Dinámica de partículas relativistas y campos electromanéticos

1 Segunda ley de Newton

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = m_0 \frac{dv_\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} v_\nu \tag{1}$$

2 Lagrangiano y Hamiltoniano

Para describir la interacción entre una partícula cargada y el campo electromagnético invocamos los dos principios usuales: invarianza de Lorentz e invarianza de gauge de la acción. Además sabemos que la interacción debe ser lineal en el potencial:

$$S = -m_0 c^2 \int d\tau + \alpha \int d\tau v_\mu A_\mu$$

La invarianza relativista de la acción es evidente. Bajo transformaciones de gauge tenemos:

$$\delta S = \alpha \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau v_\mu \partial_\mu \lambda = \alpha \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{dx_\mu}{d\tau} \partial_\mu \lambda = \alpha(\lambda(\tau_1) - \lambda(\tau_2)) = 0$$

El lagrangiano es:

$$-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \alpha\left(-c\Phi + \vec{v}.\vec{A}\right) \rightarrow \frac{1}{2} m_0 v^2 - \alpha c\Phi, \vec{A} = \vec{0}$$

luego $\alpha = \frac{q}{c}$

Las ecuaciones de Lagrange son:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\vec{p} + \frac{q}{c}\vec{A}\right)_i &= \frac{q}{c}(-c\Phi_{,i} + v_j A_{j,i}) \\ &= \frac{d}{dt}\vec{p}_i + \frac{q}{c}\partial_t \vec{A_i} + \frac{q}{c} A_{i,j} v_j \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_i = \frac{q}{c} v_j F_{ij} + q\left(-\Phi_{,i} - \frac{q}{c}\partial_t \vec{A_i}\right) = \frac{q}{c} v_j \varepsilon_{ijk} B_k + q E_i$$

Hamiltoniano:

$$P_i = m_0 v_i \gamma + \frac{q}{c} A_i = p_i + \frac{q}{c} A_i$$

$$\begin{aligned} H = v_i\left(p_i + \frac{q}{c}A_i\right) + m_0 c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{q}{c}\left(-c\,\Phi + \vec{v}\,.\vec{A}\,\right) = \\ v_i p_i + m_0 c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + q\,\Phi = \\ m_0(v^2\gamma + c^2\gamma^{-1}) + q\,\Phi = \\ m_0 c^2\gamma\left(\frac{v^2}{c^2} + 1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + q\,\Phi = \\ m_0 c^2\gamma + q\,\Phi \end{aligned}$$

$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$,

$$H = c\sqrt{\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + m_0^2 c^2} + q\,\Phi$$

Ejercicio 1. Muestre que las ecuaciones de Hamilton se reducen a la ecuación de fuerza de Lorentz.

2.1 Ecuaciones covariantes

$$-c^2(d\tau)^2 = dx_\mu dx_\mu, d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-dx_\mu dx_\mu}$$

Introduzca un parámetro de evolución escalar u. La acción se escribe:

$$S = -m_0 c \int du \sqrt{-\frac{dx_\mu}{du}\frac{dx_\mu}{du}} + \frac{q}{c}\int du \frac{dx_\mu}{du}A_\mu$$

El lagrangiano explícitamente covariante es:

$$L_c = -m_0 c\sqrt{-\frac{dx_\mu}{du}\frac{dx_\mu}{du}} + \frac{q}{c}\frac{dx_\mu}{du}A_\mu, \frac{dx_\mu}{du} = \dot{x}_\mu$$

Ejercicio 2. Encuentre las ecuaciones de Lagrange para L_c. Luego identifique $du = d\tau$ Muestre que las ecuaciones corresponden a la forma covariante de la ley de Newton (1)

3 Movimiento en un campo magnético uniforme y estático

Un campo magnético no cambia la energía cinética de una partícula

$$\vec{F}.\vec{v} = q\,\vec{v}.(\vec{v}\times\vec{B}) = 0 \quad \gamma\frac{d\,\vec{v}}{dt}.\vec{v} + \dot{\gamma}v^2 = \frac{1}{2}\gamma\frac{d\,\vec{v}^{\,2}}{dt} + \dot{\gamma}v^2 = 0, \quad \left(\frac{1}{2}\gamma + \frac{v^2}{2c^2}\gamma^3\right)\frac{d\,\vec{v}^{\,2}}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{2}\gamma^3\frac{d\,\vec{v}^{\,2}}{dt} = 0 \qquad \gamma = \text{constante} \qquad E = m_0c^2\gamma = \text{constante}$$

Campo magnético Uniforme:$\vec{B} = B_0\hat{z}$. Se tiene:

$$\vec{F} = q(v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}) \times B_0\hat{z} = q\,B_0(-v_x\hat{y} + v_y\hat{x}), \qquad m_0 \longrightarrow m$$

$$m\,\dot{v}_x = q\gamma^{-1}B_0\,v_y \quad m\,\dot{v}_y = -q\gamma^{-1}B_0\,v_x \quad m\,\dot{v}_z = 0$$

Esto es: $v_z = v_{0z}$, una constante.

$$\dot{v}_x = \omega v_y \qquad \dot{v}_y = -\omega v_x \qquad \omega = \frac{q\,B_0}{m\gamma} = \text{frecuencia de giro o precesión}$$

$$\ddot{v}_x = -\omega^2 v_x \quad v_x = A\,\text{sen}(\omega t + \alpha) \quad v_y = \frac{\dot{v}_x}{\omega} = A\cos\,(\omega t + \alpha)$$

Notar que en cada plano perpendicular al eje z la partícula realiza un movimiento circular uniforme.

Para determinar la trayectoria, integramos las ecuaciones anteriores:

$$v_x = \dot{x} = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha) \quad x = -\frac{A}{\omega}\cos(\omega t + \alpha) + x_0$$

$$v_y = \dot{y} = A\cos(\omega t + \alpha) \quad y = \frac{A}{\omega}\mathrm{sen}(\omega t + \alpha) + y_0$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \left(\frac{A}{\omega}\right)^2 = R^2$$

$$v_z = \dot{z} = v_{0z} \qquad z = v_{0z}t + z_0$$

La trayectoria es una hélice.

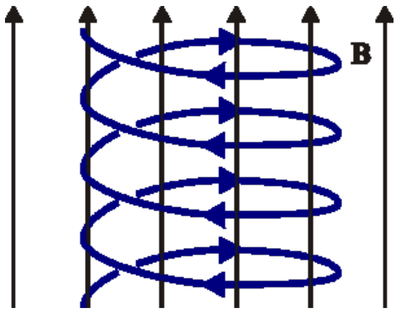

Figura 1.

4 Movimiento en un campo magnético y eléctrico uniformes y estáticos

Selector de velocidad

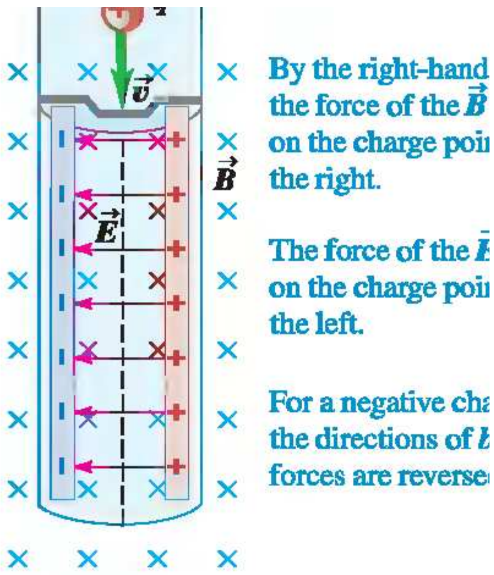

Figura 2.
Selector de velocidad

El campo eléctrico apunta hacia la izquierda. La fuerza total actuando sobre la partícula de carga q y velocidad $v\ \hat{y}$ donde $\hat{y}$ apunta hacia abajo es:

$$\vec{F} = qE\hat{x} + qv\hat{y} \times (-B\hat{z}) = q(E - Bv)\hat{x}$$

La partícula no se deflectará si $v = \frac{E}{B}$. Variando E, B podemos seleccionar partículas de velocidad bien definida.

Ejercicio 3. Encuentre la velocidad y posición de una partícula de carga q y masa m en presencia de campos magnéticos y eléctricos uniformes(Jackson 12.6).

5 Lagrangiano para el campo electromagnético

Sea $\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$ la densidad lagrangiana de un conjunto de campos $\phi_i(x)$.

La acción del sistema es $S=\int_V d^4x\mathcal{L}$. El principio de menor acción con valores fijos de los campos sobre la superficie cerrada Σ cuyo interior es V implica:

$$\delta S=\int_V d^4x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\delta\phi_i+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{i\,,\,\mu}}(\delta\phi_i)_{\,,\,\mu}\right)=$$

$$\int_V d^4x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{i\,,\,\mu}}\right)\delta\phi_i+\oint_\Sigma d\sigma_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{i\,,\,\mu}}=0$$

El término de superficie se anula, dado que $\delta\phi_i=0$ allí.

Ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{i\,,\,\mu}}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}$$

Tensor de energía-momentum. Si la densidad lagrangeana no depende de explícitamente de x,lo que refleja la invarianza translacional de la acción, se tiene:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\phi_{i\,,\,\mu}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{i\,,\,\nu}}\phi_{i\,,\,\nu\mu}=$$

$$\partial_\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{i\,,\,\nu}}\phi_{i\,,\,\mu}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{i\,,\,\nu}}\phi_{i\,,\,\nu\mu}=\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{i\,,\,\nu}}\phi_{i\,,\,\mu}\right)$$

$$\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{i\,,\,\nu}}\phi_{i\,,\,\mu}-\mathcal{L}\delta_{\mu\nu}\right)=0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} T_{\mu\nu} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\nu}} \phi_{i,\mu} - \mathcal{L}\delta_{\mu\nu}\text{: tensor energía momentum canónico.} \\ \text{Conservación de energía momentum: } T_{\mu\nu,\nu} = 0 \end{array}}$$

Para encontra la densidad lagrangeana de la Electrodinámica imponemos las siguientes propiedades:

1. Las ecuaciones de los campos deben ser lineales. Esto implica que $\mathcal{L}$ es una función cuadrática de los campos y sus derivadas.

2. $\mathcal{L}$ debe ser invariante de Lorentz.

3. Invarianza de gauge. $\mathcal{L}$ es invariante bajo $\delta A_\mu = \partial_\mu \lambda$

$$\mathcal{L} = a_1 A_\mu A_\mu + a_2 A_{\mu,\nu} A_{\mu,\nu} + a_3 A_{\mu,\nu} A_{\nu,\mu}$$

Se satisfacen 1 y 2. Bajo transformaciones de gauge:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = 2a_1 A_\mu \lambda_{,\mu} + 2a_2 A_{\mu,\nu}\lambda_{,\mu\nu} + a_3(\lambda_{,\mu\nu}A_{\nu,\mu} + A_{\mu,\nu}\lambda_{,\mu\nu}) = \\ 2a_1 A_\mu \lambda_{,\mu} + (a_2 + a_3)\lambda_{,\mu\nu}(A_{\nu,\mu} + A_{\mu,\nu}) = 0, \\ a_1 = 0, a_2 = -a_3 \\ \mathcal{L} = a_3(A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}A_{\mu,\nu})A_{\mu,\nu} = -\frac{a_3}{2} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Si acoplamos el campo electromagnético a una corriente conservada J_μ, $J_{\mu,\mu}=0$, agregando un nuevo término a $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = b F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{c} J_\mu A_\mu$$

Ejercicio: Mostrar que la acción es invariante de gauge.
Ecuaciones de E-L:

$$\partial_\nu(-4b F_{\mu\nu}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = \frac{1}{c} J_\mu$$
$$F_{\mu\nu,\nu} = -\frac{1}{4bc} J_\mu = \frac{4\pi}{c} J_\mu \qquad b = -\frac{1}{16\pi}$$

6 Lagrangiano de Proca

7 Tensor Energía-momentum canónico y simétrico

$$\mathcal{L} = b F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\nu}} A_{\alpha,\mu} - \mathcal{L}\delta_{\mu\nu} = 2b F_{\lambda\rho}(\delta_{\rho\alpha}\delta_{\nu\lambda} - (\rho \leftrightarrow \lambda)) A_{\alpha,\mu} - \mathcal{L}\delta_{\mu\nu} =$$
$$4b F_{\nu\alpha} A_{\alpha,\mu} - \mathcal{L}\delta_{\mu\nu} = 4b F_{\nu\alpha} F_{\mu\alpha} - \mathcal{L}\delta_{\mu\nu} + 4b F_{\nu\alpha} A_{\mu,\alpha} =$$

$$4b\,F_{\nu\alpha}F_{\mu\alpha} - \mathcal{L}\delta_{\mu\nu} + 4b\,(F_{\nu\alpha}A_\mu)_{,\alpha}$$

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = 4b\,F_{\nu\alpha}F_{\mu\alpha} - \mathcal{L}\delta_{\mu\nu}$$

$$\tilde{T}_{\mu\nu,\nu} = T_{\mu\nu,\nu} - 4b(F_{\nu\alpha}A_\mu)_{,\alpha\nu} = 0$$

$\tilde{T}_{\mu\nu}$ es invariante de gauge y simétrico. Es el tensor de energía momentum del campo electromagnético.

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = 4b\left(F_{\nu\alpha}F_{\mu\alpha} - \frac{1}{4}F_{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}\delta_{\mu\nu}\right), \quad 4b = -\frac{1}{4\pi}$$

$4b = -\frac{1}{4\pi}$ se obtiene de $\tilde{T}_{44}$ que es la densidad de energía del campo.