Problema 1. Una partícula no relativista de carga ze, masa m y energía cinética E efectúa una colisión frontal con un campo central de fuerza fijo de tipo finito. La interacción es repulsiva y viene descrita por un potencial $V(r)$, que se hace mayor que E a distancias próximas.

a) Demuestre que la energía total radiada viene dada por

$$\Delta W = \frac{4}{3}\frac{z^2e^2}{m^2c^3}\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_{\min}}^{\infty}\left|\frac{dV}{dr}\right|^2\frac{dr}{\sqrt{V(r_{\min})-V(r)}}$$

donde $r_{\min}$ es la distancia mínima al centro de fuerzas.

b) Si la interacción es un potencial de Coulomb $V(r)=\frac{zZe^2}{r}$, demuestre que la energía total radiada es:

$$\Delta W = \frac{8}{45}\frac{zmv_0^5}{Zc^3}$$

v_0 es la velocidad de la carga en el infinito.

$$\frac{dW}{dt} = P = \frac{2}{3}\frac{z^2e^2}{c^3}\dot{v}^2 = \frac{dW}{dr}\dot{r}$$
$$\frac{dW}{dr} = \frac{2}{3}\frac{z^2e^2}{c^3}\frac{\dot{v}^2}{v}$$

$$m\,\dot{v} = -V'(r), \qquad \dot{v} = -\frac{1}{m}V'(r)$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(r), \quad v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r))}$$

$$v{=}0 \text{ con } r = r_{\min}, \qquad E = V(r_{\min})$$

$$\Delta W = \frac{2}{3}\frac{z^2e^2}{c^3m^2}$$

$$2\int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(V'(r))^2 dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\big(V\big(r_{\min}\big) - V(r)\big)}} =$$

$$\frac{4}{3}\frac{z^2e^2}{c^3m^2}\sqrt{\frac{m}{2}}$$

$$\int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(V'(r))^2 dr}{\sqrt{\big(V\big(r_{\min}\big) - V(r)\big)}}$$

Potencial de Coulomb:$V(r) = \frac{zZe^2}{r}$

$$A = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{r^{-4}dr}{\sqrt{E - \frac{zZe^2}{r}}}, \qquad u = r^{-1}, \qquad du = -r^{-2}dr$$

$$A = \int_0^{u_{\min}} du \frac{u^2}{\sqrt{E - zZe^2u}} = \frac{16 \cdot E^{\frac{5}{2}}}{15 \cdot (zZe^2)^3}$$

$$\Delta W = \frac{4}{3}\frac{z^2e^2}{c^3m^2}\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{16 \cdot E^{\frac{5}{2}}}{15 \cdot (zZe^2)^3}(zZe^2)^2 =$$
$$\frac{64}{45}\frac{z}{c^3m^2Z}\sqrt{\frac{m}{2}}E^{\frac{5}{2}}$$
$$E = \frac{1}{2}mv_0^2$$
$$\Delta W = \frac{64}{45}\frac{z}{c^3m^2Z}\frac{m^3}{8}v_0^5 = \frac{8}{45}\frac{zm}{c^3Z}v_0^5$$

Problema 2. Mostrar que $e^+ + e^- \rightarrow \gamma$ no se puede dar en el vacío.

$$k_\mu = p_\mu^- + p_\mu^+$$
$$k^2 = 0 = (p^-)^2 + (p^+)^2 + 2p^-.p^+ = -2m^2c^4 + 2p^-.p^+$$
$$p^-.p^+ = m^2c^4$$

Evaluemos $p^-.p^+$ en el sistema propio del electrón:

$$p^-.p^+ = \left(\vec{0}, imc\right)(\vec{p}_+, iE_+/c) = -mE_+, \quad E_+ < 0$$

1 Reacciones

Nos interesa estudiar procesos del tipo $M \to m_1 + m_2$.

En el sistema de laboratorio(L) la partícua M está en reposo. La conservación de momentum implica:

$$\vec{p}_1 = \vec{p} = -\vec{p}_2$$

La conservación de la energía:

$$M = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m_1^2} + \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m_2^2} \tag{1}$$

El decaimiento se puede dar sólo si:

$$\Delta M = M - m_1 - m_2 \geqslant 0$$

A partir de (1) se puede encontrar $\vec{p}^{\,2}$. Sin embargo es más simple usando covarianza. Sea

$$P = p_1 + p_2$$

Consideremos :

$$
\begin{aligned}
(P - p_1)^2 = p_2^2 = -m_2^2 = \\
-M^2 - 2P.p_1 - m_1^2 = \\
-M^2 + 2ME_1 - m_1^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} \\
E_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M} \\
K_i = E_i - m_i = \\
\Delta M\left(1 - \frac{m_i}{M} - \frac{\Delta M}{2M}\right)
\end{aligned}
$$

Ejercicio 1. $\pi \to \mu + \bar{\nu}$. $M = 139.6$ Mev,$m_\mu = 105.7$ Mev, $m_{\bar{\nu}} = 0$

Problema 3. Límite GZK $p + \gamma \to p + \pi_0$ Encuentre la energía mínima del protón de tal manera que al interactuar con un fotón del fondo de radiación cósmica, cree un pión en reposo en el sistema propio del protón.