Covarianza de la Electrodinámica

- Usamos unidades gaussianas para describir la electrodinámica

- 6 grados de libertad, $\vec{E}\,,\vec{B}$

- Covarianza implica que estos grados de libertad deben ser componentes de un tensor en 4 dimensiones.

- Tensor de rango 2 antisimétrico tiene 6 componentes independientes en $n=4$. $F_{\mu\nu}$

- $$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}\,,\vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$B_i=\varepsilon_{ijk}A_{k,j}=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(A_{k,j}-A_{j,k})$, $\qquad F_{jk}=A_{k,j}-A_{j,k}$, $\qquad B_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk}$

covarianza: $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$ $\quad A_\mu = \left(\vec{A}, A_4\right)$ un cuadrivector,

$F_{i4} = A_{4,i} - A_{i,4} = -\Phi_{,i} - A_{i,4}$, $\quad i\,F_{i4} = E_i, i\,A_4 = -\Phi$

$$F_{i4} = -i\,E_i, F_{jk} = \varepsilon_{jki} B_i \quad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -i\,E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -i\,E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -i\,E_3 \\ i\,E_1 & i\,E_2 & i\,E_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_\mu = \left(\vec{A}, i\,\Phi\right)$$

Conservación de la carga eléctrica: $J_\mu = (J, i\,c\rho)$,$J_{\mu,\mu} = \nabla J + \partial_t \rho = 0$.

Gauge de Lorentz es covariante:$A_{\mu,\mu} = 0$.

Covarianza de la ecuación de ondas en el gauge de Lorentz:

$$\boxed{A_{\mu,\nu\nu} = -\frac{4\pi}{c} J_\mu}$$

Invarianza de Gauge: $A'_\mu = A_\mu + \lambda_{,\mu}$ implica $F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$

Ecuaciones de Maxwell: Primer orden en las derivadas:$F_{\mu\nu,\alpha}$
$F_{\mu\nu,\alpha}$ + permutaciones cíclicas de los índices $= 0$ se satisface automáticamente si $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$ Ejercicio:Verificar.
Por lo tanto:$F_{\mu\nu,\alpha} + F_{\nu\alpha,\mu} + F_{\alpha,\mu\nu} = 0$ corresponde a las ecuaciones de Maxwell homogéneas.
Las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas tienen un término inhomogéneo conteniendo J_μ. Por lo tanto deben ser de la forma:

$$F_{\mu\nu,\nu} = a\, J_\mu$$

Para fijar a, tomamos la ley de Gauss:

$$F_{4i,i} = a\, J_4, i\, E_{i,i} = a\, i\, c\, \rho, a = \frac{4\pi}{c}$$

$$F_{\mu\nu,\nu} = \frac{4\pi}{c} J_\mu$$

Ecuación de fuerza de Lorentz:

$$f = \rho E + \frac{1}{c} J \times B$$

$$f_\mu = \frac{1}{c} F_{\mu\nu} J_\nu$$

$$f_4 = \frac{1}{c} i E_i J_i = \frac{i}{c} E.J \quad \text{, potencia}$$

Tensor de energía momentum:

$$f_\mu = \frac{1}{c} F_{\mu\nu} J_\nu = \frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} F_{\nu\lambda,\lambda} = T_{\mu\nu,\nu}$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} + \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} F_{\lambda\rho} \right)$$

1 Transformación de los campos electromagnéticos

$$F'_{\mu\nu} = L_{\mu\alpha} L_{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$$

donde L es la matriz de transformación de Lorentz.

Ejercicio 1. Muestre que para movimiento relativo en la dirección x se tiene que:

$$\begin{aligned} E_1' &= E_1 & B_1' &= B_1 \\ E_2' &= \gamma(E_2 - \beta B_3) & B_2' &= \gamma(B_2 + \beta E_3) \\ E_3' &= \gamma(E_3 + \beta B_2) & B_3' &= \gamma(B_3 - \beta E_2) \end{aligned}$$

2 Lagrangiano de la Electrodinámica

Sea $\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$ la densidad lagrangiana de un conjunto de campos $\phi_i(x)$.
La acción del sistema es $S = \int_V d^4x \mathcal{L}$. El principio de menor acción con valores fijos de los campos sobre la superficie cerrada Σ cuyo interior es V implica:

$$\delta S = \int_V d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta\phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} (\delta\phi_i)_{,\mu} \right) =$$

$$\int_V d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} \right) \delta\phi_i + \oint_\Sigma d\sigma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} = 0$$

El término de superficie se anula, dado que $\delta\phi_i = 0$ allí.

Ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i}$$

Tensor de energía-momentum. Si la densidad lagrangeana no depende de explícitamente de x,lo que refleja la invarianza translacional de la acción, se tiene:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i}\phi_{i,\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\nu}}\phi_{i,\nu\mu} =$$

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\nu}}\phi_{i,\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\nu}}\phi_{i,\nu\mu} = \partial_\nu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\nu}}\phi_{i,\mu}\right)$$

$$\partial_\nu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\nu}}\phi_{i,\mu} - \mathcal{L}\delta_{\mu\nu}\right) = 0$$

$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\nu}}\phi_{i,\mu} - \mathcal{L}\delta_{\mu\nu}$: tensor energía momentum canónico.
Conservación de energía momentum: $T_{\mu\nu,\nu} = 0$

Para encontra la densidad lagrangeana de la Electrodinámica imponemos las siguientes propiedades:

1. Las ecuaciones de los campos deben ser lineales. Esto implica que $\mathcal{L}$ es una función cuadrática de los campos y sus derivadas.

2. $\mathcal{L}$ debe ser invariante de Lorentz.

3. Invarianza de gauge. $\mathcal{L}$ es invariante bajo $\delta A_\mu = \partial_\mu \lambda$

$$\mathcal{L} = a_1 A_\mu A_\mu + a_2 A_{\mu,\nu} A_{\mu,\nu} + a_3 A_{\mu,\nu} A_{\nu,\mu}$$

Se satisfacen 1 y 2. Bajo transformaciones de gauge:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} = 2a_1 A_\mu \lambda_{,\mu} + 2a_2 A_{\mu,\nu}\lambda_{,\mu\nu} + a_3(\lambda_{,\mu\nu} A_{\nu,\mu} + A_{\mu,\nu}\lambda_{,\mu\nu}) = \\ 2a_1 A_\mu \lambda_{,\mu} + (a_2 + a_3)\lambda_{,\mu\nu}(A_{\nu,\mu} + A_{\mu,\nu}) = 0, \\ a_1 = 0, a_2 = -a_3 \\ \mathcal{L} = a_3(A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} A_{\mu,\nu}) A_{\mu,\nu} = -\frac{a_3}{2} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}\end{aligned}$$

Si acoplamos el campo electromagnético a una corriente conservada J_μ, $J_{\mu,\mu} = 0$, agregando un nuevo término a $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = b\,F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{c} J_\mu A_\mu$$

Ejercicio: Mostrar que la acción es invariante de gauge.
Ecuaciones de E-L:

$$\partial_\nu(-4b\,F_{\mu\nu}) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} = \frac{1}{c} J_\mu$$

$$F_{\mu\nu,\nu} = -\frac{1}{4bc} J_\mu = \frac{4\pi}{c} J_\mu \qquad b = -\frac{1}{16\pi}$$

Con $J_\mu = 0$.

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\nu}} A_{\alpha,\mu} - \mathcal{L}\delta_{\mu\nu} = 2b F_{\lambda\rho}(\delta_{\rho\alpha}\delta_{\nu\lambda} - (\rho \leftrightarrow \lambda))A_{\alpha,\mu} - \mathcal{L}\delta_{\mu\nu} = \\ 4b F_{\nu\alpha} A_{\alpha,\mu} - \mathcal{L}\delta_{\mu\nu} = 4b F_{\nu\alpha} F_{\mu\alpha} - \mathcal{L}\delta_{\mu\nu} + 4b F_{\nu\alpha} A_{\mu,\alpha} = \\ 4b F_{\nu\alpha} F_{\mu\alpha} - \mathcal{L}\delta_{\mu\nu} + 4b\,(F_{\nu\alpha} A_\mu)_{,\alpha} \\ \tilde{T}_{\mu\nu} = 4b F_{\nu\alpha} F_{\mu\alpha} - \mathcal{L}\delta_{\mu\nu} \\ \tilde{T}_{\mu\nu,\nu} = T_{\mu\nu,\nu} - 4b(F_{\nu\alpha} A_\mu)_{,\alpha\nu} = 0 \end{aligned}$$

$\tilde{T}_{\mu\nu}$ es invariante de gauge y simétrico. Es el tensor de energía momentum del campo electromagnético.

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = 4b\left(F_{\nu\alpha}F_{\mu\alpha} - \frac{1}{4}F_{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}\delta_{\mu\nu}\right), \quad 4b = -\frac{1}{4\pi}$$

$4b = -\frac{1}{4\pi}$ se obtiene de $\tilde{T}_{44}$ que es la densidad de energía del campo.