La delta de Dirac es una función generalizada que viene definida por la siguiente fórmula integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\, f(x)\ \ dx = f(a) \qquad \left[e.g. \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\ \ \mathrm{dx} = 1 \right]$$

La delta de Dirac no es una función estrictamente hablando, puesto que se puede ver que requeriría tomar valores infinitos. A veces, informalmente, se define la delta de Dirac como el límite de una sucesión de funciones que tiende a cero en todo punto del espacio excepto en un punto para el cual divergería hacia infinito; de ahí la "definición convencional" dada por la también convencional fórmula aplicada a las funciones definidas a trozos:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \; ;$$

Es frecuente que en física la delta de Dirac se use como una distribución de probabilidad idealizada; técnicamente, de hecho, es una distribución (en el sentido de Schwartz).

Se puede definir como el límite de una sucesión de funciones, en el sentido de las distribuciones.

$$\mathrm{Si} \left[\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, \phi(x)\, dx \right] \to \phi(0)\, , \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \delta(x)$$

Algunos ejemplos posibles de sucesión de funciones que cumpla lo anterior son:

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \|x\| < \frac{1}{2n} \\ 0 & \|x\| \geq \frac{1}{2n} \end{cases} \qquad f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}$$

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{n^2 x^2 + 1} \qquad f_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x}$$

Estas propiedades se pueden demostrar multiplicando ambos miembros de cada igualdad por una función $f(x)$ e integrando teniendo en cuenta que la función delta no puede formar parte del resultado a menos que esté dentro de una integral.

- $\delta(x) = \delta(-x)$
- $f(x)\delta\prime(x) = -f\prime(x)\delta(x)$
- $\delta\prime(x) = -\delta\prime(-x)$
- $x^n\delta(x) = 0 \qquad \forall n > 0, x \in \mathbb{R}$
- $\delta(ax-b) = |a|^{-1}\delta(x-(b/a)) \qquad \forall a \epsilon R$
- $\delta(f(x)) = \sum_n |f\prime(x_n)|^{-1}\delta(x-x_n), \quad \text{con } f(x_n) = 0, f\prime(x_n) \neq 0$
- $\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}dt$

$$\delta^{(n)}(x) = \prod_{k=1}^{n} \delta(x_k)$$

Densidad de carga de una carga puntual situada en $\vec{x}\,'$:

$$\rho(\vec{x}\,) = q\delta(\vec{x} - \vec{x}\,')$$

Ejercicio: Mostrar que:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|}\right) = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}\,')$$

Indic: Evalúe el laplaciano para $|\vec{x} - \vec{x}\,'| \neq 0$. Luego calcule el flujo del gradiente a través de una superficie cerrada S que rodea $\vec{x}\,'$.

Ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \phi(x) = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}$$

Para resolver la ecuación de Poisson en un volumen V con condiciones de borde sobre la superficie cerrada S que rodea a V, introducimos la función de Green:

$$\begin{aligned} \nabla^2 G(x, x') &= -4\pi\delta(x - x') \\ G(x, x') &= \frac{1}{|x - x'|} + F(x, x') \\ \nabla^2 F(x, x') &= 0 \end{aligned}$$

Teorema de Green:

$$\int_V d^3x' (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) = \oint_S d\vec{S}' (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi)$$

$$\psi = G(x, x')$$

$$\begin{aligned} -4\pi\phi(x) + \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V d^3x' G(x, x')\rho(x') &= \oint_S d\vec{S}' (\phi(x')\nabla' G(x, x') - G(x, x')\nabla'\phi(x')) \\ \phi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V d^3x' G(x, x')\rho(x') - \frac{1}{4\pi}\oint_S dS' &\left(\phi(x')\frac{\partial G(x, x')}{\partial n'} - G(x, x')\frac{\partial \phi(x')}{\partial n'} \right) \end{aligned}$$

Condiciones de Borde

- Dirichlet:$G(x, x') = 0, x' \varepsilon S$,

  $$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V d^3x' G(x, x')\rho(x') - \frac{1}{4\pi}\oint_S dS' \left(\phi(x')\frac{\partial G(x, x')}{\partial n'} \right)$$

- Neumann:$\oint_S dS' \frac{\partial G(x, x')}{\partial n'} = -4\pi$. La condición de borde más simple es $\frac{\partial G(x, x')}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{A}$

,con A el área de la superficie S.

Consideremos N superficies conductoras, Cada una es equipotencial con potencial V_i. Dada la relación lineal entre el potencial y la densidad de carga, se tiene que:

$$V_i = \sum_j p_{ij} Q_j$$

Invirtiendo este sistema:

$$Q_i = \sum_j C_{ij} V_j$$

Q_i: Carga en el conductor i.

C_{ii}: Capacidad del conductor i

C_{ij}: Coeficiente de inducción

$$W = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij} V_i V_j$$