El operador nabla es: $\vec{\nabla} = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$

Definimos el gradiente de un campo escalar $\varphi(\vec{x})$ por:

$$\vec{\nabla}\varphi = \hat{x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Sea $\vec{A}(\vec{x}) = A_x(\vec{x})\hat{x} + A_y(\vec{x})\hat{y} + A_z(\vec{x})\hat{z}$ un campo vectoral.

La divergencia de $\vec{A}$ se define por

$$\vec{\nabla}.\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

El rotor de $\vec{A}$ es:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

El laplaciano de un campo escalar $\varphi(\vec{x})$ es la divergencia del gradiente de $\varphi(\vec{x})$:

$$\vec{\nabla} . \vec{\nabla} \varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

Sea V un volumen encerrado por una superficie cerrada S. Tenemos que:

$$\int_V d^3x \vec{\nabla}.\vec{A} = \oint_S d\,\vec{S}.\vec{A}$$

para todo campo vectorial $\vec{A}$ definido en V. La expresión del lado derecho de esta ecuación se llama el flujo del campo vectorial $\vec{A}$ a través de la superficie S. $d\,\vec{S}$ es el elemento de área infinitesimal. Su dirección la da la normal a la superficie en cada punto que, por convención apunta hacia afuera del volumen V.

Demostremos esta identidad para un cubo de lado a:

$$\int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a dz \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) = \int_0^a dy \int_0^a dz\, A_x|_{x=0}^{x=a} + \int_0^a dx \int_0^a dz\, A_y|_{y=0}^{y=a} + \int_0^a dy \int_0^a dx\, A_z|_{z=0}^{z=a}$$

Pero $\int_0^a dy \int_0^a dz A_x|_{x=0}^{x=a} = \int_0^a dy \int_0^a dz A_x(a,y,z) - \int_0^a dy \int_0^a dz A_x(0,y,z)$

Podemos ver que estos son los flujos de $\vec{A}$ a través de las tapas del cubo correspondientes a $x=a$ y $x=0$. El signo menos se debe a que la normal a la tapa en $x=0$ es $-\hat{x}$.

Un volumen arbitrario V lo podemos descomponer en N cubos de lado a adyacentes tal que $V = Na^3$. Esto es exacto para $N \to \infty$. Veamos qué sucede si aplicamos nuestro resultado previo para dos cubos adyacentes:

$$\int_{V_1 U V_2} d^3x \vec{\nabla}.\vec{A} = \int_{V_1} d^3x \vec{\nabla}.\vec{A} + \int_{V_2} d^3x \vec{\nabla}.\vec{A} = \oint_{S_1} d\vec{S}.\vec{A} + \oint_{S_2} d\vec{S}.\vec{A} = \oint_S d\vec{S}.\vec{A}$$

Notar que el flujo de A en la cara común de los dos cubos adyacentes se cancela porque las normales se dirigen en direcciones opuestas. Sólo queda el flujo a través de las caras(S) que rodean el volumen $V_1 U V_2$.

Sea S una superficie abierta, cuyo borde es una curva cerrada C. Entonces:

$$\int_S d\vec{S}.(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \oint_C d\vec{x}.\vec{A}$$

para todo campo vectorial $\vec{A}$ definido en S. El miembro derecho de la igualdad es la circulación de $\vec{A}$ a lo largo de la curva C. C se recorre siguiendo la regla de la mano derecha:

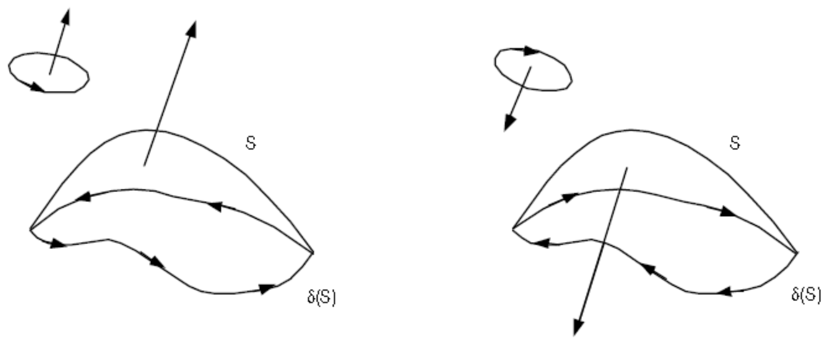


Figura 1.

Con la mano derecha tomo la normal $\hat{n}$ a la superficie S en cada punto, con mi dedo pulgar en la dirección de $\hat{n}$. La curvatura de los demás dedos da la orientación de C.

Demostremos esta identidad para un cubo de lado a, al cual le falta la tapa en $x=0$.

$$\int_0^a dy \int_0^a dz\, (\vec{\nabla}\times\vec{A})_x|_{x=a} + \int_0^a dx \int_0^a dz\, (\vec{\nabla}\times\vec{A})_y|_{y=0}^{y=a} + \int_0^a dy \int_0^a dx\, (\vec{\nabla}\times\vec{A})_z|_{z=0}^{z=a}$$

Estudiemos cada tapa por separado,

$$\int_0^a dx \int_0^a dz\, (\vec{\nabla}\times\vec{A})_y|^{y=a} = \int_0^a dx \int_0^a dz \left(-\frac{\partial A_z(x,a,z)}{\partial x} + \frac{\partial A_x(x,a,z)}{\partial z} \right) = \int_0^a dz(-A_z(a,a,z) + A_z(0,a,z)) + \int_0^a dx(A_x(x,a,a) - A_x(x,a,0))$$

La última expresión da la circulación de A a lo largo del perímetro del cuadrado $y = a$, recorriendo el perímetro tal que el cubo queda a la derecha.

Aplicamos este resultado a cada tapa del cubo. Notamos que todas las tapas tienen un lado común con otra tapa, excepto la tapa en $x = 0$. La circulación de $\vec{A}$ en los lados comunes se cancela de a pares debido a las orientaciones opuestas que tiene los recorridos en las dos tapas. Sólo sobrevive la circulación de $\vec{A}$ a lo largo del cuadrado que limita la tapa $x=0$.

Un argumento similar al utilizado para probar el Teorema de Gauss, permite generalizar nuestro resultado para el cubo a una superficie abierta arbitraria.

Consideremos el campo eléctrico debido a una carga q en el origen. Encontrar:

1. El flujo del campo eléctrico a través de una esfera centrada en el origen de radio R.

   Tenemos que: $\vec{E} = kq\frac{\hat{r}}{r^2}$, $\hat{n} = \hat{r}$, $\oint_S \vec{E}.\hat{n}\, dS = \frac{kq}{R^2}\oint_S dS = \frac{kq}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi kq$

2. La divergencia del campo eléctrico:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = kq\left(\partial_x\left(\frac{x}{r^3}\right) + \partial_y\left(\frac{y}{r^3}\right) + \partial_z\left(\frac{z}{r^3}\right)\right)$$

$$\partial_x\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} + x\frac{-3}{r^4}\partial_x r$$

$$\partial_x r = \frac{x}{r} \qquad \partial_x\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - 3\frac{x^2}{r^5}$$

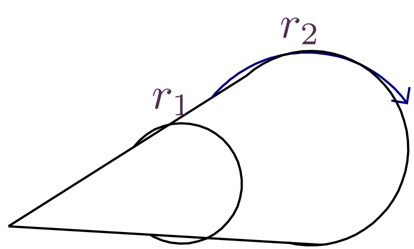
$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{3}{r^3} - 3\frac{x^2+y^2+z^2}{r^5} = 0 \qquad r \neq 0$$

La divergencia del campo eléctrico está concentrada en el origen.Definamos la "función" delta de Dirac: $\delta(\vec{x}) = 0$ si $\vec{x} \neq \vec{0}$ y $\int d^3x\delta(\vec{x}) = 1$, la integral cubre todo el espacio. Entonces:

$\vec{\nabla}.\vec{E} = 4\pi kq\delta(\vec{x})$

Encontrar

1. $\mathrm{rot}\,\vec{E}$, para el campo eléctrico debido a una carga puntual q_1 situada en $\vec{x}_1$.R:$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$
2. La circulación de $\vec{E}$ a lo largo de la curva definida por dos segmentos de radios y los arcos correspondientes. La carga q está situada en el centro de la esfera.



En los arcos la integral de línea se anula, dado que el campo es perpendicular a la tangente al arco. $\vec{E}.d\,\vec{x} = 0$. Se tiene: $\oint_C \vec{E}.d\,\vec{x} = \int_{r_1}^{r_2} dr k \frac{q}{r^2} - \int_{r_1}^{r_2} dr k \frac{q}{r^2} = 0$.

Por superposición, el campo electrostático debido a un número arbitrario de cargas puntuales satisface que $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$. Debido al teorema del rotor $\oint_C \vec{E}.d\,\vec{x} = 0$, para cualquier curva cerrada C. Esto significa que el campo electrostático es *conservativo* y que es posible definir el potencial electrostático, como veremos posteriormente.

Sean φ, ψ dos campos escalares definidos en un volumen V cuyo borde es la superficie cerrada S. Entonces

$$\int_V d^3x[\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi] = \oint_S dS\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)$$

donde la derivada normal se define como $\frac{\partial\psi}{\partial n} = \hat{n}.\vec{\nabla}\psi$.

Demostración: Usar el teorema de la divergencia con $\vec{A} = \psi\vec{\nabla}\varphi - \varphi\vec{\nabla}\psi$

Igualmente:

$$\int_V d^3x[\varphi\nabla^2\varphi + (\nabla\varphi)^2] = \oint_S dS\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)$$

Demostración: Usar el teorema de la divergencia con $\vec{A} = \varphi\vec{\nabla}\varphi$

Queremos estudiar las condiciones de borde que garanticen la unicidad de la solución a la ecuación de Laplace: $\nabla^2\phi = 0$, $\phi(\vec{x})$ existe en $\vec{x}\epsilon V$. Las condiciones de borde se dan sobre la superficie cerrada S que encierra el volumen V.

Sean $\phi_1,\ \phi_2$ dos soluciones a la ecuación de Laplace en V que satisfacen las mismas condiciones de borde sobre S.

Se tiene que $\psi = \phi_1 - \phi_2$ satisface la ecuación de Laplace en V.

Usando la fórmula de Green:

$$\int_V d^3x[\psi\nabla^2\psi + (\nabla\psi)^2] = \int_V d^3x[(\nabla\psi)^2] = \oint_S dS\left(\psi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)$$

1) Condiciones de borde de Dirichlet: $\phi(x) = \phi_0(x)$, $x\epsilon S$. Entonces $\psi(x) = 0$, $x\epsilon S$.

$$\begin{aligned} (\nabla\psi)^2 &= 0, x\epsilon V \\ \psi(x) &= c, x\epsilon V \quad \text{Pero } \psi = 0 \text{ en } S.\ c = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto si se da la función $\phi(x)$ sobre la superficie cerrada S, existe una única solución a la ecuación de Laplace en V.

2) Condiciones de borde de Neumann. La derivada normal de la función ϕ se conoce sobre la superficie S. Entonces $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ en S.

Por lo tanto:

$$(\nabla \psi)^2 = 0, x \epsilon V$$
$$\psi(x) = c, x \epsilon V$$

Por lo tanto si se da la derivada normal de la función $\phi(x)$ sobre la superficie cerrada S, existe una única solución a la ecuación de Laplace en V, salvo por una constante aditiva arbitraria.