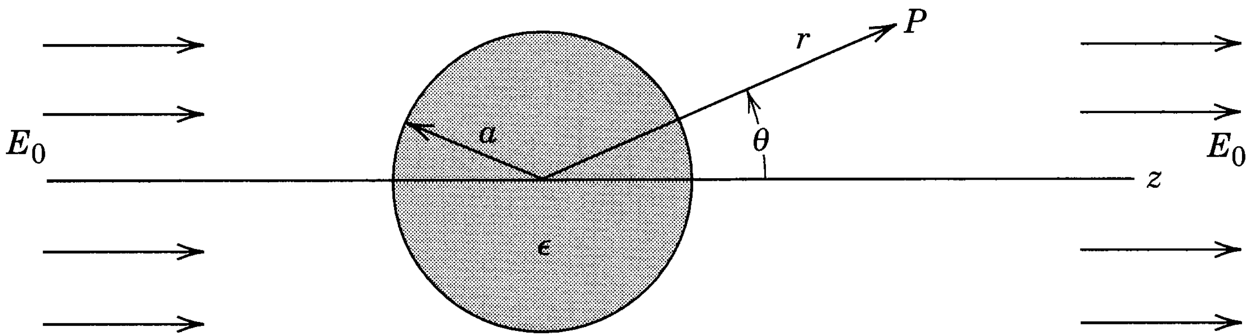


Figura 4.

La esfera está en presencia de un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = E_0\hat{z}$. No hay cargas libres, así que buscamos una solución de la ecuación de Laplace con simetría azimutal.

$$\Phi_{\text{ex}}(r,\theta) = \sum_{l=0} \left(B_l r^l + C_l r^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\theta) \qquad , r > a$$

No hay cargas en $r = 0$, $\Phi_{\text{in}}(r,\theta) = \sum_l A_l r^l P_l(\cos\theta) \qquad , r < a$

Para $r \to \infty$,$\Phi(r,\theta) \sim -E_0 r \cos\theta$,$B_1 = -E_0$,$B_l = 0, l \neq 1$.

Condiciones de Borde

$$-\frac{1}{a}\frac{\partial\Phi_{\rm in}}{\partial\theta}|_{r=a} = -\frac{1}{a}\frac{\partial\Phi_{\rm ex}}{\partial\theta}|_{r=a}$$
$$-\varepsilon\frac{\partial\Phi_{\rm in}}{\partial r}|_{r=a} = -\varepsilon_0\frac{\partial\Phi_{\rm ex}}{\partial r}|_{r=a}$$

$$\sum_l A_l a^l P_l'(x) = \sum_{l=0}\left(B_l a^l + C_l a^{-(l+1)}\right)P_l'(x) \qquad x = \cos\theta$$
$$\varepsilon\sum_l l\,A_l a^{l-1}P_l(\cos\theta) = \varepsilon_0\sum_{l=0}\left(l\,B_l a^{l-1} - (l+1)C_l a^{-(l+2)}\right)P_l(\cos\theta)$$

$$A_l a^l = B_l a^l + C_l a^{-(l+1)}, l \neq 0$$
$$\varepsilon l\,A_l a^{l-1} = \varepsilon_0\left(l\,B_l a^{l-1} - (l+1)C_l a^{-(l+2)}\right), l \neq 0$$
$$C_0 = 0$$

$$A_1 = -E_0 + C_1 a^{-3}$$
$$A_l = C_l a^{-(2l+1)}, \quad l \neq 0,1$$
$$A_l = -\frac{\varepsilon_0(l+1)}{\varepsilon l}C_l a^{-(2l+1)}, \quad l \neq 0,1$$
$$\varepsilon A_1 = -\varepsilon_0 E_0 - 2\varepsilon_0 C_1 a^{-3}$$

$$A_l = C_l = 0, \qquad l \neq 0,1$$
$$A_1 = -\left(\frac{3}{2+\varepsilon/\varepsilon_0}\right)E_0$$

$$C_1 = \left(\frac{\varepsilon/\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon/\varepsilon_0 + 2} \right) E_0 a^3$$

$$\Phi_{\text{in}}(r,\theta) = -\left(\frac{3}{2+\varepsilon/\varepsilon_0}\right) E_0 r\cos\theta + A_0$$

$$\Phi_{\text{ex}}(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \left(\frac{\varepsilon/\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon/\varepsilon_0 + 2}\right) E_0 a^3 r^{-2}\cos\theta$$

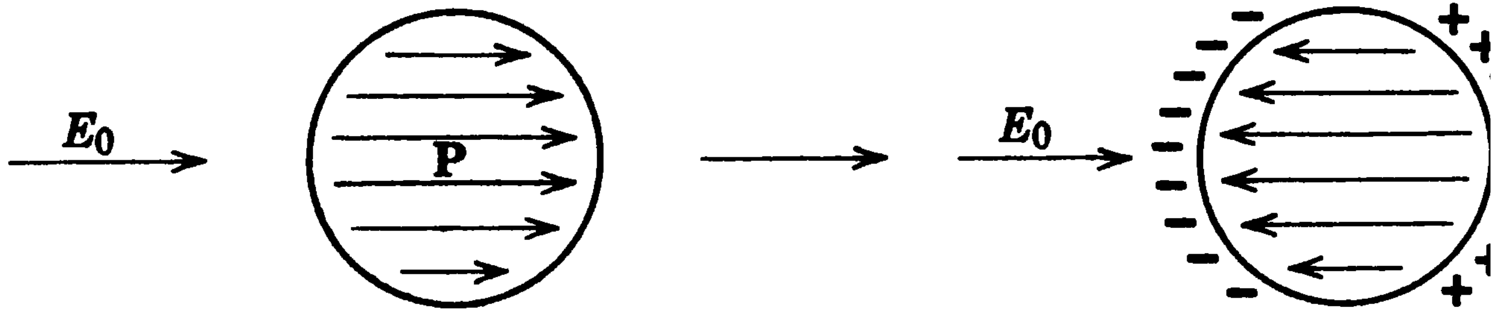


Figura 5.

Ejercicio:Encontrar la polarización $\vec{P}$.