

Inducción Electromagnética



Figura 1. Un imán estacionario NO induce una corriente en la bobina.

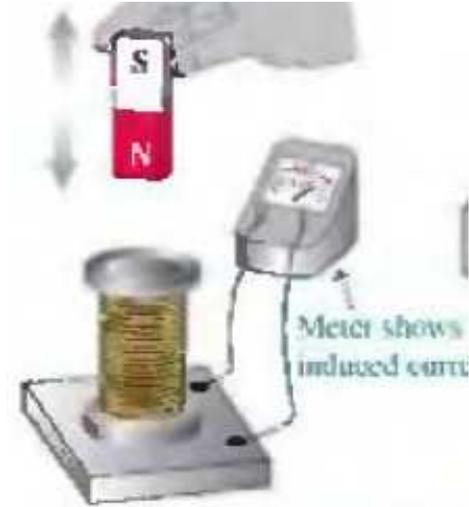


Figura 2. Al mover el imán se induce una corriente en la bobina.

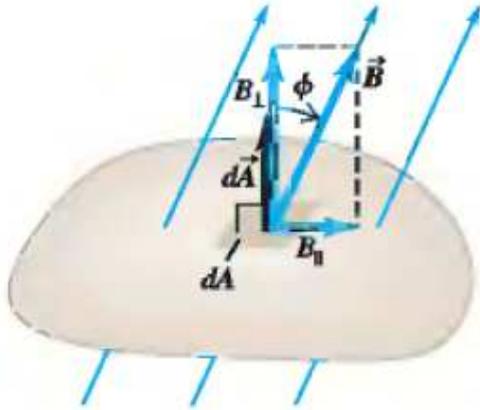


Figura 3. Si movemos la bobina superior, por la que circula una corriente, se induce una corriente en la bobina inferior.



Figura 4. Al conectar o desconectar el circuito de la bobina interior, se induce una corriente en la bobina exterior.

Lo común a estos experimentos es el cambio del flujo magnético Φ_B en la bobina conectada al galvanómetro.



El flujo magnético a través de una superficie S se define por $d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A} = B dA \cos \phi$, donde ϕ es el ángulo entre \vec{B} y $d\vec{A}$.

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Figura 5. Flujo magnético a través de un elemento de área $d\vec{A}$.

Ley de inducción de Faraday: $\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$. La fuerza electromotriz (fem) inducida en un lazo cerrado es igual al cambio temporal del flujo del campo magnético a través del lazo.

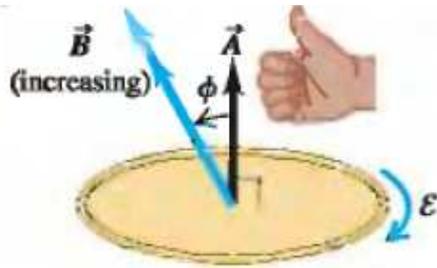


Figura 6.

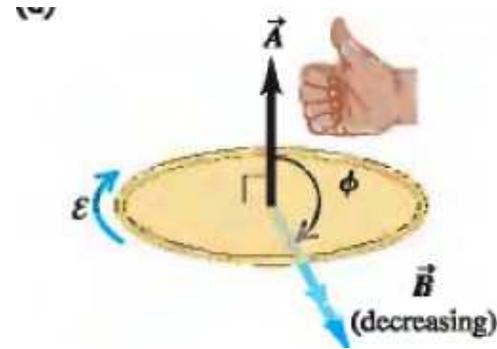


Figura 9.

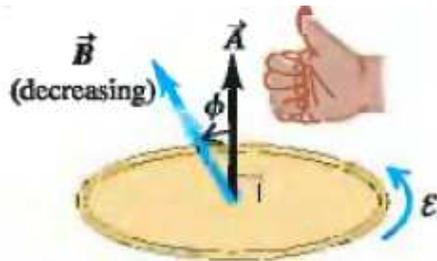


Figura 7.

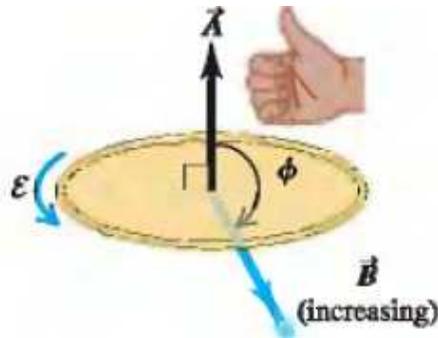
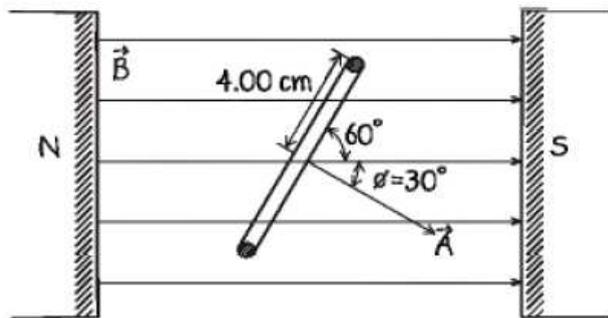


Figura 8.

- (a) Definir una dirección positiva para el vector área
- (b) Calcular el flujo y la variación del flujo.
- (c) Determinar el signo de la fem inducida. Es contrario a la variación del flujo
- (d) El pulgar de la mano derecha apuntando en la dirección del vector área. Si la fem encontrada en (c) es positiva(negativa), está en la misma(opuesta) dirección que la curvatura de los demás dedos.



Una bobina conteniendo $N=500$ espiras

Flujo del campo magnético en la

bobina: $\Phi_B = BAN \cos 30^\circ$

$$\varepsilon = -\dot{\Phi}_B = -\dot{B} AN \cos 30^\circ = 0.2 \times \pi \times 16 \times 10^{-4} \times 500 \times \cos 30^\circ = 0.435 \text{ V}$$

circulares de radio 4 cm., está situada entre los polos de un electroimán que produce un campo magnético uniforme. El ángulo entre la bobina y el campo magnético es 60° . El campo decrece a un ritmo de 0.2 T/s . Encontrar la magnitud y dirección de la fem inducida.

Dado que ε es positiva, apuntando el pulgar de la mano derecha en la dirección de \vec{A} , la curvatura de los otros dedos nos da la dirección de la fem inducida. Es mayor en la parte superior que en la inferior.

El campo magnético entre los polos del electroimán de la figura es uniforme, pero su magnitud crece a un ritmo de 0.02 T/s . El área del lazo es 120 cm^2 y la resistencia total del circuito incluyendo el amperímetro es 5Ω .

a) Encuentre la fem y la corriente inducida en el circuito.

$$\varepsilon = -0.02 \text{ T/s} \times 0.012 \text{ m}^2 = 2.4 \times 10^{-4} \text{ V}$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{2.4}{5} \times 10^{-4} \text{ A} = 4.8 \times 10^{-5} \text{ A}$$

b) Si el lazo se hace de un material aislante, qué pasa con la fem y la corriente en el

lazo.

La fem sigue presente, pero la corriente disminuye al aumentar la resistencia del lazo.

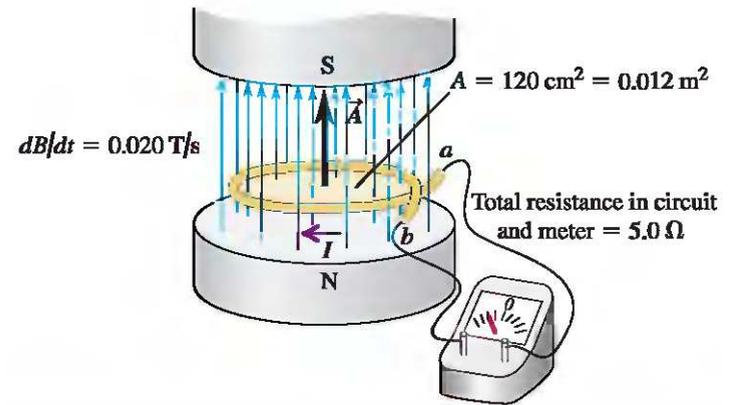


Figura 10.

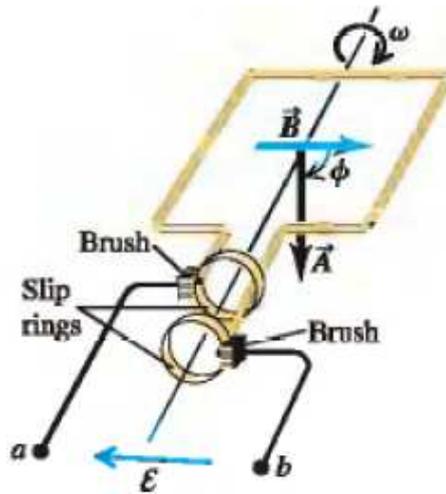


Figura 11. Generador 1

Una espira de área A rota con velocidad angular ω en presencia de un campo magnético \vec{B} lo que induce una fem en la espira, la que se transmite a los terminales a, b a través de los contactos (escobillas) que rozan los anillos que soportan los dos extremos de la espira. En la Figura 7 se ve como cambia la fem en el tiempo, dependiendo de la posición relativa entre espira y campo. Es un generador de corriente alterna.

$$\Phi_B = BA \cos \phi \quad \phi = \omega t \quad \epsilon = -BA\omega (-)\text{sen } \omega t = BA\omega \text{sen } \omega t$$

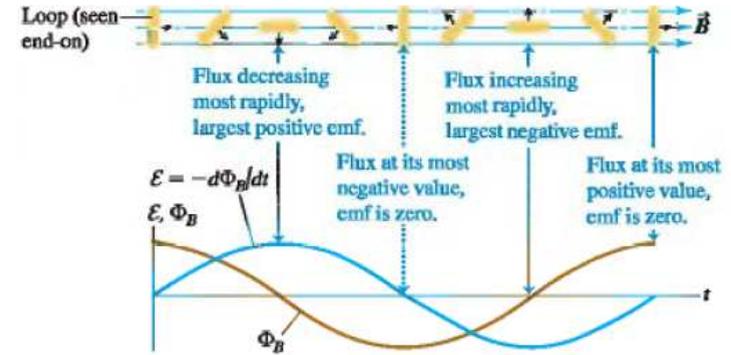


Figura 12. Variación temporal de la fem inducida

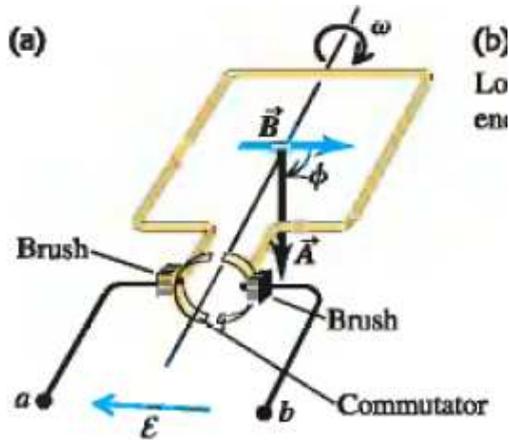


Figura 13.

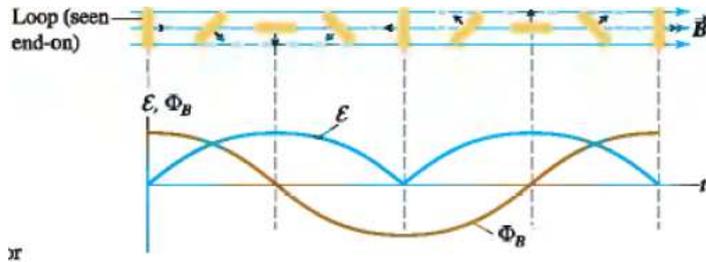


Figura 14.

Este es un generador de corriente continua (Ver Figura 14). Se basa en el anillo conmutador que rota junto con la espira y cambia la conexión a a, b cuando se revierte la fem inducida.

Considere un motor con una bobina cuadrada de 10 cm . de lado, con 500 vueltas de alambre conductor. $B = 0.2 \text{ T}$ A qué velocidad angular de rotación, la fem media inducida en el motor es 112 V ?

$$\varepsilon = BA\omega |\sin \omega t|$$

la fem media en un ciclo es $\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \varepsilon(t) = \omega BA \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dx \sin(x) = \frac{2}{\pi} \omega AB$

$$\omega = \frac{\pi \langle \varepsilon \rangle}{2AB} = \frac{3.14 \times 112}{2 \times 500 \times 10^{-2} \times 0.2} = 176 \text{ rad/s}$$

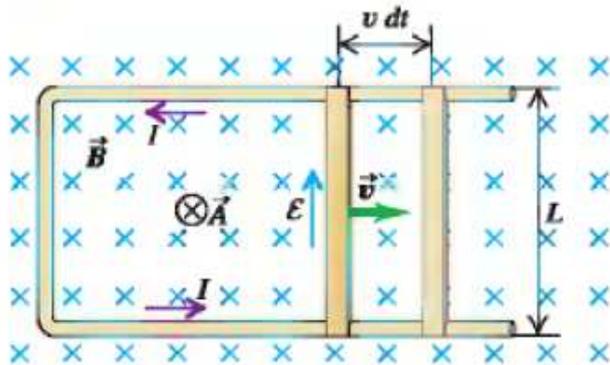


Figura 15.

La espira tiene una regla deslizante que se mueve con velocidad v hacia la derecha. Se

tiene que $\Phi_B = BLx(t)$, $x(t) = vt$. Así que:

$$\epsilon = -BLv$$

El vector área apunta en la dirección de \vec{B} . La regla de la mano derecha, con el pulgar entrando en la figura da la dirección positiva de la fem en la dirección horaria. Debido al signo menos la fem tiene la dirección que se muestra en la figura (15).

En el generador de la regla deslizante, se disipa energía en el circuito debido a la resistencia R de éste. Mostrar que la rapidez con que se disipa energía en el circuito es igual al trabajo realizado para deslizar la regla.

La potencia disipada en un instante t es:

$$P = \frac{\varepsilon^2}{R} \quad R(t) = \rho(2L + 2vt)/a$$
$$P = \frac{(BLv)^2}{R(t)}$$

La fuerza sobre la regla es:

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B} = -ILB\hat{v}$$
$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = -ILBv = -\frac{\varepsilon}{R}LBv = -\frac{(LBv)^2}{R}$$

El ejemplo anterior muestra que los generadores no producen energía de la nada. La energía proviene de cualquier fuente que mantiene la regla del ejemplo anterior, moviéndose.



Figura 16.

Molinos de viento en Chile

El signo de la fem inducida es tal que produce una corriente en el lazo cerrado que se opone al cambio del flujo Φ_B .

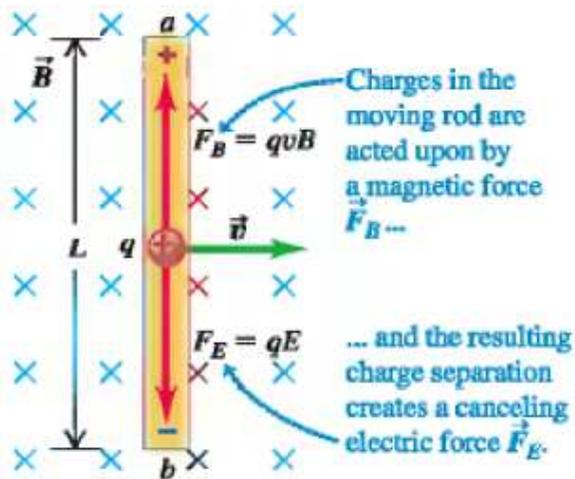


Figura 17.

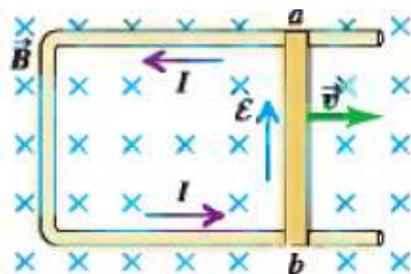


Figura 18.

In Figura 15 vemos un conductor en movimiento, con portadores de carga q , que

suponemos positivas. El campo magnético ejerce una fuerza: $\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$ sobre las cargas. Esta fuerza apunta de $b \rightarrow a$. Las cargas positivas se acumulan en a , creando un campo eléctrico, en dirección $a \rightarrow b$, que eventualmente cancela la fuerza magnética: $qvB - qE = 0$, $E = vB$. La diferencia de potencial entre a y b es: $V_{ab} = vBL$.

Veamos la Fig. 16. La parte fija del circuito no genera una fem, pero la parte móvil sí. La fem generada es justamente:

$$\varepsilon = vBL$$

Esta fem se distribuye en todo el circuito conductor.

Supongamos que tenemos un conductor de forma arbitraria, que se mueve con velocidad $\vec{v}(\vec{x})$, en presencia de un campo magnético $\vec{B}(\vec{x})$. La fem inducida en un trozo $d\vec{l}$ del conductor es:

$$d\varepsilon = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Para un lazo cerrado C de conductor tenemos la fem inducida total:

$$\varepsilon = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Se puede mostrar que esta expresión coincide con la Ley de Faraday para cargas en movimiento.

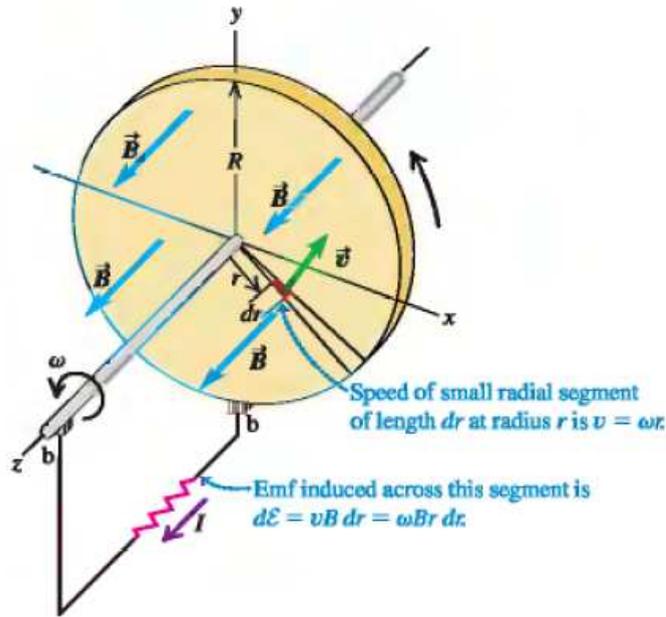


Figura 19.

Un disco cargado de radio R gira con velocidad angular ω en torno a su eje. En la dirección del eje existe un campo magnético constante \vec{B} . Encuentre la diferencia de potencial entre el centro y el borde del disco.

$$\varepsilon = \int_0^R v B dr = \int_0^R \omega r B dr = \frac{1}{2} \omega B R^2$$

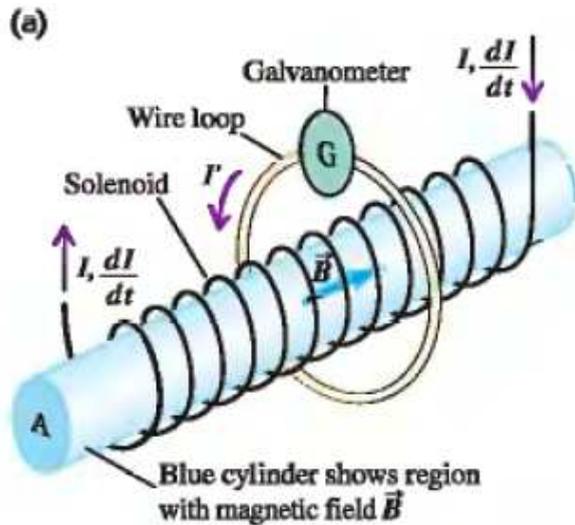


Figura 20.

En el solenoide de la figura 18 circula una

corriente variable $I(t)$. Debido a la ley de Faraday, se induce una fem ε en la espira conectada al galvanómetro. Sin embargo, aquí no hay partes móviles. Cuál es la fuente de la fem ε ?

La variación del flujo magnético crea un campo eléctrico \vec{E} , tal que, para C estacionaria se tiene:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{x} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

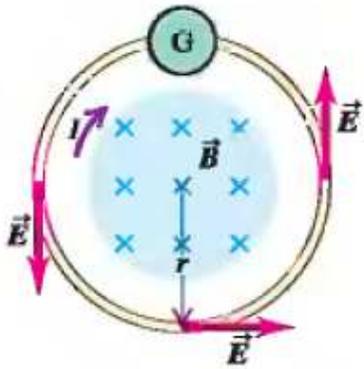


Figura 21.

Encontremos el campo eléctrico para la espira de la Fig. 19. Por simetría E es constante a lo largo de la circunferencia de radio r : $E2\pi r = \pi r^2 \dot{B}$,

$$E = \frac{1}{2} r \dot{B}$$

Recordemos que, debido a la ley de Coulomb, tenemos que

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{x} = 0 \quad (1)$$

Esto dice que la fuerza electrostática es conservativa y lleva a la existencia del potencial electrostático.

Sin embargo, vemos de la ley de Faraday que el campo eléctrico inducido no satisface la ecuación (1). Esto es, cuando los campos cambian en el tiempo, el campo eléctrico es no-conservativo.

Podemos encontrar una forma diferencial de la ley de Faraday, utilizando el teorema del rotor.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{x} = \int_S d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{d}{dt} \int_S d\vec{S} \cdot \vec{B} = -\int_S d\vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Hemos supuesto que tanto C como S no dependen del tiempo. Como S es arbitraria se obtiene:

Ley de Faraday diferencial:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

Recordemos que el campo magnético no cambia la energía de una partícula. En efecto la potencia gastada por un campo electromagnético en un volumen V es:

$$P = \int d^3x \quad \vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \int d^3x (\nabla \times B) \cdot E \quad , \text{Ley de Ampère}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \oint_S dS_k \varepsilon_{ikj} B_j E_i + \frac{1}{\mu_0} \int d^3x (\nabla \times E) \cdot B =$$

$$\frac{1}{\mu_0} \oint_S dS_k \varepsilon_{ikj} B_j E_i - \frac{1}{\mu_0} \int d^3x \frac{\partial B}{\partial t} \cdot B = \quad \text{Ley de Faraday}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \oint_S dS_k \varepsilon_{ikj} B_j E_i - \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

$$\varepsilon_{ikj} B_{j,k} E_i = (\varepsilon_{ikj} B_j E_i)_{,k} - \varepsilon_{ikj} B_j E_{i,k}$$

Densidad de Energía magnética: $u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$

La integral de superficie da el flujo de energía a través de S (Vector de Poynting).

Notar, sin embargo, que no aparece la densidad de energía eléctrica. Esto apunta a la falta de la corriente de desplazamiento de Maxwell.

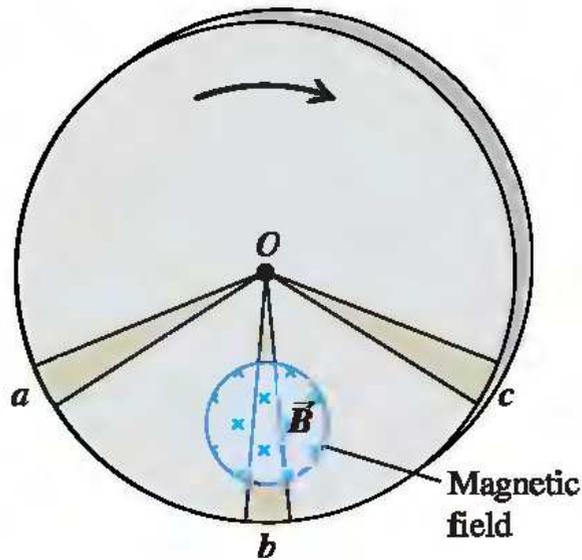
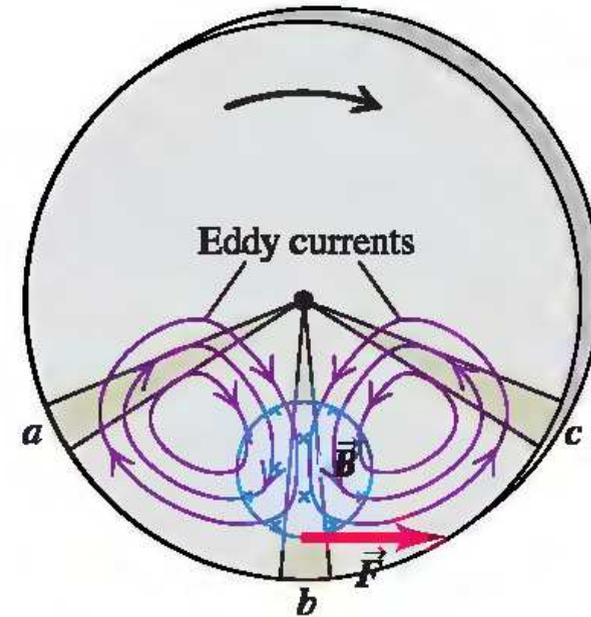


Figura 22.

El disco metálico de la figura está girando en presencia de un campo magnético perpendicular al plano de la figura. Hay generación de voltaje sólo en la zona sumergida en el campo, por ejemplo $O b$. Sin embargo $O a$ y $O c$ siendo conductores,



permiten el paso de corrientes debido a las cargas desplazadas en b . Estas corrientes inducidas se llama de Foucault o eddy, por la forma arremolinada que tienen. Tales corrientes ejercen una fuerza \vec{F} sobre el disco que se opone a su rotación.

El campo magnético de Júpiter induce en Io corrientes que son capaces de producir erupciones volcánicas. Estas corrientes disipan energía a un ritmo de $10^{12}W$. Así mantienen caliente el interior de Io.

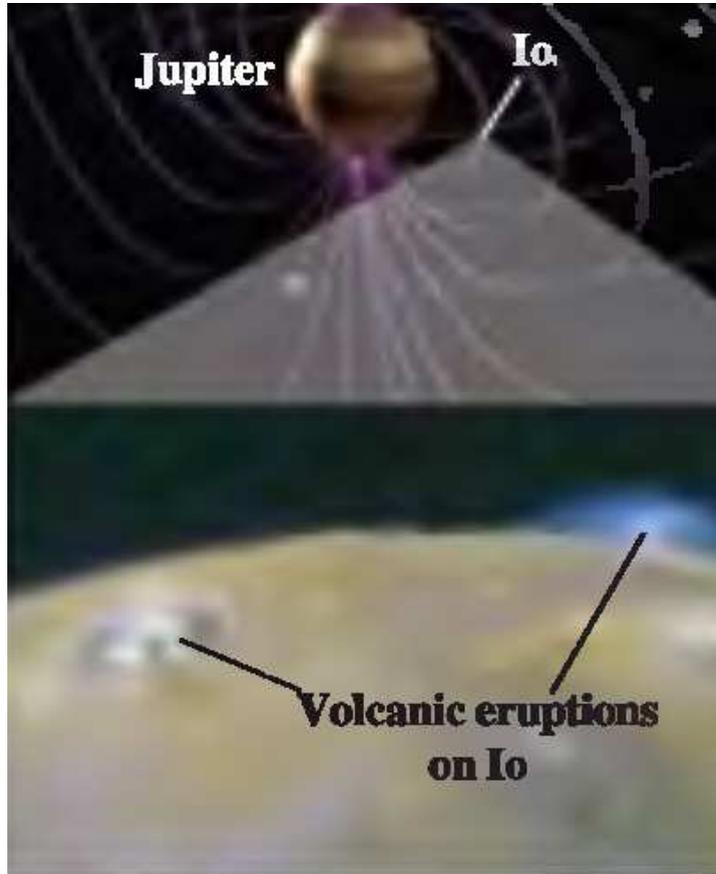


Figura 23.

Las ecuaciones del electromagnetismo hasta antes de Maxwell son:

1. Ley de Gauss:

$$\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{E} = \frac{qV}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

2. Ley de Gauss del Magnetismo:

$$\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

3. Ley de Ampere:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{x} = \mu_0 I_S \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

4. Ley de Faraday

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{x} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

Maxwell se dio cuenta que estas ecuaciones son incompatibles con la conservación de la carga eléctrica: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$.

En efecto, use la identidad $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ (Demuéstrelo!) en la ley de Ampere, lo que da: $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$. Esto es cierto sólo si ρ no depende del tiempo.

Para generalizar la ley de Ampere, Maxwell propuso agregar a \vec{J} un término llamado corriente de desplazamiento \vec{J}_D . Se tiene ahora:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_D = 0 = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_D$$

De la ley de Gauss:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Entonces:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J}_D - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell son:

1. Ley de Gauss:

$$\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{E} = \frac{qV}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

2. Ley de Gauss del Magnetismo:

$$\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

3. Ley de Ampere y corriente de desplazamiento:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{x} = \mu_0 \left(I_S + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

4. Ley de Faraday

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{x} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

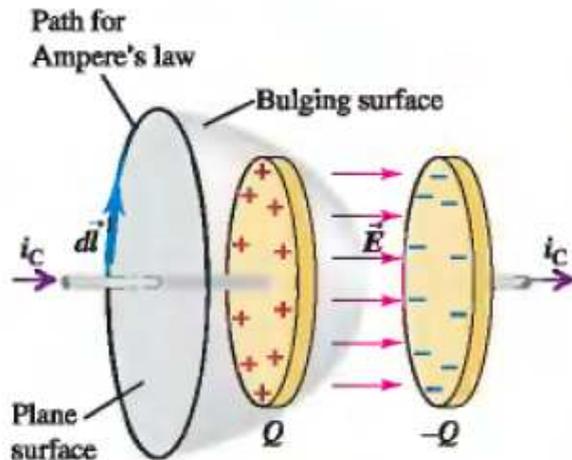


Figura 24.

Un condensador está siendo cargado por la corriente i_C . Apliquemos la ley de Ampere a la superficie plana. Se obtiene $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} =$

$\mu_0 i_C$. Sin embargo la superficie curva tiene la misma curva frontera. Por la superficie curva no pasa corriente, con lo cual la circulación del campo magnético es cero. Contradicción!

La contradicción se resuelve tomando en cuenta la corriente de desplazamiento. Entre las placas del condensador el campo eléctrico está creciendo, así que la corriente de desplazamiento pasando por la superficie curva es:

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \quad \Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad i_D = \dot{Q} = i_C$$

Las ecuaciones de Maxwell presentan una simetría de intercambio de los campos eléctricos y magnéticos. Es más sencillo ver esto en el vacío, sin cargas ni corrientes. Vemos que las ecuaciones quedan iguales si realizamos la transformación:

$$\begin{aligned}\vec{E} &\rightarrow -\frac{\vec{B}}{\epsilon_0\mu_0} \\ \vec{B} &\rightarrow \vec{E}\end{aligned}$$

Incluso en presencia de cargas y corrientes, la simetría se realizaría si existiesen monopolos magnéticos. Se los ha buscado, hasta ahora infructuosamente.

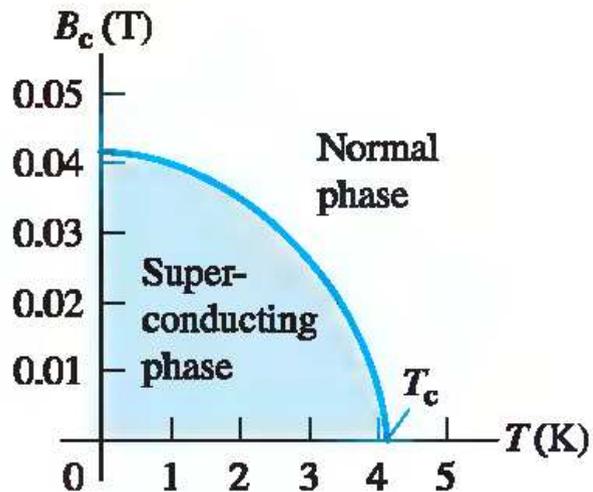


Figura 25. Diagrama de fases para el Mercurio mostrando el campo magnético crítico como función de la temperatura.

A muy **bajas temperaturas** ($T < T_c$), donde T_c es la temperatura crítica y campos magnéticos $B < B_c$, donde B_c es el campo magnético crítico, algunos materiales tales como el plomo y el aluminio cambian radicalmente sus propiedades eléctricas y magnéticas. **No poseen resistencia eléctrica** por lo que el superconductor es un conductor

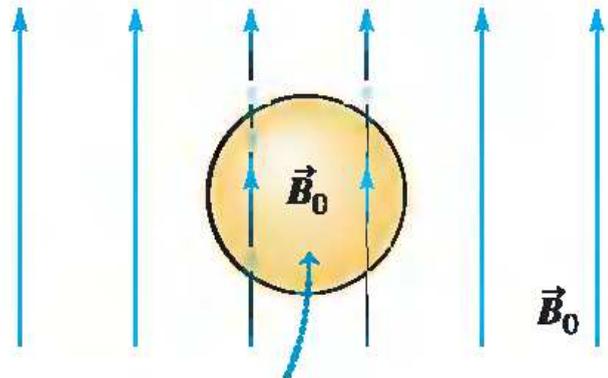
perfecto y la conducción de los electrones se realiza *sin pérdidas de energía*. Los superconductores además expulsan el campo magnético -**efecto Meissner**- lo que da lugar a fenómenos de levitación muy espectaculares.

La superconductividad es una manifestación de un fenómeno cuántico colectivo a escala macroscópica. Las ondas de sonido del material (fonones) inducen una fuerza que supera la repulsión coulombiana de los electrones a bajas temperaturas, permitiendo la formación de estados ligados de dos electrones (pares de Cooper). Estos son los agentes que llevan la corriente en un superconductor

Los superconductores ya se usan en múltiples aplicaciones como la generación de campos magnéticos muy intensos y compactos y se prevé que jueguen un papel

fundamental en las tecnologías del futuro próximo.

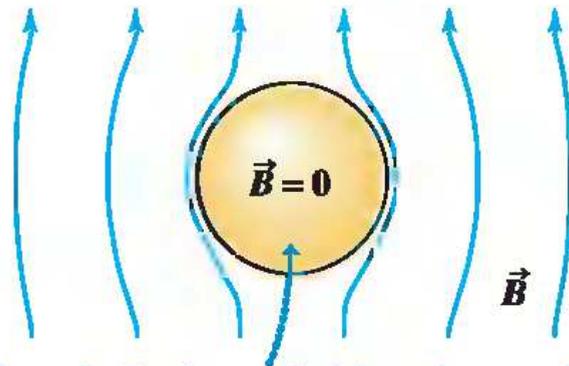
(a) Superconducting material in an external magnetic field \vec{B}_0 at $T > T_c$.



The field inside the material is very nearly equal to \vec{B}_0 .

Figura 26.

(b) The temperature is lowered to $T < T_c$, so the material becomes superconducting.



Magnetic flux is expelled from the material, and the field inside it is zero (Meissner effect).

Figura 27.

(c) When the external field is turned off at $T < T_c$, the field is zero everywhere.

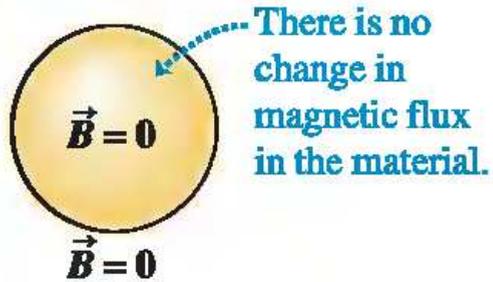


Figura 28.

de un superconductor.

El campo magnético es repelido del interior



Figura 29.



Figura 30.

El superconductor es un material diamagnético. Por esto es repelido por un imán. Por la tercera ley de Newton, el imán también es repelido por el superconductor.

Las figuras muestran este efecto, mostrando un imán que levita sobre un superconductor, debido a la fuerza magnética que éste produce sobre el imán.

La situación descrita corresponde a superconductores tipo-I.

Existen superconductores tipo-II. En ellos un campo magnético puede penetrar hasta una pequeña zona superficial al interior del superconductor.

Los superconductores tipo-II se utilizan para hacer electroimanes, porque poseen un campo magnético crítico B_c mayor.