

Multipolos

Índice

1	Desarrollo en serie	1
2	Desarrollo en Armónicos Esféricos	1
3	Campo eléctrico	1

1 Desarrollo en serie

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

V es acotado. Calculemos el potencial lejos de las cargas $|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= \frac{1}{|\vec{x}|} \left[1 - 2 \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2} \cdot \vec{x}' + \frac{|\vec{x}'|^2}{|\vec{x}|^2} \right]^{-1/2} = \\ & \frac{1}{|\vec{x}|} \left(1 + \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2} \cdot \vec{x}' - \frac{1}{2} \frac{|\vec{x}'|^2}{|\vec{x}|^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2} \cdot \vec{x}' \right)^2 + \dots \right) \\ \Phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^2} + \frac{1}{2} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{|\vec{x}|^5} + \dots \right) \end{aligned}$$

$Q = \int_V d^3x' \rho(\vec{x}')$, carga, monopolo

$\vec{p} = \int_V d^3x' \rho(\vec{x}') \vec{x}'$, momento dipolar

$$Q_{ij} = \int_V d^3x' \rho(\vec{x}') (3x'_i x'_j - |\vec{x}'|^2 \delta_{ij})$$

es el momento cuadrupolar, Es un tensor simétrico, de traza nula.

2 Desarrollo en Armónicos Esféricos

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}) &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3x' \rho(\vec{x}') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{\ell+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) = \\ & \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{\ell+1}} q_{lm} \\ q_{lm} &= \int_V d^3x' \rho(\vec{x}') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') \end{aligned}$$

3 Campo eléctrico

Ejercicio: Mostrar que el campo eléctrico debido a un multipolo es:

$$E_r = \frac{l+1}{\epsilon_0(2l+1)} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+2}}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{\varepsilon_0(2l+1)} q_{lm} \frac{1}{r^{l+2}} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

$$E_\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0(2l+1)} q_{lm} \frac{1}{r^{l+2}} \frac{im}{\sin \theta} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

4 Energía de una distribución de carga en un campo externo

$$W = \int_V d^3x \rho(x) \Phi(x) \sim$$

$$\int_V d^3x \rho(x) \left[\Phi(0) + x \nabla \Phi(0) + \frac{1}{2} x_i x_j \Phi_{,ij}(0) + \dots \right] =$$

$$q\Phi(0) - \vec{p} \cdot \vec{E}(0) + \frac{1}{2} \Phi_{,ij}(0) \int_V d^3x \rho(x) x_i x_j$$

$$\int_V d^3x \rho(x) x_i x_j = \frac{1}{3} \left(Q_{ij} + \delta_{ij} \int_V d^3x \rho(x) \vec{x}^2 \right)$$

No hay cargas en 0, $\Phi_{,ii}(0) = 0$

$$W = q\Phi(0) - \vec{p} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{6} Q_{ij} E_{i,j}(0) + \dots$$