

Ondas Electromagnéticas planas

1 Ondas planas en un medio no-conductor

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \left(\vec{0} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{0} \\ D &= \epsilon E & B &= \mu H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \left(\mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \hat{\epsilon}_1 E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad \vec{B}(\vec{x}, t) = \hat{\epsilon}_2 B_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (1)$$

$\hat{\epsilon}_i$ son vectores unitarios reales. E_0, B_0 son números complejos. Las cantidades físicas se obtienen tomando la parte real de (1).

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_i \cdot \vec{k} &= 0 \quad , \text{ onda transversal} \\ \vec{k} \times \hat{\epsilon}_2 B_0 &= -\mu \epsilon \omega \hat{\epsilon}_1 E_0, \quad \vec{k} \times \hat{\epsilon}_1 E_0 = \omega \hat{\epsilon}_2 B_0 \quad , \\ \hat{\epsilon}_2 &= \hat{k} \times \hat{\epsilon}_1, \quad k E_0 = \omega B_0 \end{aligned}$$

$$k B_0 = \mu \epsilon \omega E_0, \quad \omega = \frac{k}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}(\vec{x}, t)$$

De la ecuación de ondas: $v = \frac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}}$

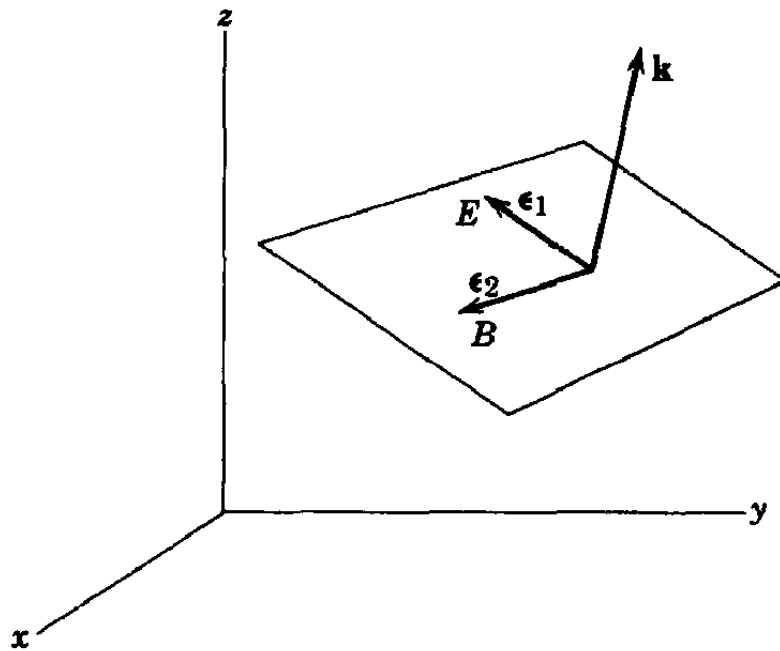


Figura 1.

Promedio temporal del flujo de energía: $\frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |E_0|^2 \hat{k}$

Densidad de energía(promediotemporal): $u = \frac{1}{16\pi} \left(\epsilon E \cdot E^* + \frac{1}{\mu} B \cdot B^* \right) = \frac{\epsilon}{8\pi} |E_0|^2$

1.1 Ecuación de ondas

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}, \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t} = \vec{0}, \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}, \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{E})}{\partial t} = \vec{0}, \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \end{aligned}$$

Usando la identidad (Demuéstrela!):

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

Vemos que \vec{E} y \vec{B} satisfacen la ecuación de onda, dado que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ en los dos casos:

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{B} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Las dos ondas tiene la misma velocidad de propagación:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

En un medio: $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$

Definimos el índice de refracción por $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{\mu_0 \epsilon_0}}$

2 Polarización

Notemos que \vec{B} se conoce si se sabe \vec{E} . Pero \vec{E} es arbitrario excepto por ser perpendicular a \vec{k} . Los vectores perpendiculares a \vec{k} forman un plano. Para especificar un vector de este plano, necesitamos dos vectores l.i. Este nuevo grado de libertad de la onda electromagnética se llama **polarización**. Hay dos estados de polarización, correspondientes a los dos vectores l.i. del plano.

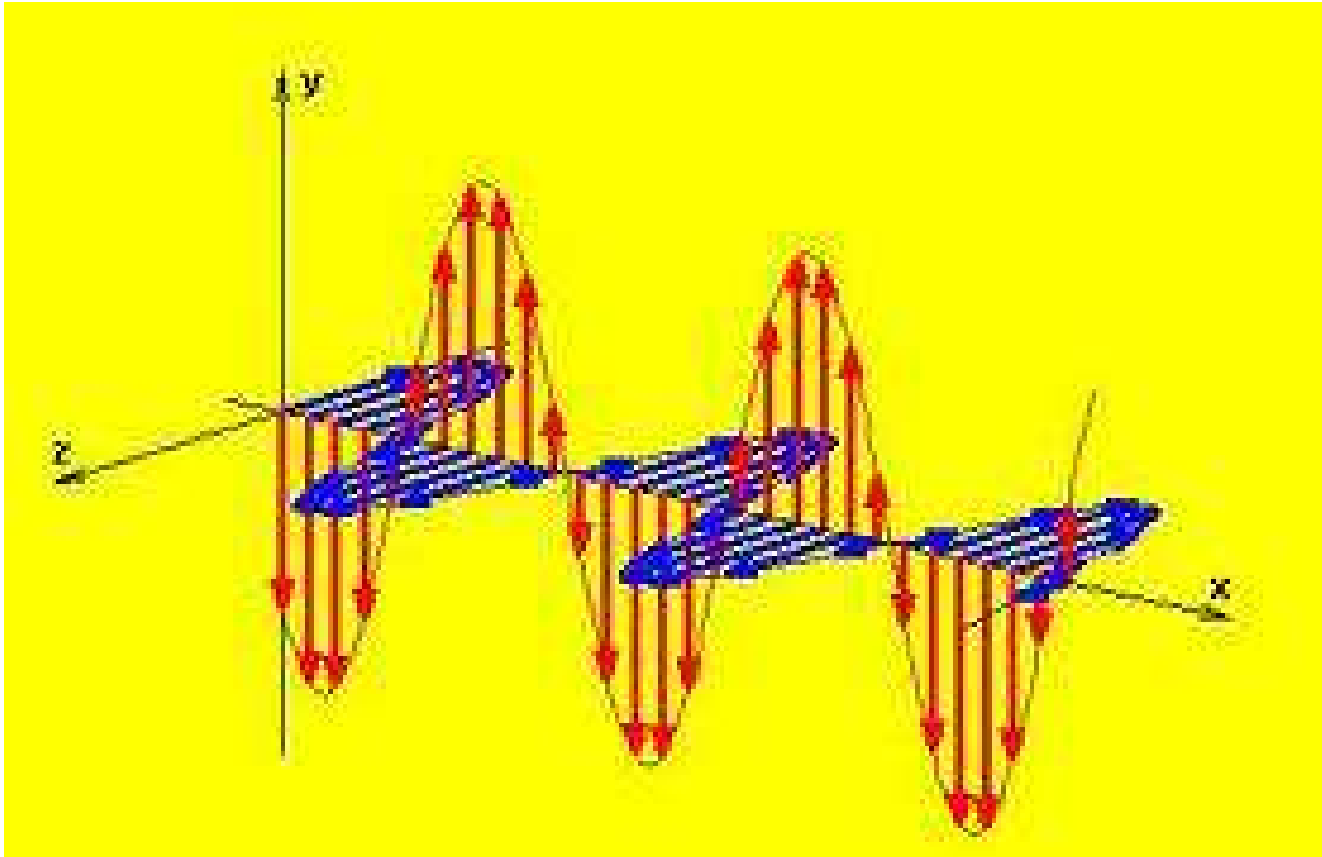


Figura 2.

Si el campo eléctrico oscila en una dirección fija, la onda está polarizada linealmente.

En general, consideremos dos vectores l.i. perpendiculares a \hat{k} , $\hat{\epsilon}_i, \hat{\epsilon}_i \cdot \hat{\epsilon}_j = \delta_{ij}$. La

solución más general para el campo eléctrico es:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = (\hat{\epsilon}_1 E_1 + \hat{\epsilon}_2 E_2) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

Si E_i tiene la misma fase, la onda está polarizada linealmente. Si no tiene la misma fase, la onda tiene polarización elíptica.

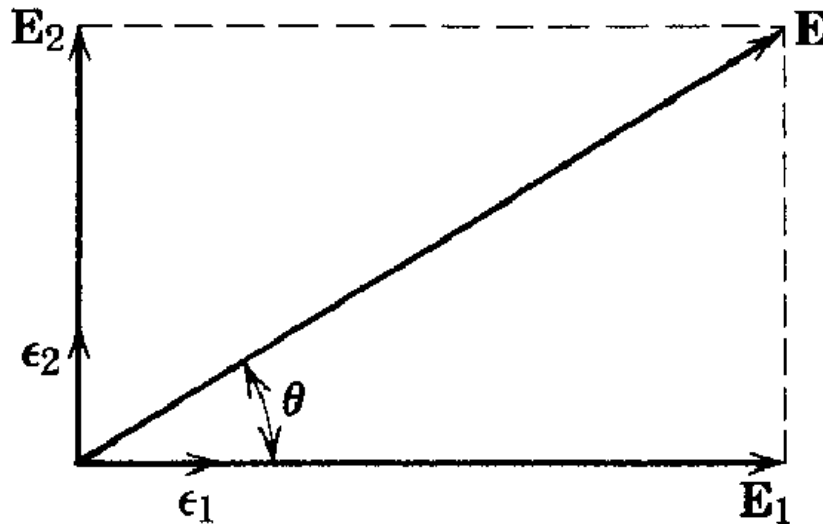
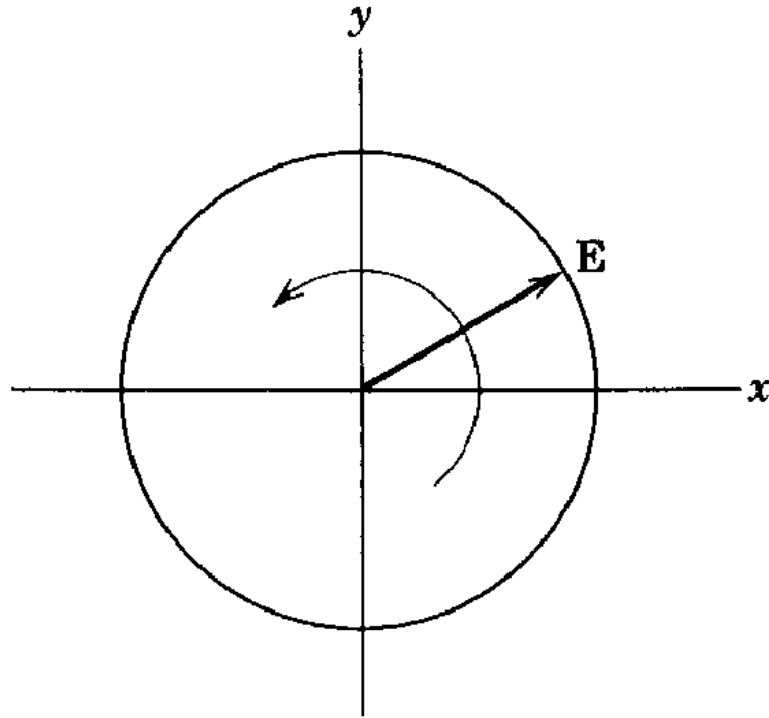


Figura 3. Polarización lineal.

Veamos el caso de polarización elíptica más sencillo, cuando $|E_1| = |E_2|$ y la diferencia de fase es $\frac{\pi}{2}$, polarización circular.



$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = E_0(\hat{\epsilon}_1 + i\hat{\epsilon}_2)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}$$

Figura 4. Polarización circular izquierda.
Helicidad positiva.

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = E_0(\hat{\epsilon}_1 \pm i\hat{\epsilon}_2)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$$

$$E_1(\vec{x}, t) = E_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)$$

$$E_2(\vec{x}, t) = \mp E_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)$$

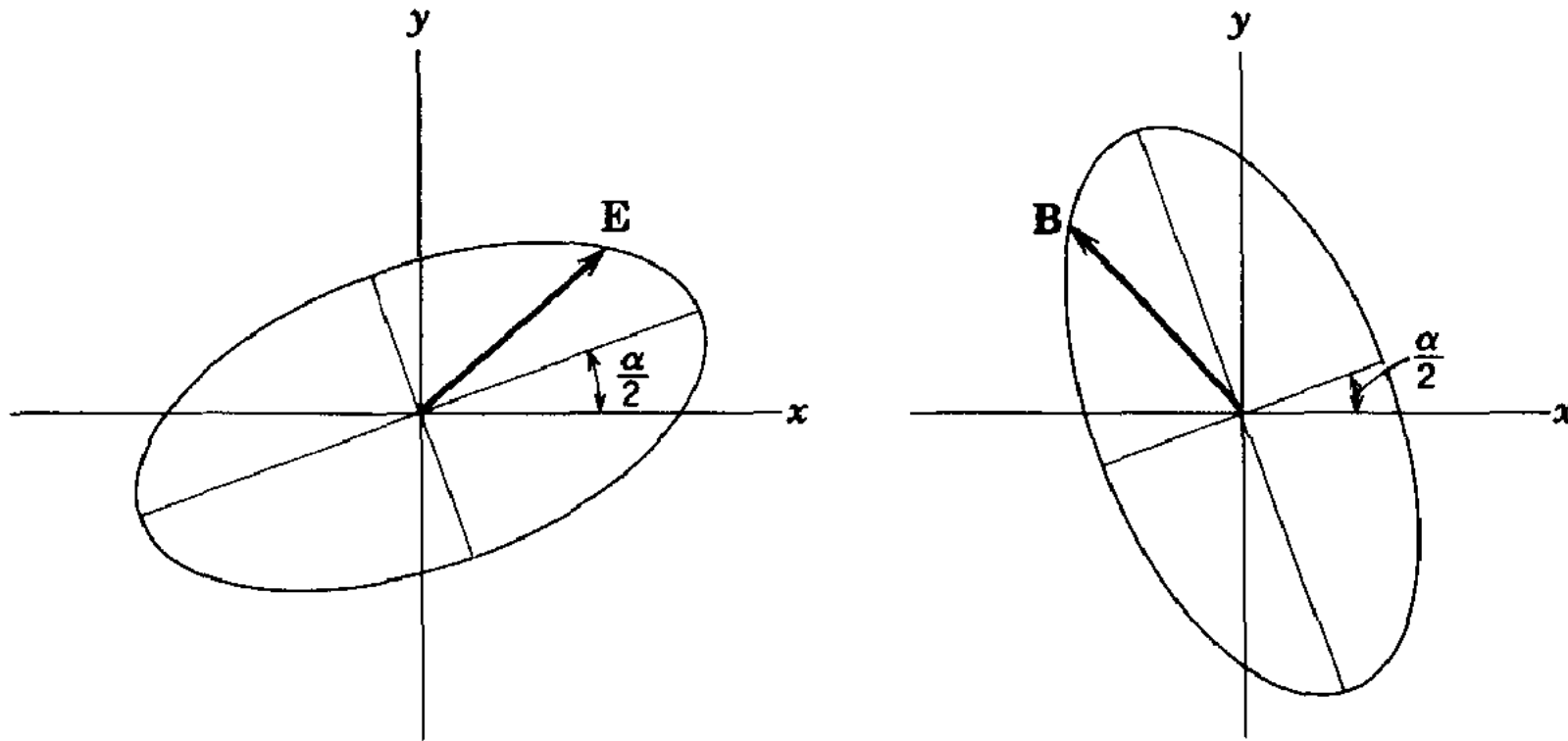


Figura 5. Polarización elíptica

3 Reflexión y Refracción

El rayo incidente, el rayo reflejado, el rayo refractado y la normal están en un mismo plano, perpendicular a la interfase entre los dos materiales.

Ley de Reflexión: Medido respecto a la normal se tiene que:

$$\theta_i = \theta_r$$

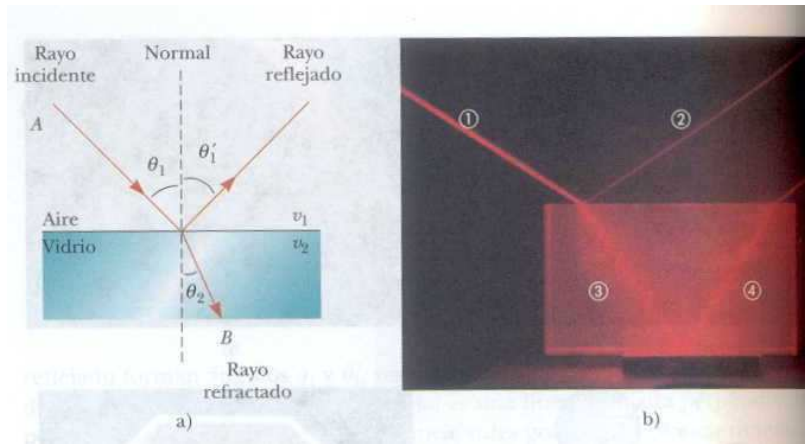


Figura 6.

Ley de Refracción Se define c_n , la velocidad de la luz en un medio de

Al pasar de un medio a otro, la frecuencia de la luz no cambia, pero cambia su longitud de onda

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$$

índice de refracción n por:

$$c_n = \frac{c}{n}$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Siempre se tiene que $n \geq 1$.

Si θ_1 , θ_2 son los ángulos de incidencia (refracción), medidos respecto a la normal se tiene la Ley de Snell-Descartes:

$$n_1 \text{sen}(\theta_1) = n_2 \text{sen}(\theta_2)$$

Nótese que esta ley contiene como caso particular la ley de reflexión, para $n_1 = n_2$.

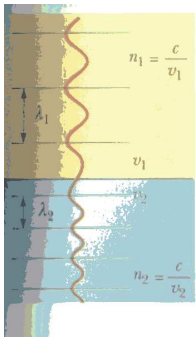


Figura 35.13 Conforme un frente de onda se mueve del medio 1 al medio 2, su longitud de onda cambia pero su frecuencia permanece constante.



Figura 8.

Figura 7.

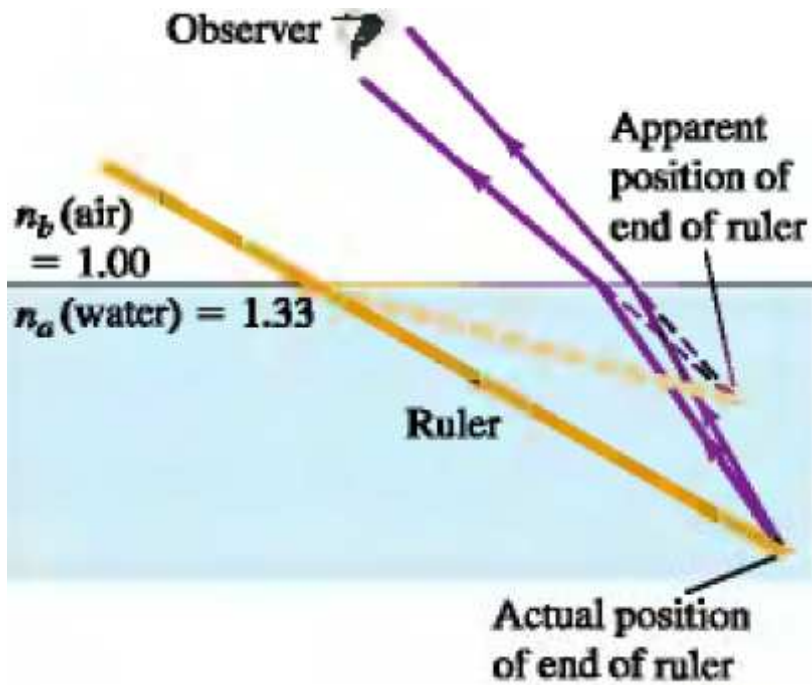


Figura 9.

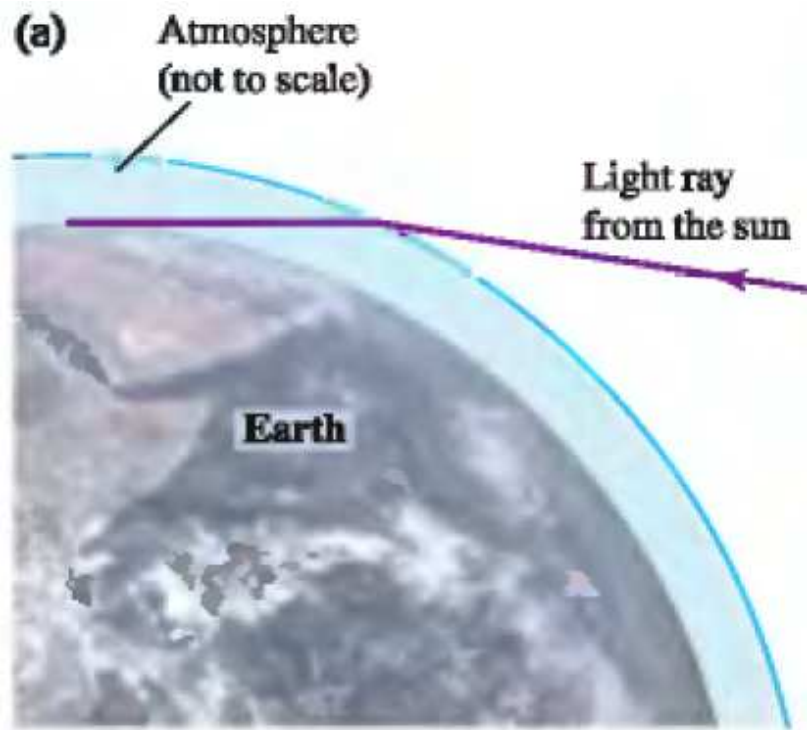


Figura 10.



Figura 11.

El índice de refracción del aire es ligeramente mayor que 1, así que los rayos del sol poniente se curvan hacia abajo al entrar a la atmósfera. La mayor refracción ocurre para la parte baja

del sol, cuyos rayos pasan por una atmósfera más densa. Como resultado, el sol poniente se ve aplanado verticalmente.

3.1 Índices de Refracción

El índice de refracción en el **aire** es de 1,00029 pero para efectos prácticos se considera como 1, ya que la velocidad de la luz en este medio es muy cercana a la del vacío.

Otros ejemplos de índices de refracción para luz amarilla del sodio ($\lambda=589,6$ nm):

Material	Índice de refracción
Vacío	1
Aire (*)	1,0002926
Agua	1,3330
Acetaldehído	1,35
Solución de azúcar (30%)	1,38
1-butanol (a 20 °C)	1,399
Glicerina	1,473
Heptanol (a 25 °C)	1,423
Solución de azúcar (80%)	1,52
Benceno (a 20 °C)	1,501
Metanol (a 20 °C)	1,329
Cuarzo	1,544
Vidrio (corriente)	1,52
Disulfuro de carbono	1,6295
Cloruro de sodio	1,544
Diamante	2,42

(*) en condiciones normales de presión y temperatura (1 bar y 0 °C)

3.2 Demostración

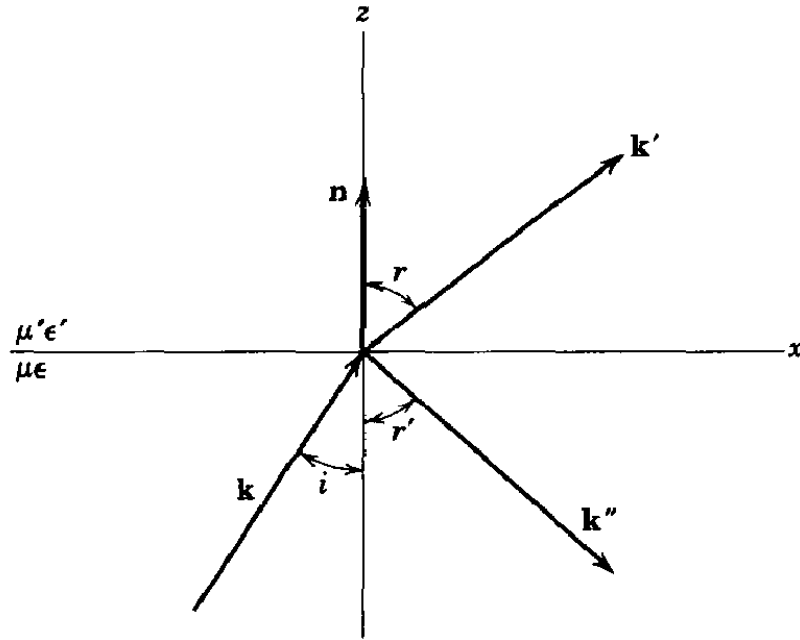


Figura 12.

Las tres ondas son:

- Incidente: $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$, $\vec{B} = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{k}$
- Refractada: $\vec{E}' = \vec{E}'_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \omega t)}$, $\vec{B}' = \sqrt{\mu'\epsilon'} \frac{\vec{k}' \times \vec{E}'}{k'}$

- Reflejada: $\vec{E}'' = \vec{E}_0'' e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{x} - \omega t)}$, $\vec{B}'' = \sqrt{\mu\varepsilon} \frac{\vec{k}'' \times \vec{E}''}{k''}$
- $|\vec{k}| = |\vec{k}''| = k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\varepsilon}$, $|\vec{k}'| = k' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu'\varepsilon'}$

Las condiciones de borde en $z = 0$ son válidas para todo t, \vec{x} , lo que implica que las fases de las tres ondas son iguales en $z = 0$. Esto es, la frecuencia ω es común y:

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{x} |_{z=0} &= \vec{k}' \cdot \vec{x} |_{z=0} = \vec{k}'' \cdot \vec{x} |_{z=0} \\ \vec{k} - \vec{k}' &= a \hat{n} \quad \vec{k} - \vec{k}'' = b \hat{n} \end{aligned}$$

\vec{k}', \vec{k}'' están en el plano generado por \hat{n}, \vec{k} . Además:

$$\begin{aligned} \hat{n} \times \vec{k} &= \hat{n} \times k' = n \times k'' \\ k \sin i &= k' \sin r, \quad \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\varepsilon} \sin i = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu'\varepsilon'} \sin r, \quad n \sin i = n' \sin r \end{aligned}$$

Condiciones de Borde: Continuidad de la componente normal de \vec{D} y \vec{B} y de la componente tangencial de \vec{E} y \vec{H} .

$$\begin{aligned} [\varepsilon(\vec{E}_0 + \vec{E}_0'') - \varepsilon' \vec{E}_0'] \cdot \hat{n} &= 0 \\ [\vec{k} \times \vec{E}_0 + \vec{k}'' \times \vec{E}_0'' - \vec{k}' \times \vec{E}_0'] \cdot \hat{n} &= 0 \end{aligned}$$

$$(\vec{E}_0 + \vec{E}_0'' - \vec{E}_0') \times \hat{n} = \vec{0}$$

$$\left[\frac{1}{\mu} (\vec{k} \times \vec{E}_0 + \vec{k}'' \times \vec{E}_0'') - \frac{1}{\mu'} \vec{k}' \times \vec{E}_0' \right] \times \hat{n} = \vec{0}$$

Campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia:

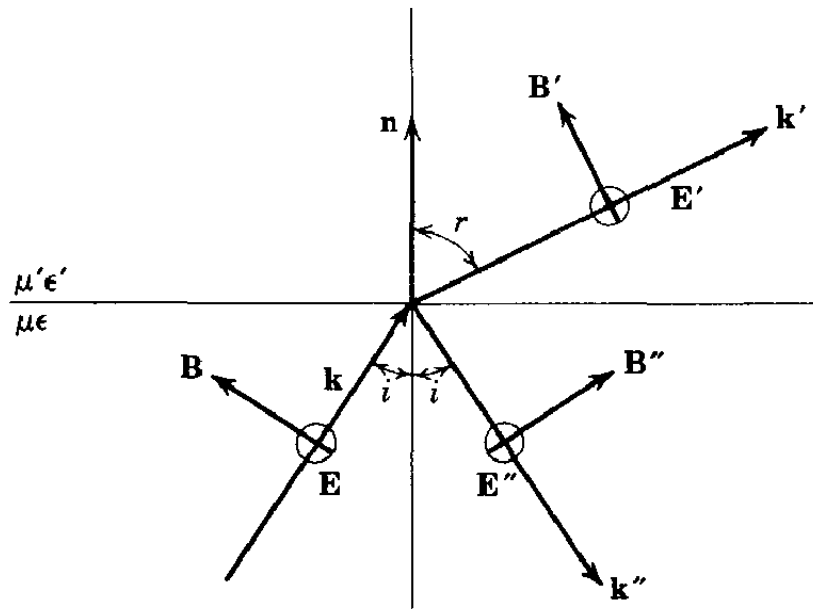


Figura 13. Polarización perpendicular al plano de incidencia.

$$E_0 + E_0'' - E_0' = 0$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(E_0 - E_0'')\cos i - \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}E_0'\cos r = 0$$

\vec{E} perpendicular al plano de incidencia:

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2}{1 + \frac{\mu \operatorname{tg} i}{\mu' \operatorname{tg} r}} \rightarrow \frac{2 \cos i \operatorname{sen} r}{\operatorname{sen}(i + r)}$$

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{1 - \frac{\mu \operatorname{tg} i}{\mu' \operatorname{tg} r}}{1 + \frac{\mu \operatorname{tg} i}{\mu' \operatorname{tg} r}} \rightarrow -\frac{\operatorname{sen}(i - r)}{\operatorname{sen}(i + r)}$$

La expresión de la derecha corresponde a $\mu = \mu'$.

Campo eléctrico paralelo al plano de incidencia:

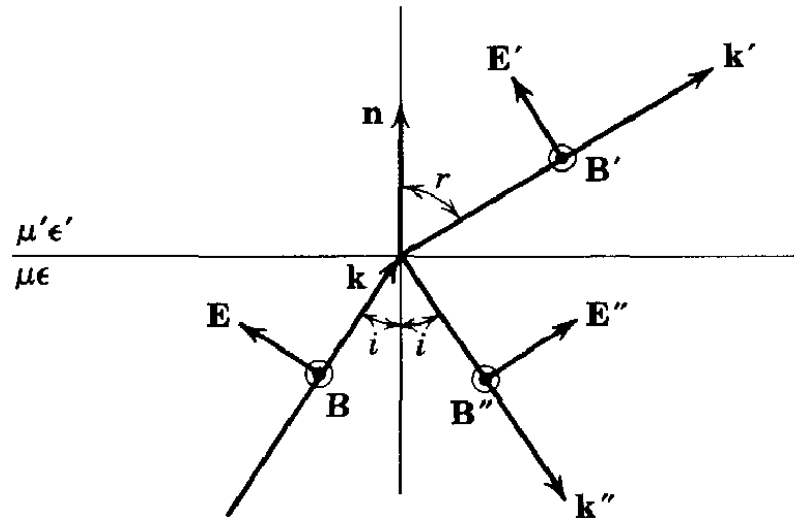


Figura 14. Polarización paralela al plano de incidencia.

$$\begin{aligned} \cos i (E_0 - E_0'') - \cos r E_0' &= 0 \\ \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (E_0 + E_0'') - \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} E_0' &= 0 \end{aligned}$$

\vec{E} paralelo al plano de incidencia:

$$\frac{E'_0}{E_0} = 2 \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu'\varepsilon'}} \frac{\sin 2i}{\sin 2r + \frac{\mu}{\mu'} \sin 2i} \rightarrow \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i+r) \cos(i-r)}$$

$$\frac{E''_0}{E_0} = \frac{\frac{\mu}{\mu'} \sin 2i - \sin 2r}{\sin 2r + \frac{\mu}{\mu'} \sin 2i} \rightarrow \frac{\text{tg}(i-r)}{\text{tg}(i+r)}$$

Incidencia normal, $i = 0$, ambas polarizaciones se reducen a:

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{\mu\varepsilon'}{\mu'\varepsilon}}} \rightarrow \frac{2n}{n' + n}$$

$$\frac{E''_0}{E_0} = \frac{-1 + \sqrt{\frac{\mu\varepsilon'}{\mu'\varepsilon}}}{1 + \sqrt{\frac{\mu\varepsilon'}{\mu'\varepsilon}}} \rightarrow \frac{n' - n}{n' + n}$$

4 Polarización por reflexión

Cuando la luz incide sobre una superficie no absorbente con un determinado ángulo, el componente del

campo eléctrico paralelo al plano de incidencia no es reflejado. Este ángulo, conocido como *ángulo de Brewster*,

se alcanza cuando el rayo reflejado es perpendicular al rayo refractado.

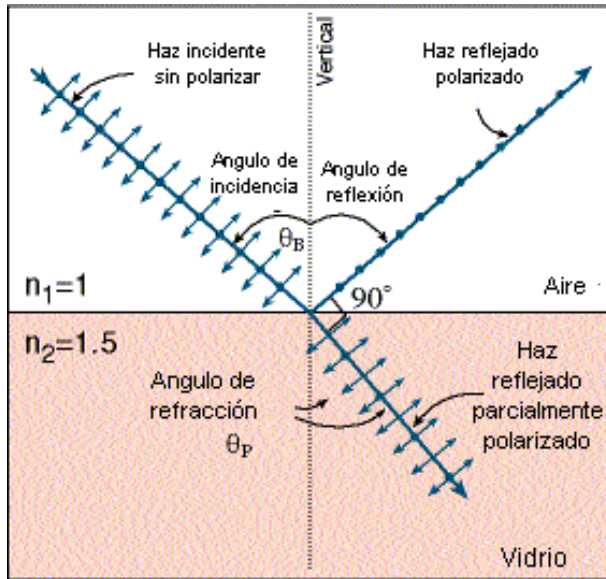


Figura 15. Ángulo de Brewster

La tangente del ángulo de Brewster es igual a la relación entre los índices

de refracción del segundo y el primer medio.

$$n_2 \operatorname{sen} \theta_P = n_1 \operatorname{sen} \theta_B \quad \theta_P = 90 - \theta_B$$

$$n_2 \cos \theta_B = n_1 \operatorname{sen} \theta_B \quad \tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

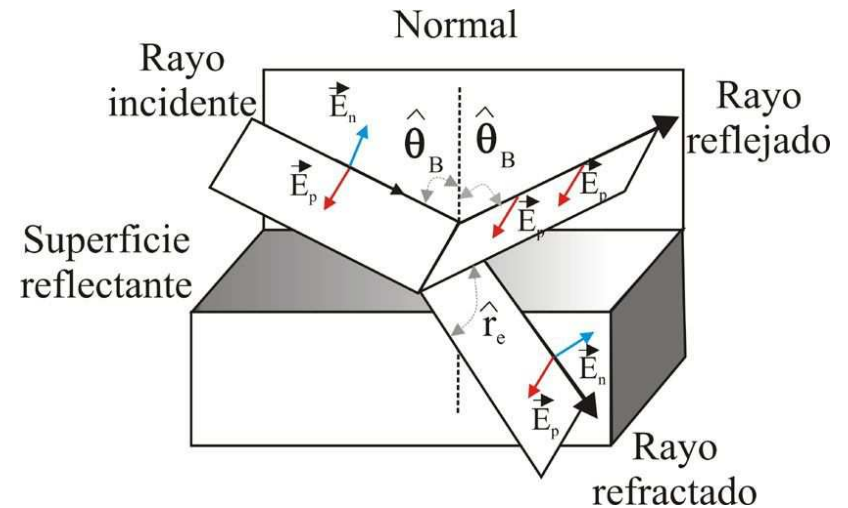


Figura 16.

5 Reflexión total interna

Si la luz pasa de un medio n_1 a un medio n_2 , con $n_1 > n_2$ se puede dar que toda la luz se refleja. No hay rayo refractado. Para que esto suceda el ángulo de refracción

debe ser mayor o igual a 90 grados. Por lo tanto el ángulo de incidencia debe ser mayor que un ángulo crítico θ_c :

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_c = n_2 \operatorname{sen} 90$$

$$\operatorname{sen} \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

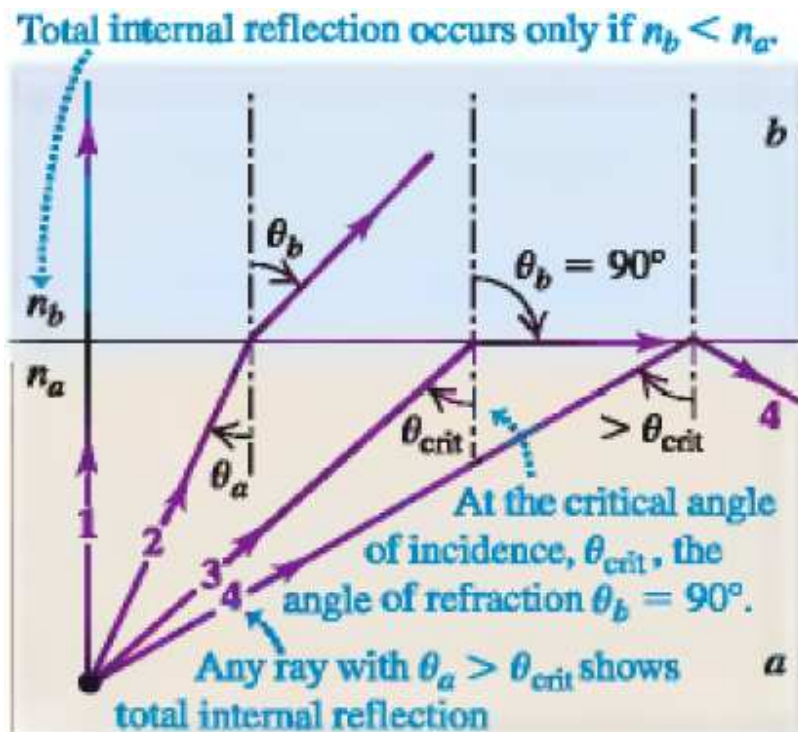


Figura 17.

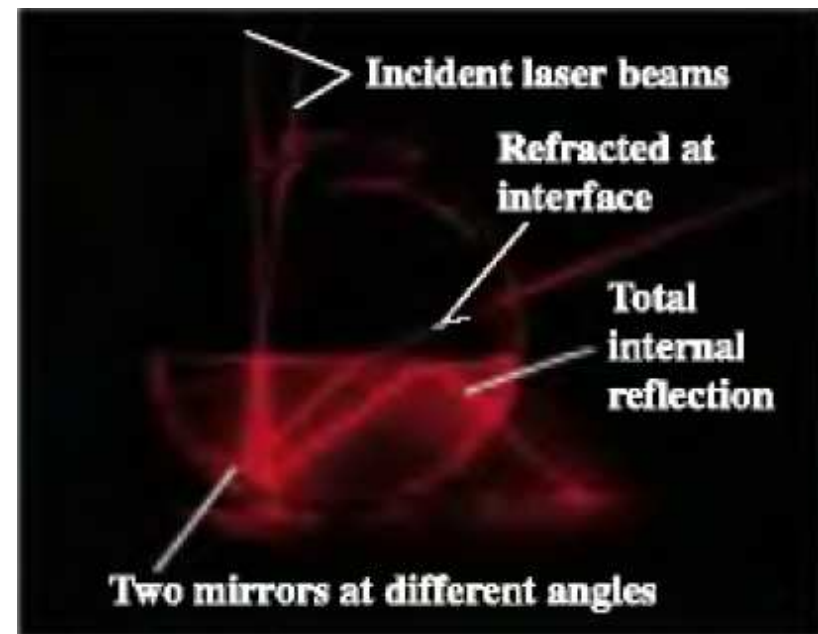


Figura 18.

Consideremos aire con índice refracción $n_a = 1.52$. $\text{sen } \theta_c = \frac{1}{1.52} = 0.658$. $\theta_c = 41.1^\circ$. La luz será totalmente reflejada para un ángulo de incidencia mayor o igual a 41.1° . Esto sucede en un Prisma de Porro.

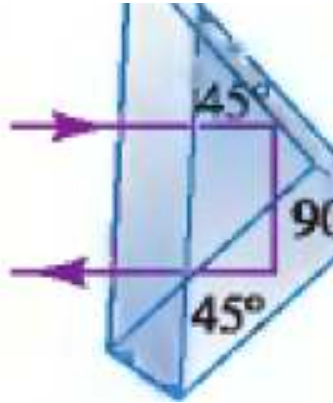


Figura 19. Prisma de Porro. Si el haz incidente está orientado como se muestra, reflexión total interna ocurre en las caras a 45° , dado que para una interfase vidrio-aire $\theta_c = 41.1^\circ$.

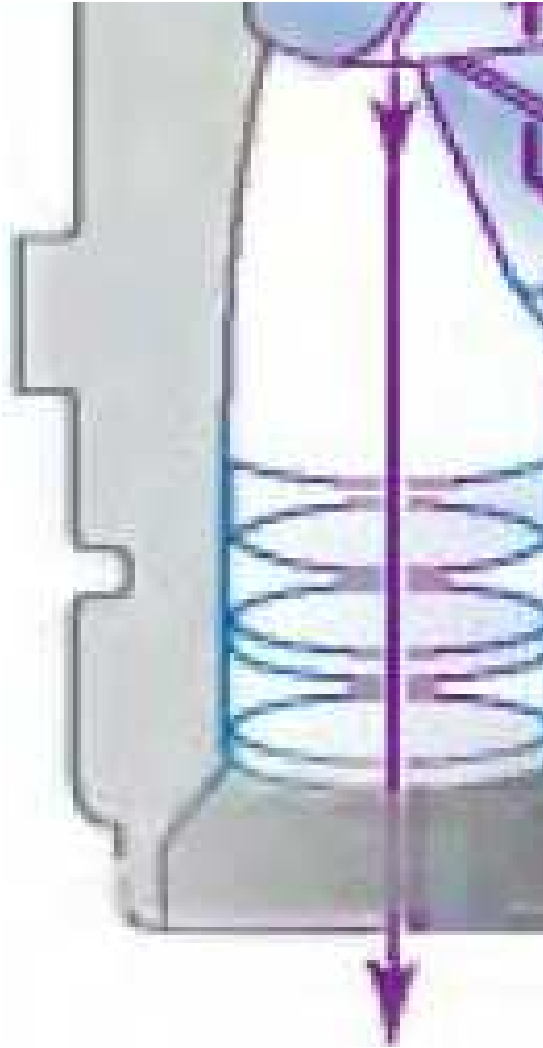


Figura 20. Binocular

-Aplicación: Fibras ópticas. Son barras de vidrio o plástico transparente que permiten "entubar" la luz. Se pierde muy poca intensidad luminosa (hay reflexión

total) por reflexión en los extremos y por absorción en el material de la fibra. Se utiliza en medicina para permitir operaciones no invasivas y en telecomunicaciones, porque transportan mucha información simultáneamente.

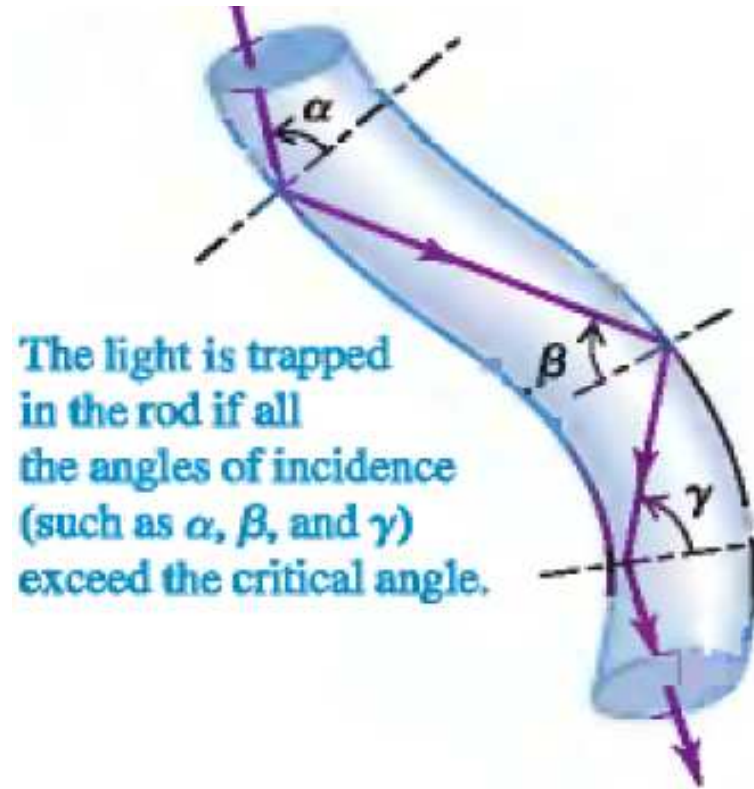


Figura 21. Una fibra transparente con índice de refracción mayor al del medio que la rodea.