Rotaciones

- Convención de Einstein: Dos índices repetidos en un monomio significan la suma de esos índices de 1 a la dimensión del espacio.

- Las rotaciones son transformaciones lineales, definidas por la matriz de transformación R. $x' = Rx$, $x'_i = R_{ij} x_j$que conservan la distancia entre dos puntos, definida por la magnitud del vector x. x',x son las coordenadas de un punto P en dos sistemas de coordenadas con origen común, que están rotados el uno respecto al otro.

- R es ortogonal. Esto es :$RR^T = 1$, donde $R^T_{ij} = R_{ji}$. En efecto

$$x' = Rx \qquad {x'}^T x' = x^T R^T \mathrm{Rx} = x^T x, \forall x$$

$$R^T R = 1, R \,\mathrm{es\,una\,matriz\,ortogonal}$$

  - $\det\left(R^T R\right) = 1 = \det\left(R\right)^2$, $\det\left(R\right) = \pm 1$, $\det\left(R\right)$es una función continua de R. Las matrices ortogonales tienen dos sectores topológicamente disconexos. Las rotaciones tienen determinante 1.

  - Rotacíon en dos dimensiones:$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\det\left(R\right) = 1$

Sea un vector $\mathbf{A}$ expresado en un sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) con una base vectorial B asociada definida por los versores ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$,$\mathbf{k}$); esto es, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$ Ahora, supongamos que giramos el sistema de ejes coordenados, manteniendo fijo el origen del mismo, de modo que obtengamos un nuevo triedro ortogonal de ejes $(x\prime, y\prime, z\prime)$, con una base vectorial B' asociada definida por los versores ($\mathbf{i}$', $\mathbf{j}$',$\mathbf{k}$'). Las componentes del vector $\mathbf{A}$ en esta nueva base vectorial serán: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A\prime_x \\ A\prime_y \\ A\prime_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}\prime}$

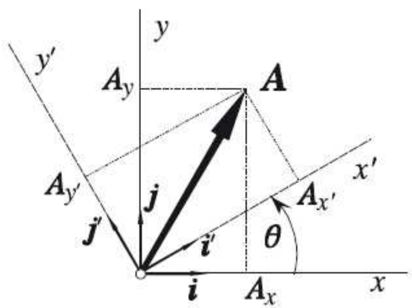

Figura 1. Coordenadas de un vector en un sistema rotado.

La operación de rotación de la base vectorial siempre puede expresarse como la acción de un operador lineal (representado por una matriz) actuando sobre el vector (multiplicando al vector): $\mathbf{R}\mathbf{A}_{\mathrm{B}} = \mathbf{A}_{\mathrm{B}'}$ que es la matriz de transformación para el cambio de base vectorial.

Ejemplo

En el caso simple en el que el giro tenga magnitud θ alrededor del eje z, tendremos la transformación:

$$\mathbb{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al hacer la aplicación del operador, es decir, al multiplicar la matriz por el vector, obtendremos la expresión del vector $\mathbf{A}$ en la nueva base vectorial:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} A\prime_x \\ A\prime_y \\ A\prime_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}\prime}$$

siendo

$$A\prime_x = A_x \cos\theta + A_y \sin\theta \;\; A\prime_y = -A_x \sin\theta + A_y \cos\theta \;\; A\prime_z = A_z$$

las componentes del vector en la nueva base vectorial.

Producto escalar

Sean A, B dos vectores. Tenemos que $A' = RA$,$B' = RB$.

- El producto escalar de los dos vectores $A.B = A_i B_i$ es independiente del sistema coordenado. Es un invariante. En efecto, en notación matricial tenemos que:

  $A.B = A^T B$, ${A'}^T B' = A^T R^T R B = A^T B = A.B$, dado que R es ortogonal, $R^T R$

- El módulo de un vector es un invariante:$|A| = \sqrt{A.A}$

- $A_i(t)$ es un vector y t un parámetro invariante. Entonces $B_i(t) = \frac{dA_i}{dt}$ es un vector.

  $B'_i(t') = \frac{dA'_i}{dt'} = \frac{dA'_i}{dt} = \frac{d\,(R_{ij}A_j)}{dt} = R_{ij}\frac{dA_j}{dt} = R_{ij}B_j(t)$, R no depende de t.

- $A(x)$ es un campo escalar:$A(x') = A(x)$, $B_i(x) = \partial_i A(x)$ son las componentes de un vector, llamado gradiente de A.

  $B'_i(x) = \partial'_i A'(x') = \partial'_i A(x) = \partial_j A(x)\frac{\partial x_j}{\partial x'_i}$,$x'_i = R_{ij}x_j$,$x_j = R^{-1}_{ji}x'_i = R^T_{ji}x'_i = R_{ij}x'_i$

  $\frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = R_{ij}$, $B'_i(x) = \partial_j A(x) R_{ij} = R_{ij}B_j$

- $-c^2t'^2 + \vec{x}\,'^2 = -c^2t^2 + \vec{x}\,^2 = D^2$ es un invariante bajo cambio de sistema de referencia inercial.
- Sea $x_4 = ict$, $x'_\mu x'_\mu = x_\mu x_\mu = D^2$. Las transformaciones de Lorentz son rotaciones en este espacio-tiempo cuadrimensional. $x'_\mu = L_{\mu\nu} x_\nu$.
- Consideremos un sistema S'que se mueve con velocidad u a lo largo del eje x de S. En $t = t' = 0$ los orígenes de S y S'coinciden.

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},\ x' = \gamma(x - ut),\ \ ict' = -i\beta\gamma x + \gamma ict$$

- Transformaciones de Lorentz: $x' = \gamma(x - ut)$,$t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$,

- A_μ es un cuadrivector si transforma bajo transformaciones de Lorentz como las coordenadas:$A'_\mu = L_{\mu\nu} A_\nu$.
- La distancia infinitesimal en el espacio-tiempo es un invariante: $ds^2 = -c^2 dt^2 + d\vec{x}.d\vec{x}$, $ds'^2 = ds^2$
- El intervalo de tiempo propio $d\tau$ es un invariante. En efecto $-c^2 d\tau^2 = ds_P^2$ donde el sistema de referencia propio es aquel en que la partícula está en reposo.
- Ejercicio 1: Demostrar que la cuadrivelocidad definida por $v_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$ es un cuadrivector.
- Muestre que $v_\mu v_\mu = -c^2$
- Ejercicio 2: Encuentre las componentes temporales y espaciales de v_μ
- Ejercicio 3: Si m_0 es un invariante(masa en reposo). Muestre que $p_\mu = m_0 v_\mu$ es un cuadrivector, llamado cuadrimomentum.
- Muestre que $p_\mu p_\mu = -m_0^2 c^2$
- Ejercicio 4: Encuentre las componentes temporales y espaciales de p_μ
- Ejercicio 5: Demostrar que la cuadrifuerza definida por $f_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau}$ es un cuadrivector.
- Ejercicio 6: Encuentre las componentes temporales y espaciales de f_μ.

Consideremos dos vectoresA, B. Las componentes cartesianas transforman como:

$$\begin{aligned} A'_i = R_{i\,j} A_j, \quad B'_l = R_{l\,k} B_k \\ A'_i B'_l = R_{i\,j} R_{l\,k} A_j B_k \quad , T'_{i\,l} = A'_i B'_l \\ T'_{i\,l} = R_{i\,j} R_{l\,k} T_{j\,k} \end{aligned} \tag{1}$$

Un conjunto de n^2 funciones $T_{j\,k}$ son las componentes de un tensor si transforman bajo cambios de coordenadas como (1).

$T_{i_1 \ldots . i_m}$ son las componentes de un tensor de rango m si bajo cambios de coordenadas cartesianas transforma como:

$$T'_{i_1 \ldots . i_m} = R_{i_1 j_1} \ldots . R_{i_m j_m} T_{j_1 \ldots . j_m}$$

$T_{i_1 \ldots . i_m}$ son las componentes de un pseudotensor de rango m si bajo cambios de coordenadas cartesianas transforma como:

$$T'_{i_1 \ldots . i_m} = |R| R_{i_1 j_1} \ldots . R_{i_m j_m} T_{j_1 \ldots . j_m}$$

donde $|R|$ es el determinante de la mátriz R.

- Si $A_{i_1 \ldots i_k}$,$B_{i_1 \ldots i_k}$ son tensores y α, β son escalares(invariantes), entonces $C_{i_1 \ldots . i_k} = \alpha A_{i_1 \ldots i_k} + \beta B_{i_1 \ldots i_k}$ es un tensor.

$$\begin{aligned} C'_{i_1 \ldots . i_k}(x') = \alpha'(x') A'_{i_1 \ldots i_k}(x') + \beta'(x') B'_{i_1 \ldots i_k}(x') = \\ \alpha(x) R_{i_1 j_1 \ldots .} R_{i_k j_k} A_{j_1 \ldots . j_k}(x) + \beta(x) R_{i_1 j_1 \ldots .} R_{i_k j_k} B_{j_1 \ldots . j_k}(x) = \\ R_{i_1 j_1 \ldots .} R_{i_k j_k} (\alpha(x) A_{j_1 \ldots . j_k}(x) + \beta(x) B_{j_1 \ldots . j_k}(x)) = \\ R_{i_1 j_1 \ldots .} R_{i_k j_k} C_{j_1 \ldots . j_k} \end{aligned}$$

- Tensor simétrico y antisimétrico: Si B_{ij} es un tensor simétrico ($B_{ji} = B_{ij}$) o antisimétrico($B_{ji} = -B_{ij}$ bajo permutación de i, j, entonces B'_{ij} es simétrico(antisimétrico).

$$\begin{aligned} B'_{ij} = R_{ik} R_{jl} B_{kl}, \quad B'_{ji} = R_{jk} R_{il} B_{kl}, \\ B'_{ij} \pm B'_{ji} = R_{ik} R_{jl} B_{kl} \pm R_{jk} R_{il} B_{kl} = R_{ik} R_{jl} B_{kl} \pm \ R_{j k(l)} R_{i l(k)} B_{k(l)\, l(k)} = \\ R_{ik} R_{jl} (B_{kl} \pm B_{lk}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{ij} = S_{ij} + A_{ij} \\ S_{ij} = \frac{1}{2}(B_{ij} + B_{ji}), \ \ A_{ij} = \frac{1}{2}(B_{ij} - B_{ji}) \end{aligned}$$

Se puede simetrizar o antisimetrizar en cualquier par de índices. Este procedimiento permite encontrar representaciones irreducibles de grupos.

$A_{i_1\dots i_k}$,$B_{j_1\dots j_l}$son tensores, entonces $T_{i_1,\dots,i_k\,j_1,\dots,j_l} = A_{i_1\dots i_k}B_{j_1\dots j_l}$ es un tensor llamado el producto tensorial de A, B.

$$\begin{aligned}
T'_{i_1,\dots,i_k\,j_1,\dots,j_l} = A'_{i_1\dots i_k}B'_{j_1\dots j_l} = R_{i_1a_1}\dots R_{i_ka_k}A_{a_1,\dots,a_k}R_{j_1b_1}\dots R_{j_kb_k}B_{b_1,\dots,b_k} = \\
R_{i_1a_1}\dots R_{i_ka_k}R_{j_1b_1}\dots R_{j_kb_k}A_{a_1,\dots,a_k}B_{b_1,\dots,b_k} = \\
R_{i_1a_1}\dots R_{i_ka_k}R_{j_1b_1}\dots R_{j_kb_k}T_{a_1,\dots,a_kb_1,\dots,b_k}
\end{aligned}$$

Si $A_{i_1 \ldots a \ldots b \ldots . i_k}$ es un tensor de rango k, $B_{i_1 \ldots (a) \ldots (b) \ldots . i_k} = A_{i_1 \ldots a \ldots a \ldots . i_k}$ es un tensor de rango $k-2$. (a) significa que el índice a no está presente.

$$A'_{i_1 \ldots a \ldots a \ldots . i_k} = R_{i_1 j_1} \ldots R_{a\,c} \ldots . R_{a\,d} R_{i_k j_k} A_{j_1 \ldots . c \ldots . d \ldots . j_k}$$

pero $R_{a\,c} R_{a\,d} = \delta_{c\,d}$.

$$A'_{i_1 \ldots a \ldots a \ldots . i_k} = R_{i_1 j_1} \ldots R_{i_k j_k} A_{j_1 \ldots . c \ldots . d \ldots . j_k} \delta_{c\,d} = R_{i_1 j_1} \ldots (R_{a\,c}) \ldots . (R_{a\,d}) \ldots R_{i_k j_k} A_{j_1 \ldots . c \ldots . c \ldots . j_k}$$

Notar que la contracción de índices diferentes da lugar, en general, a tensores diferentes.

Si $A_{i_1\,....i_k}(x)$ es un tensor de rango k, $A_{i_1\,....i_k,l}(x)=\frac{\partial}{\partial x^{\,l}}A_{i_1....i_k}$ es un tensor de rango $k+1$.

$$A'_{i_1\,....i_k,l}(x')=\frac{\partial}{\partial x'^{\,l}}A'_{i_1....i_k}(x')=\frac{\partial x_j}{\partial x'_l}\frac{\partial}{\partial x_j}(R_{i_1l_1}....R_{i_kl_k}A_{l_1....l_k})=$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial x'_l}R_{i_1l_1}....R_{i_kl_k}A_{l_1....l_k,j}=R_{i_1l_1}....R_{i_kl_k}R_{l\,j}A_{l_1....l_k,j}$$

Criterio sencillo del carácter tensorial

Sea $A_{i\,j}$ un conjunto de n^2 funciones y v_l un vector.

Si $A_{i\,j}v_j = V_i$ es un vector, para todo v_l, entonces, $A_{i\,j}$ son las componentes de un tensor.

$$
\begin{aligned}
V_i' = A'_{i\,j}v'_j = R_{i\,l}V_l = R_{i\,l}A_{l\,a}v_a, & \\
A'_{i\,j}v'_j = A'_{i\,j}R_{j\,a}v_a & \\
A'_{i\,j}R_{j\,a}v_a = R_{i\,l}A_{l\,a}v_a, & \quad v_a\,\text{es arbitrario,} \\
A'_{i\,j}R_{j\,a} = R_{i\,l}A_{l\,a}, & \quad \text{multiplicar por}\,R_{k\,a} \\
A'_{i\,j}R_{j\,a}R_{k\,a} = R_{i\,l}\,R_{k\,a}A_{l\,a} & \\
A'_{i\,j}\delta_{j\,k} = A'_{i\,k} = R_{i\,l}\,R_{k\,a}A_{l\,a} &
\end{aligned}
$$

Ejercicio: $C_{i\,j\,k}$ es un conjunto de n^3 funciones y $t_{a\,b}$ es un tensor simétrico arbitrario.

Si $C_{i\,j\,k}t_{j\,k}$ es un vector para todo $t_{a\,b}$, entonces $C_{i\,j\,k} + C_{i\,k\,j}$ son las componentes de un tensor, simétrico en los índices $j\,k$.

La delta de Kronecker $\delta_{ab} = \begin{cases} 1, a = b \\ 0, a \neq b \end{cases}$ es un tensor de rango 2 simétrico. Más aún es un tensor invariante porque sus componentes no dependen del sistema de coordenadas.

$$\delta'_{ab} = R_{ac} R_{bd} \delta_{cd}$$

El símbolo de Levi-Civita, $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 \ldots . n \\ i_1 \ldots . i_n \end{pmatrix}$, donde $\mathrm{sgn}(\sigma)$ es el signo de la permutación σ.

n es la dimensión del espacio, es un pseudotensor de rango n, totalmente antisimétrico.

$$\boxed{\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} \varepsilon_{a_1 \ldots a_n} = \begin{vmatrix} \delta_{i_1 a_1} \ldots . \delta_{i_1 a_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_{i_n a_1} \ldots . \delta_{i_n a_n} \end{vmatrix}}$$

Las demostraciones las haremos en la sección de tensores en general.

$$
\begin{aligned}
(A \times B)_i &= \varepsilon_{ijk} A_j B_k \\
(A \times (B \times C))_i &= \varepsilon_{ijk} A_j (B \times C)_k = \varepsilon_{ijk} A_j \varepsilon_{klm} B_l C_m, \\
\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}), \\
(A \times (B \times C))_i &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) A_j B_l C_m = \\
& A.C B_i - A.B C_i
\end{aligned}
$$

Similarmente:

$$
(\nabla \times B)_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j B_k = \varepsilon_{ijk} B_{k,j}
$$

$$
\begin{aligned}
(\nabla \times (\nabla \times C))_i = \varepsilon_{ijk} (\nabla \times C)_{k,j} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} C_{m,lj} = \\
(\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) C_{m,lj} = C_{j,ji} - C_{i,jj}
\end{aligned}
$$

Esto es: $(\nabla \times (\nabla \times C)) = \nabla(\nabla . C) - \nabla^2 C$