

1 Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones del electromagnetismo hasta antes de Maxwell son:

1. Ley de Gauss:

$$\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{D} = q_V, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

2. Ley de Gauss del Magnetismo:

$$\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

3. Ley de Ampere:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{x} = I_S \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$$

4. Ley de Faraday

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{x} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

1.1 Corriente de desplazamiento

Maxwell se dio cuenta que estas ecuaciones son incompatibles con la conservación de la carga eléctrica: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$.

En efecto, use la identidad $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ (Demuéstrelo!) en la ley de Ampère, lo que da: $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$. Esto es cierto sólo si ρ no depende del tiempo.

Para generalizar la ley de Ampere, Maxwell propuso agregar a \vec{J} un término llamado corriente de desplazamiento \vec{J}_D . Se tiene ahora:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_D = 0 = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_D$$

De la ley de Gauss:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Entonces:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J}_D - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$
$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

1.2 Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell son:

1. Ley de Gauss:

$$\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{D} = q_V, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

2. Ley de Gauss del Magnetismo:

$$\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

3. Ley de Ampere y corriente de desplazamiento:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{x} = \mu_0 \left(I_S + \frac{d\Phi_D}{dt} \right) \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

4. Ley de Faraday

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{x} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

2 Potencial vector y potencial escalar

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, \vec{A} es el potencial vector.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{\nabla} \times \vec{A}}{\partial t} = \vec{0} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \Phi$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Φ : Potencial escalar.

2.1 Transformaciones de gauge

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \psi$$
$$\vec{\nabla} \Phi' + \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = \vec{\nabla} \Phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \left(\Phi' + \frac{\partial \psi}{\partial t} - \Phi \right) = 0$$

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

(Φ, \vec{A}) producen los mismos campos electromagnéticos que (Φ', \vec{A}')

Esta libertad de gauge permite imponer condiciones de gauge sobre los potenciales sin cambiar los campos electromagnéticos.

1. Gauge de Lorentz: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$

2. Gauge de Coulomb: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

2.2 Ecuaciones de onda

Por ahora consideremos las dos ecuaciones de Maxwell inhomogéneas en el vacío:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \left(-\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)}{\partial t} \right)$$

$$-\nabla^2 \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{J} \quad , \frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0$$

$$\vec{\nabla} \left(-\vec{\nabla} \cdot \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} =$$

$$-\nabla^2 \Phi + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right)$$

En el gauge de Lorentz se obtiene:

$$-\nabla^2 \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \vec{J}$$

$$-\nabla^2 \Phi + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

c : es la velocidad de las ondas. Coincide con la velocidad de la luz en el vacío.

3 Función de Green para la ecuación de ondas

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\vec{x}, t)$$

Función de Green:

$$\left(\nabla_x^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(x, t; x', t') = -4\pi \delta(x - x') \delta(t - t')$$

En el espacio abierto, se tiene:

$$\psi(x, t) = \int G(x, t; x', t') f(x', t') d^3x' dt'$$

El espacio abierto es invariante bajo traslaciones, $G = G(x - x', t - t')$.

$$\delta(x - x') \delta(t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int d\omega e^{ik(x-x')} e^{-i\omega(t-t')}$$

$$G(x, t; x', t') = \int d^3k \int d\omega g(k, \omega) e^{ik(x-x')} e^{-i\omega(t-t')}$$

$$g(k, \omega) = \frac{1}{4\pi^3} \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Causalidad:

i. $G = 0, t < t'$

ii. G representa ondas salientes para $t > t'$.

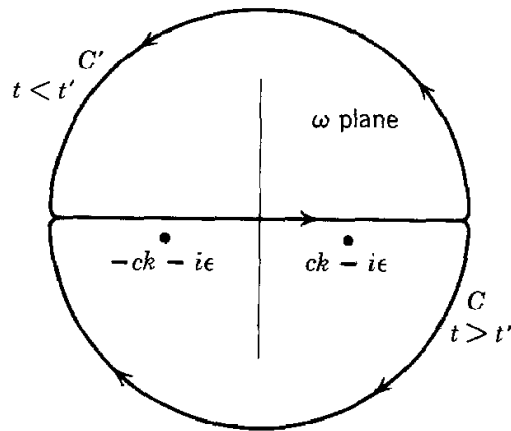


Figura 1.

$$\omega = R e^{i\theta}, \quad R \rightarrow \infty$$

$$\left| \int d\omega g(k, \omega) e^{-i\omega(t-t')} \right| \leq R^{-1} \int d\theta e^{R \sin\theta(t-t')}$$

$t - t' < 0$, cerramos por arriba. Para imponer i . los polos se mueven bajo el eje $\text{Re } \omega$

$t - t' > 0$, cerramos por abajo.

$$\int d\omega g(k, \omega) e^{-i\omega(t-t')} = 2\pi i \frac{c^2}{4\pi^3} \left(\frac{e^{-ick(t-t')}}{2kc} - \frac{e^{ick(t-t')}}{2kc} \right) =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{c^2}{2\pi^2} \frac{\text{sen } ck(t-t')}{ck} \\
2\pi \int_0^\infty dk k^2 \int d\theta \text{sen } \theta & \left(\frac{c^2}{2\pi^2} \frac{\text{sen } ck(t-t')}{ck} \right) e^{ik \cos \theta r}, r = |x - x'| \\
= 2\pi \int_0^\infty dk k^2 & \left(\frac{c^2}{2\pi^2} \frac{\text{sen } ck(t-t')}{ck} \right) \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} = \\
& \frac{2c}{\pi r} \int_0^\infty dk \text{sen } ck(t-t') \text{sen } kr \\
& - \frac{c}{2r} \{2\delta(c(t-t') + r) - 2\delta(c(t-t') - r)\}, c(t-t') + r > 0 \\
& = \frac{c}{r} \delta(c(t-t') - r) = \frac{1}{r} \delta\left(t' - t + \frac{r}{c}\right)
\end{aligned}$$

4 Teorema de Poynting

La potencia gastada por un campo electromagnético en un volumen V es:

$$\begin{aligned}
P = \int d^3x \quad \vec{J} \cdot \vec{E} &= \int d^3x \{(\nabla \times H) \cdot E - E \cdot \partial_t D\} \\
&= \oint_S dS_k \varepsilon_{ikj} H_j E_i + \int d^3x (\nabla \times E) \cdot H - \int d^3x E \cdot \partial_t D =
\end{aligned}$$

$$\oint_S dS_k \varepsilon_{ikj} H_j E_i - \int d^3x \frac{\partial B}{\partial t} \cdot H - \int d^3x E \cdot \partial_t D = \text{Ley de Faraday}$$

$$\oint_S dS_k \varepsilon_{ikj} H_j E_i - \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x \left(\frac{1}{2} B \cdot H + \frac{1}{2} E \cdot D \right) \text{ medio lineal, independiente } t.$$

$$\varepsilon_{ikj} B_{j,k} E_i = (\varepsilon_{ikj} B_j E_i)_{,k} - \varepsilon_{ikj} B_j E_{i,k}$$

Densidad de Energía magnética: $u_B = \frac{1}{2} B \cdot H$

Densidad de Energía eléctrica: $u_E = \frac{1}{2} E \cdot D$

La integral de superficie da el flujo de energía a través de S (Vector de Poynting).
 $S = E \times H$.

$$\partial_t u + \nabla S = -J \cdot E$$

Conservación de la energía.